

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JUAN RUIZ DE CHAVEZ

Espaces de Fock pour les processus de Wiener et de Poisson

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 19 (1985), p. 230-241

[<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1985__19__230_0>](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1985__19__230_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ESPACES DE FOCK POUR LES PROCESSUS DE WIENER ET DE POISSON

par J. Ruiz de Chavez

Soit f une fonctionnelle de carré intégrable du mouvement brownien à une dimension, et soit $f = \sum_n f_n$ son développement suivant les chaoses de Wiener. Il est bien connu que si l'on pose

$$P_t f = \sum_n e^{-nt} f_n$$

on définit un opérateur sur L^2 qui est, non seulement une contraction au sens hilbertien, mais un opérateur markovien ($P_t 1 = 1$; $f \geq 0 \Rightarrow P_t f \geq 0$). En fait, P_t peut être considéré comme un vrai noyau sur l'espace de Wiener (et les P_t constituent le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck, qui admet la mesure de Wiener comme mesure invariante symétrique).

Dans un article publié dans les Proceedings du congrès de Bangalore [3], D. Surgailis a annoncé que les mêmes résultats étaient vrais pour les fonctionnelles du processus de Poisson. La démonstration de Surgailis n'est parue qu'en 1984, et n'est pas très accessible, les matériaux nécessaires étant répartis dans plusieurs articles.

Notre but dans ce travail est de présenter systématiquement ces questions, dans un langage aussi familier que possible. Cela nous a amenés à reprendre aussi des résultats sur l'espace de Fock, plus connus sans doute des physiciens que des probabilistes.

Ce travail ne contient pas de résultats nouveaux. Dans un second exposé, nous traitons un autre aspect des travaux de Surgailis, celui des produits de Wick, auquel nous avons pu apporter une contribution originale. On le trouvera à la suite de celui-ci.

I. MESURES ALEATOIRES GAUSSIENNES.

1. Soit (E, \underline{E}) un espace mesurable lusinien, muni d'une mesure μ , et soit X_B ($B \in \underline{E}$) une mesure aléatoire gaussienne à accroissements indépendants, de variance μ . Rappelons en la définition : sur un espace probabilisé $(\Omega, \underline{A}, P)$, on se donne une famille de v.a. X_B indexée par les $B \in \underline{E}$ de mesure finie ; X_B est gaussienne centrée de variance $\mu(B)$; les v.a. correspondant à des ensembles disjoints sont indépendantes ; enfin, pour toute décomposition $B = \bigcup_n B_n$ de $B \in \underline{E}$ en ensembles disjoints, on a $X_B = \sum_n X_{B_n}$ p.s.. Pour fixer les idées, nous supposons que μ est de masse totale infinie (mais bien entendu elle est σ -finie).

D'après un théorème classique de théorie de la mesure, il existe un isomorphisme entre l'espace mesurable (E, \underline{E}) et l'espace $(\mathbb{R}_+, \underline{B}(\mathbb{R}_+))$, qui

1. Pour le cas gaussien, on pourra consulter Neveu [5].

transforme la mesure μ en la mesure de Lebesgue. Identifiant alors E à \mathbb{R}_+ , le processus $X_t = X_{[0,t]}$ est un mouvement brownien (dont on peut choisir une version continue) et X_B est l'intégrale stochastique $\int I_B(s) dX_s$. On ne perd donc aucune généralité en travaillant sur l'espace du mouvement brownien, au moyen de méthodes de théorie des martingales :

il faudra cependant énoncer les résultats finaux sous forme « intrinsèque », c. à d. invariante par une bijection de \mathbb{R}_+ préservant la mesure. Rien ne nous empêche, pour fixer les idées, de prendre pour Ω l'espace canonique du mouvement brownien, \underline{A} étant engendrée par les coordonnées X_t .

Nous rencontrerons exactement la même situation au paragraphe II, au sujet du processus de Poisson.

2. Nous désignons par \underline{H} l'espace de Hilbert $L^2(\mu)$; à tout élément f de \underline{H} nous associons la v.a.

$$\tilde{f} = J_1(f) = \int f_s dX_s \quad (\text{intrinsèque})$$

et la martingale $M_t^f = \int_0^t f_s dX_s$ (non intrinsèque). L'application J_1 est un isomorphisme de \underline{H} sur un sous-espace gaussien de $L^2(\Omega)$ qui engendre la tribu \underline{A} : le premier chaos de Wiener noté W_1 (c'est le sous-espace fermé engendré par les v.a. X_B , il est donc intrinsèque). Nous identifierons souvent \underline{H} et W_1 par l'isomorphisme J_1 .

Nous associons à f la v.a. suivante, qui admet des moments de tous ordres

$$(1) \quad \mathcal{E}(f) = \exp \left[\int f_s dX_s - \frac{1}{2} \int f_s^2 ds \right] = \exp \left(\tilde{f} - \frac{1}{2} \|f\|^2 \right)$$

On reconnaît la v.a. terminale de la martingale exponentielle de Doléans $\mathcal{E}(M_t^f)$. On a $E[\mathcal{E}(f)] = 1$ et

$$(2) \quad \mathcal{E}(f)\mathcal{E}(g) = \mathcal{E}(f+g)e^{\langle f, g \rangle}, \quad E[\mathcal{E}(f)\mathcal{E}(g)] = e^{\langle f, g \rangle}.$$

Il est classique aussi que l'ensemble des $\mathcal{E}(f)$, $f \in \underline{H}$, est total dans $L^2(\Omega)$.

Intégrales stochastiques multiples. Soit C_n le sous-ensemble $\{s_1 < \dots < s_n\}$ de \mathbb{R}_+^n . Soit (M_t) une martingale de carré intégrable, admettant un processus croissant déterministe $\langle M, M \rangle_t = m(t)$. Pour toute fonction borélienne g sur C_n , satisfaisant à la condition

$$(3) \quad \|g\|^2 = \int_{C_n} g^2(s_1, \dots, s_n) dm_{s_1} \dots dm_{s_n} < \infty$$

on peut définir l'intégrale stochastique multiple

$$(4) \quad I_n(g) = \int_{C_n} g(s_1, \dots, s_n) dM_{s_1} \dots dM_{s_n}.$$

C'est une v.a. de carré intégrable, telle que $E[I_n(g)^2] = \|g\|^2$. D'autre part, si $m \neq n$ deux intégrales $I_m(g)$, $I_n(h)$ sont orthogonales. Sur tout

cela, voir par ex. Sém. Prob. X, p. 325-327.

Lorsque $g(s_1, \dots, s_n) = a_1(s_1) \dots a_n(s_n)$, l'intégrale multiple se calcule très simplement par itération : on pose

$$M_t^1 = \int_0^t a_1(s) dM_s, \quad M_t^2 = \int_0^t a_2(s) M_{s-}^1 dM_s \dots \quad M_t^n = \int_0^t a_n(s) M_{s-}^{n-1} dM_s$$

et alors $I_n(g) = M_\infty^n$. En particulier, si M est continue, on a

$$(5) \quad \int_{s_1 < s_2 < \dots < s_n \leq t} dM_{s_1} \dots dM_{s_n} = \frac{1}{n!} m(t)^{n/2} H_n(M(t)/\sqrt{m(t)})$$

où H_n est le n-ième polynôme d'Hermite (Sém. Prob. X, p. 319). Un autre résultat important est le développement de l'exponentielle de Doléans

$$(6) \quad \mathcal{E}(\lambda M_t) = \sum_n \lambda^n \int_{s_1 < s_2 < \dots < s_n \leq t} dM_{s_1} \dots dM_{s_n}$$

(Sém. Prob. X, p. 318), qui n'exige pas la continuité de M .

Maintenant, nous prenons $M_t = X_t$, le mouvement brownien : nous remarquons que l'intégration sur C_n n'est pas intrinsèque, car elle fait intervenir l'ordre de \mathbb{R}_+ . L'idée utilisée par Ito pour la rendre intrinsèque consiste à intégrer des fonctions $g(s_1, \dots, s_n)$ sur \mathbb{R}_+^n , symétriques en l'ensemble des variables, en convenant que

$$(7) \quad \int_{\mathbb{R}_+^n} g(s_1, \dots, s_n) dX_{s_1} \dots dX_{s_n} = n! \int_{C_n} g(s_1, \dots, s_n) dX_{s_1} \dots dX_{s_n}$$

Nous noterons $J_n(g)$ cette intégrale, et nous verrons dans un instant qu'elle est intrinsèque. On a

$$(8) \quad E[J_n(g)^2] = n! \|g\|^2 \quad (\text{norme dans } L^2(\mathbb{R}_+^n))$$

Rappelons que l'on note $f_1 \otimes \dots \otimes f_n$ la fonction $(s_1, \dots, s_n) \mapsto f_1(s_1) \dots f_n(s_n)$; si toutes les f_i sont identiques, on obtient une fonction symétrique $f^{\otimes n}$, et la formule (6) s'écrit, pour $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$

$$(9) \quad \mathcal{E}(\lambda f) = \sum_n \frac{\lambda^n}{n!} J_n(f^{\otimes n}) \quad (\text{série convergente dans } L^2)$$

Cela montre que les $J_n(f^{\otimes n})$ ont un sens intrinsèque. On peut montrer que les $f^{\otimes n}$ ($f \in L^2(\mathbb{R}_+)$) forment un ensemble total dans le sous-espace $L_{\text{sym}}^2(\mathbb{R}_+^n)$ de $L^2(\mathbb{R}_+^n)$ - nous le verrons plus bas. Il en résulte bien que $J_n(g)$ est intrinsèque .

L'espace des intégrales stochastiques multiples d'ordre n $J_n(g)$ est le n-ième chaos de Wiener \underline{W}_n ; on convient que \underline{W}_0 est l'espace des v.a. constantes, et l'on a

$$L^2(\Omega) = \oplus_n \underline{W}_n \quad (\text{somme directe hilbertienne})$$

Considérons n éléments de \underline{W}_1 , $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n$; on appelle produit de Wick de ces v.a., et on note $:\tilde{f}_1 \dots \tilde{f}_n:$, la projection du produit ordinaire $\tilde{f}_1 \dots \tilde{f}_n$ sur le n-ième chaos \underline{W}_n . Il est clair que l'application $(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n)$ est n-linéaire symétrique ; pour la déterminer, il suffit

donc de polariser la puissance de Wick $\tilde{f} \mapsto : \tilde{f}^n :$. Or appliquons (5) à la martingale continue M_t^f , pour laquelle $\langle M^f, M^f \rangle_t = m(t) = \int_0^t f_s^2 ds$; il vient (pour $t=\infty$) que $\|f\|^n H_n(\tilde{f}/\|f\|)$ est une intégrale stochastique itérée, donc appartient au n -ième chaos de Wiener : plus précisément

$$(10) \quad J_n(f^{\otimes n}) = \|f\|^n H_n(\tilde{f}/\|f\|).$$

est la traduction exacte de (5) pour la martingale M^f . La différence $\tilde{f}^n - \|f\|^n H_n(\tilde{f}/\|f\|)$ est un polynôme en \tilde{f} de degré $< n$ (car le terme dominant de $H_n(x)$ est x^n), donc une combinaison linéaire de polynômes d'Hermite en $\tilde{f}/\|f\|$ de degré $< n$, donc orthogonale à \underline{W}^n . On a donc établi

$$(11) \quad : \tilde{f}^n : = \|f\|^n H_n(\tilde{f}/\|f\|)$$

Il est possible de démontrer que, si f_1, \dots, f_p sont des éléments de \underline{H} , orthogonaux et de norme 1, on a

$$(12) \quad : \tilde{f}_1^{k_1} \dots \tilde{f}_n^{k_n} : = H_{k_1}(\tilde{f}_1) \dots H_{k_n}(\tilde{f}_n)$$

La formule (9) s'énonce simplement en disant que $\mathcal{E}(f)$ est l'exponentielle de Wick $: e^{\tilde{f}} :$.

3. Espace de Fock. La construction précédente est de nature probabiliste, mais elle peut se mettre sous une forme abstraite, qui a été introduite par Fock pour les besoins de la mécanique quantique. Rappelons que, si \underline{H} est un espace de Hilbert abstrait, on peut définir sa n -ième puissance tensorielle $\underline{H}^{\otimes n}$: c'est un espace de Hilbert, muni d'une application n -linéaire $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ de $\underline{H} \times \dots \times \underline{H}$ dans $\underline{H}^{\otimes n}$ satisfaisant à

$$\langle x_1 \otimes \dots \otimes x_n, y_1 \otimes \dots \otimes y_n \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle \dots \langle x_n, y_n \rangle$$

et engendré par l'image de cette application - de sorte que si (e_i) est une base orthonormale de \underline{H} , les $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_n}$ forment une base orthonormale de $\underline{H}^{\otimes n}$. Par exemple, si \underline{H} est un espace $L^2(E, \mu)$, $\underline{H}^{\otimes n}$ s'identifie à $L^2(E^n, \mu^n)$, l'application \otimes étant naturellement donnée par

$$f_1 \otimes \dots \otimes f_n(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n)$$

Une permutation σ des indices $1, \dots, n$ donne lieu naturellement à un automorphisme U_σ de $\underline{H}^{\otimes n}$ tel que

$$U_\sigma(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(n)}$$

Cet automorphisme préserve le produit scalaire. Cela permet de définir le sous-espace fermé $\underline{H}_{\text{sym}}^{\otimes n}$ des tenseurs symétriques. Le projecteur orthogonal sur ce sous-espace est

$$S = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} U_\sigma$$

et l'on pose $x_1 \otimes \dots \otimes x_n = S(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)$: cette application n -linéaire symétrique est aussi la polarisée de $x \mapsto x^{\otimes n}$.

Nous désignerons par $\underline{H}^{\otimes n}$ l'espace $\underline{H}_{\text{sym}}^{\otimes n}$, mais avec une norme modifiée de la manière suivante : si T est un tenseur symétrique

$$\|T\|_{\underline{H}^{\otimes n}}^2 = n! \|T\|_{\underline{H}^{\otimes n}}^2$$

Cela tient à la formule (8) : avec ce choix de normes, et lorsque $\underline{H} = L^2(\mathbb{R}_+)$, $\underline{H}^{\otimes n} = L^2(\mathbb{R}_+^n)$, l'application $g \mapsto J_n(g)$ est une isométrie de $\underline{H}^{\otimes n}$ sur le n -ième chaos de Wiener \underline{W}_n .

On voit maintenant comment on peut mettre la construction probabiliste précédente sous forme abstraite : étant donné un espace de Hilbert abstrait \underline{H} , on appelle espace de Fock construit sur \underline{H} la somme directe hilbertienne

$$(13) \quad \mathfrak{F}(\underline{H}) = \bigoplus_n \underline{H}^{\otimes n} \quad (\underline{H}^{\otimes 0} = \mathbb{R} \text{ par convention})$$

Lorsque \underline{H} est interprété comme $L^2(\mathbb{R}_+)$, nous avons interprété $\mathfrak{F}(\underline{H})$ comme $L^2(\Omega)$.

4. Prolongement d'opérateurs linéaires. Soient A et B deux opérateurs bornés sur un espace de Hilbert \underline{H} . Il existe un opérateur unique $A \otimes B$ sur l'espace $\underline{H} \otimes \underline{H}$ (provisoirement non complété) tel que $A \otimes B(x \otimes y) = (Ax) \otimes (By)$. Le lemme suivant permet en particulier de prolonger cet opérateur au produit tensoriel hilbertien (complété).

LEMME. $\|A \otimes B\| \leq \|A\| \|B\|$.

Il suffit de raisonner séparément sur $A \otimes I$ et $I \otimes B$. Soit un élément de $\underline{H} \otimes \underline{H}$; nous pouvons l'écrire $z = \sum_i x_i \otimes y_i$, et grâce au procédé d'orthogonalisation usuel nous pouvons supposer que les y_i forment un système orthonormal. Alors les $x_i \otimes y_i$ forment un système orthogonal, et nous avons $\|z\|^2 = \sum_i \|x_i\|^2$. De même, $(A \otimes I)z = \sum_i Ax_i \otimes y_i$, donc $\|(A \otimes I)z\|^2 = \sum_i \|Ax_i\|^2$. La conclusion est alors immédiate.

En particulier, si A est un opérateur borné sur \underline{H} , nous pouvons définir sa puissance tensorielle $A^{\otimes n}$ sur $\underline{H}^{\otimes n}$, qui est un opérateur de norme au plus $\|A\|^n$. Par restriction à l'espace des tenseurs symétriques, nous définissons l'opérateur $A^{\otimes n}$ sur $\underline{H}^{\otimes n}$.

DEFINITION. Soit A une contraction de \underline{H} . On note $\mathfrak{F}(A)$ l'unique opérateur sur l'espace de Fock $\mathfrak{F}(\underline{H})$ dont la restriction à $\underline{H}^{\otimes n}$ est $A^{\otimes n}$ pour tout n (I sur $\underline{H}^{\otimes 0} = \mathbb{R}$, A sur $\underline{H}^{\otimes 1} = \underline{H}$).

Il est clair que $\Phi(A)$ est aussi une contraction (c. à d. diminue la norme) de $\Phi(H)$. Par exemple, si $Ax = e^{-t}x$, $\Phi(A)$ opère sur le n-ième espace $H^{\otimes n}$ par homothétie de facteur e^{-nt} ; dans l'interprétation probabiliste, c'est l'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck P_t de l'introduction.

Plaçons nous dans l'interprétation probabiliste : $H^{\otimes n} = W^n$, $\Phi(A)$ est une contraction de $L^2(\Omega)$ telle que $\Phi(A)1=1$, préservant l'intégrale (en effet, si $f \in L^2(\Omega)$ admet le développement $f = \sum_n f_n$ suivant les chaos, l'intégrale est simplement la constante f_0), ce qui s'écrit aussi sous la forme $\Phi(A)^*1=1$.

Nous empruntons à B. Simon [1] la démonstration du résultat suivant, qui fournit un critère général de positivité pour des opérateurs définis << chaos par chaos >> et s'applique en particulier aux P_t .

THEOREME 1. $\Phi(A)$ est un opérateur positif sur $L^2(\Omega)$.

Démonstration. Soit (f_1, \dots, f_n) un système fini d'éléments de H , et soit \tilde{f} la v.a. vectorielle $(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n)$. Nous allons montrer que pour toute fonction positive K sur \mathbb{R}^n , appartenant à l'espace \underline{S} de Schwartz, on a $\Phi(A)(K \circ \tilde{f}) \geq 0$. L'extension à des v.a. positives quelconques est alors facile. Ecrivons la formule d'inversion de Fourier

$$K(x) = \int e^{-iu \cdot x} \hat{K}(u) \, du \quad (du = du/(2\pi)^{n/2})$$

donc

$$\Phi(A)(K \circ \tilde{f}) = \int \Phi(A)e^{-iu \cdot \tilde{f}} \hat{K}(u) \, du$$

D'autre part, la formule (9) nous donne

$$(14) \quad \Phi(A)\mathcal{E}(\lambda h) = \mathcal{E}(\lambda Ah)$$

aussi pour λ complexe : prenons $\lambda=1$, $h=u_1 f_1 + \dots + u_n f_n$, posons $Af_i = g_i$.

Il vient

$$\Phi(A)e^{-iu \cdot \tilde{f}} e^{\|h\|^2/2} = e^{-iu \cdot \tilde{g}} e^{\|Ah\|^2/2}$$

Or l'expression $\|h\|^2 - \|Ah\|^2$, considérée comme fonction de u , est une forme quadratique positive, parce que A est une contraction. Donc la fonction $\exp \frac{1}{2}(\|Ah\|^2 - \|h\|^2)$ de u est de type positif, et il en est de même de son produit par la fonction de type positif $\hat{K}(u)$, produit qui est encore dans l'espace \underline{S} de Schwartz. Il reste finalement

$$\int e^{-iu \cdot \tilde{g}} e^{(\|Ah\|^2 - \|h\|^2)/2}(u) \hat{K}(u) \, du \geq 0$$

qui est le résultat désiré.

Surgailis a établi un résultat analogue (plus faible) pour les mesures de Poisson. On trouvera dans Simon [1] d'autres propriétés des opérateurs $\Phi(A)$ lorsque $\|A\| < 1$ strictement (hypercontractivité, amélioration de la positivité) importantes pour les applications à la théorie quantique des champs. Nous n'en parlerons pas ici. Surgailis a montré que l'hypercontractivité ne s'étend pas au cas du processus de Poisson.

II. MESURES ALEATOIRES DE POISSON

1. Dans ce paragraphe, la mesure aléatoire gaussienne (X_B) ($B \in \underline{E}$) va être remplacée par une mesure aléatoire de Poisson (N_B) de moyenne μ (comme plus haut, μ sera diffuse, de masse totale $+\infty$, et σ -finie). Comme au début, on ne perd pas de généralité en supposant que l'espace d'états E est \mathbb{R}_+ , et que μ est la mesure de Lebesgue, ce qui nous permettra, chaque fois que nous le désirerons, d'utiliser le calcul stochastique ordinaire. Le processus $N_t = N_{[0,t]}$ est alors un processus de Poisson usuel. Nous désignerons par (X_t) le processus de Poisson compensé correspondant $N_t - t$ ($X_B = N_B - \mu(B)$).

La situation est à bien des égards plus simple que dans le cas gaussien. Par exemple, on peut construire une réalisation de la mesure aléatoire, sur un espace probabilisé $(\Omega, \underline{A}, P)$, dont les << trajectoires >> sont de vraies mesures, de la forme

$$(1) \quad N_B(\omega) = \sum_{s \in S(\omega)} I_B(s) \quad (N_B(\omega, dt) = \sum_{s \in S(\omega)} \varepsilon_s(dt))$$

Du point de vue des processus, $S(\omega)$ est l'ensemble des instants de saut de la trajectoire $N(\omega)$. Nous supposons dans toute la suite que la tribu \underline{A} est engendrée par la mesure aléatoire.

Comme dans le cas gaussien, nous posons $\underline{H} = L^2(\mu)$, et nous identifions \underline{H} au premier chaos de Poisson \underline{P}_1 , par l'intégrale stochastique

$$(2) \quad \text{si } f \in \underline{H}, \quad J_1(f) = \tilde{f} = \int_0^\infty f_s dX_s$$

qui, si f est bornée à support dans un ensemble μ -intégrable¹ (nous abrégons cela par la suite en disant que f est bien bornée) prend la forme

$$(2') \quad J_1(f) = \tilde{f} = \sum_{s \in S(\cdot)} f(s) - \mu(f)$$

Comme dans le cas gaussien encore, pour $f \in L^2_{\text{sym}}(\mathbb{R}^n)$ on peut définir l'i.s. multiple

$$(3) \quad J_n(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(s_1, \dots, s_n) dX_{s_1} \dots dX_{s_n}$$

qui, si l'on identifie E à \mathbb{R}_+ vaut aussi

$$(4) \quad J_n(f) = n! \int_{s_1 < s_2 < \dots < s_n} f(s_1, \dots, s_n) dX_{s_1} \dots dX_{s_n}$$

L'application J_n est une isométrie de $\underline{H}^{\otimes n} = L^2_{\text{sym}}(\mathbb{R}^n)$ - avec norme modifiée comme dans le cas gaussien - sur le n-ième chaos de Poisson \underline{P}_n . Si \underline{P}_0 désigne l'espace des v.a. constantes, il est classique que l'on a

1. Si on identifie E à \mathbb{R}_+ , il pourra être plus commode de supposer f à support compact.

$$L^2(\Omega) = \oplus_n \underline{P}_n$$

de sorte que l'on a trouvé une seconde interprétation probabiliste de la notion algébrique d'espace de Fock $\mathfrak{F}(\underline{H})$ construit sur $\underline{H} = L^2(\mu)$. Si A est une contraction de \underline{H} , l'opérateur $\mathfrak{F}(A)$ sur l'espace de Fock se traduit comme l'opérateur borné sur $L^2(\Omega)$ opérant sur les chaos de Poisson par

$$\mathfrak{F}(A)J^n(f^{\otimes n}) = J_n((Af)^{\otimes n})$$

$\mathfrak{F}(A)$ étant une contraction de l'espace de Fock est aussi une contraction de $L^2(\Omega)$, préservant le chaos \underline{P}_0 (donc préservant à la fois les constantes et l'intégrale de $f \in L^2(\Omega)$). En revanche, l'étude faite dans la première partie ne nous dit rien quant à la positivité de $\mathfrak{F}(A)$, celle-ci n'étant pas une propriété << algébrique >>, mais dépendant de l'interprétation probabiliste de l'espace de Fock.

Soit $f \in \underline{H}$. Comme dans le cas gaussien, interprétant E comme \mathbb{R}_+ , nous construisons l'exponentielle de Doléans de la martingale $\int_0^t f_s dX_s$, et sa v.a. terminale

$$(5) \quad \mathcal{E}(f) = e^{\tilde{f}} \prod_{s \in S(.)} (1+f(s))e^{-f(s)}$$

Si f est bien bornée, cette expression se simplifie en

$$(6) \quad \mathcal{E}(f) = e^{-\mu(f)} \prod_{s \in S(.)} (1+f_s) \quad (f_s \text{ pour } f(s))$$

La formule (6) du paragraphe I nous dit, comme dans le cas gaussien, que

$$(7) \quad \mathcal{E}(\lambda f) = \sum_n \frac{\lambda^n}{n!} J_n(f^{\otimes n})$$

série convergente dans L^2 si f est bien bornée. On en déduit que

$$(8) \quad \mathfrak{F}(A)\mathcal{E}(f) = \mathcal{E}(Af) .$$

2. Dans ce n^0 , avant de nous occuper de la positivité de l'opérateur $\mathfrak{F}(A)$, nous allons présenter quelques différences importantes avec le cas gaussien.

Soit f une fonction sur E^n , symétrique, bornée, nulle hors d'un ensemble de mesure finie (ici encore, nous dirons bien bornée pour abrégé). Dans ce cas, l'intégrale multiple

$$\int f(s_1, \dots, s_n) dX_{s_1} \dots dX_{s_n} = I_n(f)$$

existe au sens de Stieltjes, et cette intégrale diffère de l'intégrale stochastique multiple (3) : en effet, d'après (4), il manque à $J_n(f)$ l'intégrale de Stieltjes $\int_U f(s_1, \dots, s_n) dX_{s_1} \dots dX_{s_n}$ étendue à l'ensemble U des points de E^n ayant au moins deux coordonnées égales.

Nous allons utiliser cette remarque pour calculer $J_n(f^{\otimes n})$ pour $n=2$ et $n=3$. Il est clair que le procédé s'étend à toutes les valeurs de n . Nous en déduirons quelques conséquences intéressantes.

Nous supposons f bien bornée sur E .

Cas $n=2$. Nous avons $\tilde{f}^2 = \int_{s=t} f_s f_t dX_s dX_t$ (intégrale de Stieltjes) = $J_2(f \otimes f) + \int_{s=t} f_s f_t dX_s dX_t$. Cette dernière intégrale vaut $\int f_s^2 dN_s = \int f_s^2 (dX_s + ds)$.

Ainsi

$$(9) \quad J_2(f \otimes f) = (\tilde{f}^2) - (f^2) - \mu(f^2)$$

Nous en déduisons :

a) $J_2(f \otimes f) - \tilde{f}^2$ appartient à $P_{-1} + P_{=0}$; donc $J_2(f \otimes f)$ est la projection orthogonale de \tilde{f}^2 sur $P_{=2}$. Par polarisation, $J_2(f_1 \otimes f_2)$ est la projection de $\tilde{f}_1 \tilde{f}_2$ sur $P_{=2}$, comme dans le cas gaussien : cela justifierait la notation $:f_1 f_2:$ pour désigner $J_2(f_1 \otimes f_2)$. Néanmoins, nous ne l'utiliserons pas dans la suite de cet exposé, car elle est en conflit avec une autre notion de << produit de Wick >> (cf. exposé suivant).

b) Contrairement au cas gaussien, le côté droit de (9) n'est pas exprimable en fonction de f et $\|f\|$ seulement. C'est le cas cependant si $f^2 = f$, i.e. si f est une indicatrice. Alors $J_2(f \otimes f)$, et plus généralement $J_n(f \otimes^n)$, se calcule au moyen des polynômes de Charlier (cf. Sém. Prob. X, p. 320).

c) Identifions E à \mathbb{R}_+ , et soit f une fonction localement bornée, appartenant à L^2 mais non à L^4 . Si $f_n = f I_{[0,n]}$, la norme de $(f_n^2)^\sim$ dans L^2 tend vers $+\infty$, tandis que $\mu(f_n^2)$ et la norme de $J_2(f_n \otimes f_n)$ restent bornées. Donc la norme de $(\tilde{f}_n)^2$ tend vers $+\infty$, donc la martingale $M_t^f = \int_0^t f_s dX_s$ n'est pas bornée dans L^4 , et finalement la v.a. $\tilde{f} \in P_{=1}$ n'appartient pas à L^4 . C'est une différence essentielle avec le cas gaussien, où les v.a. d'un chaos donné appartiennent à tout L^p .

Cas $n=3$. La différence $\tilde{f}^3 - J_3(f \otimes^3)$ est somme de trois intégrales du type $\int_{u=s \neq t} f_s f_t f_u dX_s dX_t dX_u$ et de l'intégrale $\int_{s=t=u} f_s f_t f_u dX_s dX_t dX_u$.

Commençons par la première : elle vaut $\int_{s \neq t} f_s^2 f_t dN_s dX_t = \int_{s \neq t} f_s^2 f_t dX_s dX_t + (\int f_s^2 ds) (\int f_t dX_t) = \frac{1}{2} J_2(f^2 \otimes f) + \mu(f^2) J_1(f)$

La dernière vaut $\int f_s^3 dN_s = J_1(f^3) + \mu(f^3)$. Ainsi $\tilde{f}^3 - J_3(f \otimes^3)$ appartient à $P_{=0} + P_{=1} + P_{=2}$, justifiant l'interprétation de $J_3(f \otimes^3)$ comme projection de \tilde{f}^3 sur $P_{=3}$, comme dans le cas gaussien.

3. Nous revenons maintenant à la positivité de $\Phi(A)$: Surgailis montre que celle-ci a lieu si A est un noyau sousmarkovien de E dans E , tel que $\mu A \leq \mu$ (nous allons indiquer ci-dessous sa démonstration), et montre aussi (nous ne le ferons pas) que cette condition suffisante est essentiellement nécessaire. Ainsi la situation est très différente de celle

de la première partie. Cependant, il reste vrai que l'opérateur $\Phi(A)$ associé à l'opérateur $Af = e^{-t}f$ est positif : $\Phi(A)$ opère sur le n -ième chaos de Poisson comme l'homothétie de rapport e^{-nt} , et correspond donc exactement au semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck dans le cas gaussien. La description de $\Phi(A)$ donnée par Surgailis permet aussi de comprendre comment évolue le << processus d'Ornstein-Uhlenbeck >> correspondant.

Revenons à la formule (8) : il n'est pas difficile de vérifier que les v.a. $\mathcal{E}(f)$, où f est bien bornée, ont des moments de tous les ordres et forment un ensemble total dans L^2 . Pour montrer que $\Phi(A)$ est positif, nous allons construire un opérateur positif T (en fait, un opérateur d'espérance conditionnelle sur un espace $\bar{\Omega}$ plus gros que Ω) tel que $T\mathcal{E}(f) = \mathcal{E}(Af)$; de plus, nous saurons que $\Phi(A) = T$, donc est une contraction de tout L^p , etc.

Nous construisons deux espaces probabilisés auxiliaires. Le premier, que nous désignerons par W , contient une collection de v.a. notées U_s , $s \in E$, indépendantes entre elles, chaque U_s prenant ses valeurs dans l'espace E augmenté d'un << cimetière >> ∂ , avec pour loi

$$\text{Prob}\{U_s \in B\} = A(s, B) \quad \text{Prob}\{U_s = \partial\} = 1 - A(s, E).$$

Le second, Θ , porte une mesure aléatoire de Poisson N' de moyenne $\mu - \mu A$, mesure positive par hypothèse.

Nous désignons par $\bar{\Omega}$ l'espace probabilisé produit $\Omega \times W \times \Theta$. Si $\bar{\omega} = (\omega, w, \theta)$, nous définissons une mesure $\bar{N}(\bar{\omega}, dt)$ à valeurs dans E , comme

$$(10) \quad \sum_{s \in S(\omega)} \varepsilon_{U_s(w)}(dt) I_{\{U_s(w) \neq \partial\}} + \sum_{s \in S'(\theta)} \varepsilon_s(dt)$$

Intuitivement : nous tirons d'abord l'ensemble $S(\omega)$ suivant la première mesure de Poisson. Puis, pour chaque point s de $S(\omega)$, nous tirons un point U_s suivant la loi $A(s, \cdot)$ (avec probabilité $1 - A(s, E)$ de ne rien tirer du tout). D'après un théorème de Doob (Stochastic Processes, p. 404 ; voir aussi J.G. Wang, Sém. Prob. XV p. 630 pour une interprétation en termes de processus), l'ensemble des points U_s obtenus est l'ensemble des sauts d'une mesure de Poisson de moyenne $\mu A \leq \mu$: on compense la perte de masse $\mu - \mu A$ en ajoutant une mesure de Poisson indépendante, et ainsi $\bar{N}(\bar{\omega}, \cdot)$ est à nouveau une mesure de Poisson de moyenne μ .

Par exemple, si $Af = cf$ ($c = e^{-t}$; $0 < c < 1$), la première construction consiste à supprimer certains points de $S(\omega)$ (chaque point étant conservé avec probabilité c , supprimé avec probabilité $1 - c$), ce qui laisse une mesure de Poisson de moyenne $c\mu$, et à compenser la perte en superposant une mesure de Poisson indépendante, de moyenne $(1 - c)\mu$.

Soit $\bar{S}(\bar{\omega})$ l'ensemble des sauts (support) de $\bar{N}(\bar{\omega}, \cdot)$, réunion de l'ensemble des points $U_s(w)$ ($s \in S(\omega)$) p.s. distincts, et de $S'(\theta)$, p.s.

disjoint de la réunion précédente. Si f est une fonction bien bornée sur E , nous poserons

$$(11) \quad \bar{\mathcal{E}}(f) = e^{-\mu(f)} \prod_{s \in \bar{S}} (1+f_s)$$

v.a. sur $\bar{\Omega}$ (alors que $\mathcal{E}(f)$, produit analogue sur $s \in S(\omega)$, peut être interprétée soit comme v.a. sur Ω , soit comme v.a. sur $\bar{\Omega}$ dépendant seulement de la première projection de $\bar{\omega} = (\omega, w, \theta)$). Nous allons prouver, d'après Surgailis, que

$$(12) \quad E[\bar{\mathcal{E}}(f)|\omega] = \mathcal{E}(Af)$$

Soit \bar{A} la tribu engendrée par la mesure aléatoire \bar{N} : comme N et \bar{N} sont toutes deux des mesures de Poisson de moyenne μ , il existe un isomorphisme de $L^2(\bar{A})$ sur $L^2(A)$, préservant les constantes et la positivité, et transformant $\mathcal{E}(g)$ en $\bar{\mathcal{E}}(g)$ pour $g \in \underline{H}$. Notons le J , et remarquons que les v.a. $\mathcal{E}(f)$ forment un ensemble total dans $L^2(\bar{A})$; d'après (8), la formule (12) nous donne alors

$$(13) \quad E[J(h)|\omega] = \mathfrak{I}(A)h \quad \text{pour } h = \mathcal{E}(f), \text{ puis pour } h \in L^2(\bar{A})$$

d'où la positivité cherchée pour $\mathfrak{I}(A)$.

Démonstration de (12). On écrit

$$\bar{\mathcal{E}}(f) = e^{-\mu(f)} \prod_{s \in S(\omega)} (1+f(U_s(w))) \prod_{s \in S'(\theta)} (1+f(s))$$

La désintégration de la loi sur $\bar{\Omega}$ connaissant ω est connue par construction, aussi le calcul de l'espérance conditionnelle est celui d'une intégrale ordinaire, tous les facteurs étant indépendants. Le produit à droite nous donne un facteur $e^{(\mu - \mu A)(f)}$. Chacun des facteurs $(1+f(U_s(w)))$ nous donne un facteur $(1+Af(s))$. Pour finir, il reste

$$e^{-\mu A(f)} \prod_{s \in S(\omega)} (1+Af(s)) = \mathcal{E}(Af)(\omega). \quad \square$$

Nous terminerons cette section en remarquant que, si A est un noyau sousmarkovien de E dans E , tel que $\mu A \leq \mu$, il admet un noyau dual A' possédant les mêmes propriétés, tel que $\langle Af, g \rangle_\mu = \langle f, A'g \rangle_\mu$, et alors l'opérateur adjoint de $\mathfrak{I}(A)$ est $\mathfrak{I}(A')$. En particulier, si A est μ -symétrique, $\mathfrak{I}(A)$ est P -symétrique. D'où le caractère symétrique du << processus d'Ornstein-Uhlenbeck >> associé à la mesure de Poisson.

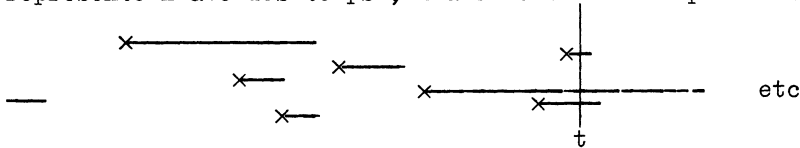
4. Pour terminer, nous donnerons une description probabiliste plus intuitive du << processus d'Ornstein-Uhlenbeck >>.

Sur un espace probabilisé Ω , construisons une mesure aléatoire de Poisson à valeurs dans $E \times \mathbb{R}_+$, de moyenne $(\mu \times \varepsilon_0) + (\mu \times \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue $\lambda(dt) = dt$. Si nous appelons Υ_t la projection sur E de la mesure $I_{(E \times [0, t])} \cdot N$, nous obtenons un processus à valeurs mesures, dont la loi à l'instant t est celle d'une mesure de Poisson de moyenne

$(1+t)\mu$. De plus, ce processus est à accroissements indépendants, donc markovien.

Ensuite, nous compensons cette création continue de masse en attribuant à chaque point créé une durée de vie exponentielle de paramètre 1, les durées de vie des différents points étant indépendantes (cela exige un élargissement de Ω , que nous laissons au lecteur le soin de formaliser). Dans ces conditions, on obtient précisément le « processus d'Ornstein-Uhlenbeck à valeurs mesures » décrit par Surgailis, dont la loi à chaque instant est celle de la mesure de Poisson sur E de moyenne μ .

Une description plus intuitive encore, due à M. Emery, consiste à construire une trajectoire du processus indexée par $t \in \mathbb{R}$: l'axe horizontal représente l'axe des temps, l'axe vertical l'espace des états.



les points x sont tirés suivant une mesure de Poisson de paramètre $\mu(dx)dt$, les intervalles — ont des longueurs indépendantes de loi exponentielle. La coupe représente la configuration à l'instant t .

REMARQUE. Nous avons essayé de savoir dans quelle mesure ce processus d'Ornstein-Uhlenbeck est un objet connu des probabilistes. Il l'est assez peu : l'objet lui-même est familier aux spécialistes des particules en interaction (pour lesquels il représente une interaction triviale). La manière dont il opère sur les chaos de Poisson fait partie du « folklore » du sujet (communication de W. von Waldenfels), mais il est difficile de donner une référence précise. Cette remarque ne concerne bien sûr que le processus mentionné à la fin de l'exposé, et non le reste du travail de Surgailis.

REFERENCES

- [1]. SIMON (B.). The $P(\phi)_2$ euclidean quantum field theory. Princeton university press, 1974.
- [2]. SURGAILIS (D.). On multiple Poisson stochastic integrals and associated Markov semi-groups. Probability and Math. Stat.⁽¹⁾ 3, 1984, 217-239.
- [3]. SURGAILIS (D.). On Poisson multiple stochastic integrals and associated equilibrium Markov processes. Proc. IFIP-ISI conference on random fields, Bangalore 1982. Lecture Notes in Control and Inf. 49, Springer.
- [4]. NELSON (E.). The free Markoff field. J. Funct. An. 12, 1973, 211-227.
- [5]. NEVEU (J.). Processus aléatoires gaussiens. Presses de l'Université de Montréal., 197.

(1) Revue Polonaise