Christophe Stricker

Une remarque sur une certaine classe de semimartingales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 19 (1985), p. 218-221
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1985__19__218_0>

Une remarque sur une certaine classe de semimartingales

Par C. STRICKER

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ un espace probabilisé filtré vérifiant les conditions habituelles. Dans [2] nous avions étudié la classe des semimartingales continues X de décomposition canonique M+A satisfaisant à la condition :

(1) $d\langle M,M\rangle_s = m_s\,ds$, $dA_s = a_s\,ds$, le processus prévisible (m_s) est localement borné et $\int_0^t a_s^2\,ds < +\infty$ pour tout $t > 0$.

Nous avions montré que cette condition (1) était équivalente à :

(2) Si $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des processus prévisibles élémentaires bornés vérifiant $\int_0^t H_s^2\,ds \leq 1$ pour tout $t \geq 0$, alors $\{(H.X)_t, H \in \mathcal{E}\}$ est borné dans L^0 pour tout $t \geq 0$.

Notons, toujours d'après [2], que la condition (2) est aussi équivalente à :

(3) Tout processus prévisible H vérifiant $\int_0^t H_s^2\,ds < +\infty$ pour tout $t > 0$, est X-intégrable, c'est-à-dire $\int_0^t H_s\,dX_s$ existe pour tout $t > 0$.

Comme la condition (2) est invariante par changement de loi dans une même classe d'équivalence, il en est de même pour (1). On est tenté d'affaiblir (1) en considérant des semimartingales non <u>nécessairement continues</u> mais spéciales vérifiant :

(1')$[M,M]$ est localement intégrable, la projection duale de $[M,M]$, notée $\langle M,M\rangle$ est de la forme $d\langle M,M\rangle_s = m_s\,ds$, $dA_s = a_s\,ds$, le processus prévisible (m_s) est localement borné et $\int_0^t a_s^2\,ds < +\infty$ pour tout $t \geq 0$.

Montrons que (1') implique (2).

PROPOSITION 1. Si X est une semimartingale spéciale vérifiant (1'), elle vérifie aussi (2).

DEMONSTRATION. Soit $t > 0$ fixé. Par arrêt nous pouvons supposer qu'il existe une constante C telle que $|m_s| \leq C$ et $\int_0^t a_s^2 \, ds \leq C$. Si H est un processus prévisible vérifiant $\int_0^t H_s^2 \, ds \leq 1$, $E[(H.M)_t^2] = E[(H^2.[M,M])_t] = E[(H^2.\langle M,M\rangle)_t] \leq C$ et $E[(H.A)_t^2] \leq E[\int_0^t H_s^2 \, ds \int_0^t a_s^2 \, ds] \leq C$. Donc X vérifie (2).

La réciproque de cette proposition est fausse et voici un contre-exemple qui montrera en même temps que la classe des semimartingales spéciales vérifiant (1') n'est pas invariante par changement de loi dans une même classe d'équivalence. Soit $\Omega = \mathbb{R}^+$, $\mathcal{F}$ la tribu borélienne, S l'application identité sur Ω, $(\mathcal{F}_t)$ la filtration naturelle du processus $(S\wedge t)$, P_1 la loi exponentielle de paramètre 1 et P_2 une loi de densité continue $f > 0$ telle que $f(u) = o(u)$ au voisinage de 0. D'après Dellacherie [1] on sait que si P est une loi diffuse sur l'espace probabilisable ci-dessus, la projection duale prévisible $\tilde{A}^P$ du processus croissant $A = 1_{[S,+\infty[}$ est définie par $\tilde{A}_t^P = -\mathrm{Log}(1 - F(S\wedge t))$ où F désigne la fonction de répartition de P. Par ailleurs, si f est une fonction borélienne telle que f(S) soit P intégrable, la projection duale prévisible de $(\int_0^t f(u)\, dA_u)$ est $(\int_0^t f(u)\, d\tilde{A}_u^P)$. Soit $X_t = \frac{1}{\sqrt{S}} 1_{[S,+\infty[}(t) - \int_0^t \frac{1}{\sqrt{u}} \, d\tilde{A}_u^{P_2}$. X est une P_2 martingale, $[X,X] = \frac{1}{S} 1_{[S,+\infty[}$, $\widetilde{[X,X]}_t^{P_2} = \int_0^{t\wedge S} \frac{f(u)}{u(1-F_2(u))} \, du$. Donc X vérifie (1') sous P_2. Or la décomposition canonique de X sous P_1 est :

$$X_t = \left(\frac{1}{\sqrt{S}} 1_{[S,+\infty[}(t) - \int_0^t \frac{du}{\sqrt{u}}\right) + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{u}} \, d\left(u + \tilde{A}_u^{P_2}\right).$$

<u>Ainsi X ne vérifie pas (1') sous</u> P_1. Toutefois X vérifie (1') et donc (2) sous P_2. Mais la condition (2) étant invariante par changement de loi dans une même classe d'équivalence, X vérifie aussi (2) sous P_1, si bien que (2) n'entraine pas (1'), même si la semimartingale X est spéciale.

REMARQUES.

i) Bien entendu, on pourrait modifier la loi P_1 dans l'exemple ci-dessus pour que X ne soit même plus spéciale.

ii) Notons que la densité $\frac{dP_1}{dP_2}$ n'est pas bornée. En effet la formule de Girsanov et les résultats de [2] montrent que si X est une semimartingale spéciale vérifiant (1') sous la loi P, elle vérifie aussi (1') sous toute loi Q absolument continue par rapport à P et ayant une densité $\frac{dQ}{dP}$ <u>bornée</u>.

PROPOSITION 2. Si X est une semimartingale telle que $(H.X)_t = 0$ pour tout processus prévisible borné H vérifiant $\int_0^t |H_s|\,ds = 0$ alors :

i) les sauts de X sont totalement inaccessibles.

ii) $\left(H^2.[X,X]\right)_t = 0$

iii) lorsque X est une semimartingale spéciale, la partie à variation finie est absolument continue et $(H.[M,M])_t = 0$, M étant la partie martingale locale de la décomposition canonique de X.

DEMONSTRATION.

i) si T est un temps d'arrêt prévisible et si $H = 1_{[T]}$, on a $\int_0^t H_s\,ds = 0$ pour tout t et $H.X = \Delta X_T\, 1_{[T,+\infty[}$. Donc $\Delta X_T = 0$ et X n'a que des sauts totalement inaccessibles.

ii) d'après la formule d'Ito, $(H.X)_t^2 = \int_0^t (H.X)_{s-} H_s\,dX_s + \left(H^2.[X,X]\right)_t$. Ainsi $\left(H^2.[X,X]\right)_t = 0$ si $\int_0^t |H_s|\,ds = 0$.

iii) cette assertion est établie dans notre article [2].

REMARQUE. Notons que l'hypothèse de la proposition 2 n'entraine pas que X est une semimartingale spéciale. En effet soit N un processus de Poisson standard, S le premier instant de saut et $(\mathcal{F}_t)$ la filtration naturelle de N. Alors si H est un processus prévisible borné, $E[H_S] = E[(H.N)_S] = E[\int_0^S Hu\,du]$.
En particulier si H est positif et $\int_0^\infty Hu\,du = 0$, $H_S = 0$. Posons $Y = \frac{1}{S}\, 1_{[S,+\infty[}$.
On a $H.Y = 0$ mais Y n'est pas localement intégrable car si T est un temps d'arrêt, T est constant sur $\{T < S\}$. Ainsi Y n'a pas de projection duale prévisible et ne peut donc être spéciale.

Ces calculs montrent aussi, comme nous l'avions annoncé dans [2], que <u>la martingale purement discontinue</u> $M_t = N_{t\wedge S} - t\wedge S$ vérifie les hypothèses de la proposition 2.

REFERENCES.

[1] DELLACHERIE C. : Capacités et processus stochastiques. Ergebnisse der Math. 67, Springer Verlag, 1972.

[2] STRICKER C. : Quelques remarques sur les semimartingales gaussiennes et le problème de l'innovation. Proceedings of the ENST-CNET Colloquium, Lecture Notes in Control and Information Sciences 61, 260-276, Springer Verlag, 1984.

Université de Franche-Comté
Faculté des Sciences
Laboratoire de Mathématiques
(U.A. n°741)
25030 BESANCON CEDEX