

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MICHEL ÉMERY

WEI-AN ZHENG

## **Fonctions convexes et semimartingales dans une variété**

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 18 (1984), p. 501-518

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1984\\_\\_18\\_\\_501\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1984__18__501_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# FONCTIONS CONVEXES ET SEMIMARTINGALES

## DANS UNE VARIÉTÉ

par M. EMERY et W.A. ZHENG

It is well known that  $\mathbb{R}^d$ -valued semi-martingales (resp. local martingales) are transformed into real semi-martingales (resp. local submartingales) by convex functions. We extend this to the case when  $\mathbb{R}^d$  is replaced by a manifold with an affine connection (convex functions are those whose restriction to all geodesics, considered as functions of one variable, are convex ; we do not require any additional smoothness).

---

Sur une variété munie d'une connexion affine, nous démontrons que les fonctions convexes (c'est-à-dire les fonctions dont la restriction à chaque géodésique, considérée comme une fonction d'une variable, est convexe) transforment les semi-martingales en semimartingales et les martingales en sous-martingales locales, comme dans le cas bien connu des espaces affines.

---

Nous remercions Monsieur le Professeur Elworthy de ses suggestions et remarques sur une première version de ce travail.

Soit  $V$  une variété réelle de dimension  $d$ , munie d'une connexion affine  $\Gamma$ . Pour simplifier les énoncés et éviter la recherche des hypothèses minimales, nous supposons  $V$  et  $\Gamma$  de classe  $C^\infty$ . Nous n'utiliserons la connexion que par l'intermédiaire de la famille de géodésiques qu'elle permet de tracer sur la variété et des martingales qu'elle permet de définir dans  $V$  ; on ne change donc rien en retranchant à  $\Gamma$  sa torsion : nous supposons dorénavant la connexion  $\Gamma$  sans torsion. Nous dirons qu'une partie  $A$  de  $V$  est  $\Gamma$ -convexe si, pour  $x$  et  $y$  dans  $A$ , il existe une géodésique qui joint  $x$  à  $y$  en restant dans  $A$ , et une seule à un changement affine de paramètre près.

Il est bien connu que deux points assez voisins de  $V$  peuvent toujours être joints par une géodésique qui dépend de façon  $C^\infty$  des deux points. Plus précisément,



il existe une fonction  $w$ , définie et  $C^\infty$  dans un ouvert  $\text{Dom } w$  de  $V \times V \times \mathbb{R}$  qui contient  $\text{Diagonale}(V) \times [0,1]$ , à valeurs dans  $V$ , telle que

$$w(x,y,0) = x \quad ; \quad w(x,y,1) = y \quad ; \\ \lambda \longmapsto w(x,y,\lambda) \text{ est une géodésique .}$$

Lorsqu'on regarde localement le réseau des géodésiques de la variété à travers une forte loupe, ce qu'on observe ressemble au réseau des droites de  $\mathbb{R}^d$ . Ceci se traduit par l'énoncé suivant, dont nous rejetons la démonstration en appendice.

LEMME 1. Soient  $a$  un point de  $V$ ,  $W$  un voisinage  $\Gamma$ -convexe de  $a$ , relativement compact dans le domaine d'une carte locale et tel que  $W \times W \times [0,1]$  soit relativement compact dans  $\text{Dom } w$ . Après identification par la carte de  $W$  à une partie de  $\mathbb{R}^d$ , il existe un réel  $c$  (dépendant de la carte) tel que, pour  $(x,y,\lambda) \in W \times W \times [0,1]$ , on ait

$$\|w(x,y,\lambda) - (1-\lambda)x - \lambda y\| \leq 2c\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2 .$$

Dans cette formule,  $w(x,y,\lambda)$  fait intervenir la connexion et non la carte,  $(1-\lambda)x + \lambda y$  la carte et non la connexion, et  $\| \cdot \|$  est la norme euclidienne calculée dans  $\mathbb{R}^d$  au moyen de la carte.

Une conséquence de ce lemme est le suivant, dont l'énoncé exact et la démonstration sont, eux aussi, condamnés à l'appendice.

LEMME 2. Avec les mêmes notations, il existe dans  $W$  un système de  $d+1$  points tel que le "simplexe" obtenu par interpolation géodésique entre ces  $d+1$  sommets soit un voisinage de  $a$ .

## FONCTIONS CONVEXES SUR LA VARIÉTÉ

La définition qui suit semble due à Greene et Wu [5] ; Darling [2] a sans doute été le premier à utiliser ces fonctions en géométrie différentielle stochastique.

DEFINITION. Une fonction réelle  $f$  sur  $V$  sera dite  $\Gamma$ -convexe si, pour toute géodésique  $g : I \longrightarrow V$ , où  $I$  est un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ , la fonction  $f \circ g$  est convexe dans  $I$ .

Lorsque  $V$  est l'espace affine  $\mathbb{R}^d$ , cette définition est identique à la définition usuelle.

PROPOSITION 1. Soit  $f$  une fonction  $\Gamma$ -convexe sur  $V$ .

a) Elle est continue, et même localement lipschitzienne dans toute carte locale.

b) Plus précisément, la lecture de  $f$  dans toute carte locale est localement différence de deux fonctions convexes.

c) Pour  $a \in V$  et  $u \in T_a(V)$ , soit  $\delta f_a(u)$  la dérivée à droite en  $0$  de la fonction convexe d'une variable  $t \mapsto f(\exp_a(tu))$ . La fonction positivement homogène  $\delta f_a$  est convexe sur l'espace vectoriel  $T_a(V)$ .

REMARQUES. Pour le b), nous montrerons un peu mieux : Lue dans une carte locale,  $f$  est localement la différence entre une fonction convexe et une fonction convexe de classe  $C^\infty$ .

La fonction  $\delta f$  définie sur la variété tangente  $T(V)$  par le c) n'est autre que la différentielle  $df$  quand la fonction  $f$  est de classe  $C^1$  ; dans ce cas,  $\delta f_a$  est non seulement convexe, mais linéaire.

Démonstration de la proposition 1. Soit  $a \in V$ . Comme les propriétés à établir sont locales, on peut se restreindre à un voisinage  $W$  de  $a$ , vérifiant les hypothèses du lemme 1, et identifié à une boule de  $\mathbb{R}^d$  au moyen d'une carte normale en  $a$  (car, dans une carte normale, les boules de rayon assez petit sont  $\Gamma$ -convexes : voir Helgason [7] page 35 ; en utilisant le lemme 1, on pourrait montrer que c'est encore vrai pour une carte quelconque). Comme nous identifions  $W$  à une boule, le point  $a$  s'appelle maintenant  $0$ .

a) Par le lemme 2, un "simplexe" figure parmi les voisinages de  $0$ .

L'inégalité

$$f(w(x,y,\lambda)) \leq \sup(f(x), f(y)) \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

entraîne que, sur ce "simplexe",

$$f \leq \sup \{f(x), x \text{ sommet du "simplexe"}\}.$$

Ainsi,  $f$  est majorée sur un voisinage de  $0$ . Dans un tel voisinage, que l'on peut choisir symétrique, on a, pour tout  $x$ ,  $w(x, -x, \frac{1}{2}) = 0$  (carte normale !), donc

$$f(x) \geq 2f(0) - f(-x) \geq 2f(0) - \sup(f)$$

et  $f$  est aussi minorée. Donc  $f$  est bornée au voisinage de  $0$ .

Nous venons de montrer l'existence d'un  $\varepsilon > 0$  tel que la boule  $\bar{B}(\varepsilon)$  de  $\mathbb{R}^d$  soit  $\Gamma$ -convexe, incluse dans  $W$ , et que  $f$  soit bornée sur cette boule. Soient  $(x_n)$  et  $(y_n)$  deux suites dans  $B(\varepsilon)$ , tendant toutes deux vers 0, et telles que  $x_n \neq y_n$ . Pour vérifier que  $f$  est lipschitzienne au voisinage de 0, il suffit de montrer que la suite  $(f(y_n) - f(x_n)) / \|y_n - x_n\|$  contient une sous-suite bornée.

La géodésique qui joint  $x_n$  à  $y_n$  peut être prolongée au delà de  $y_n$  jusqu'à rencontrer la frontière  $\partial B(\varepsilon)$  en un point  $z_n$  (ceci a lieu à condition que  $\varepsilon$  soit inférieur à l'inf des rayons de courbure des géodésiques contenues dans la boule  $B(\varepsilon)$ ; c'est possible car cet inf tend vers l'infini quand  $\varepsilon$  tend vers zéro). On a donc des  $\lambda_n \in ]0, 1[$  tels que  $y_n = w(x_n, z_n, \lambda_n)$ . Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que  $z_n$  tend vers une limite  $z \in \partial B(\varepsilon)$  et  $\lambda_n$  vers une limite  $\lambda \in [0, 1]$ . Par passage à la limite,  $0 = w(0, z, \lambda)$ , ce qui entraîne  $\lambda = 0$ . La  $\Gamma$ -convexité de  $f$  permet d'écrire

$$\frac{f(z_n) - f(y_n)}{1 - \lambda_n} \geq \frac{f(y_n) - f(x_n)}{\lambda_n} = \frac{f(y_n) - f(x_n)}{\|y_n - x_n\|} \frac{\|y_n - x_n\|}{\lambda_n}.$$

Comme  $f$  est bornée dans  $\bar{B}(\varepsilon)$  et comme  $\lambda_n$  tend vers zéro, le premier membre est borné. Par ailleurs,

$$\frac{y_n - x_n}{\lambda_n} = \frac{1}{\lambda_n} (w(x_n, z_n, \lambda_n) - w(x_n, z_n, 0)) = \frac{1}{\lambda_n} \int_0^{\lambda_n} \frac{\partial w}{\partial \lambda}(x_n, z_n, \lambda) d\lambda$$

tend, quand  $n$  tend vers l'infini, vers  $\frac{\partial w}{\partial \lambda}(0, z, 0) \neq 0$ , donc  $\lim \frac{\|y_n - x_n\|}{\lambda_n} > 0$ .

Ceci prouve que  $\frac{f(y_n) - f(x_n)}{\|y_n - x_n\|}$  reste borné (ou plutôt contient une sous-suite bornée) et l'assertion est établie.

b) La carte locale autour de  $a$  est maintenant arbitraire, et nous nous plaçons sur un voisinage de  $a$  vérifiant les hypothèses du lemme 1, et sur lequel  $f$ , lue dans la carte, est  $k$ -lipschitzienne (c'est possible grâce à ce qui précède). On a

$$\begin{aligned} & (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) - f((1-\lambda)x + \lambda y) \\ & \geq f(w(x, y, \lambda)) - f((1-\lambda)x + \lambda y) \quad (\Gamma\text{-convexité}) \\ & \geq -k \|w(x, y, \lambda) - ((1-\lambda)x + \lambda y)\| \quad (\text{condition de Lipschitz}) \\ & \geq -k 2c\lambda (1-\lambda) \|x - y\|^2 \quad (\text{lemme 1}) \\ & = -k 2c [(1-\lambda)g(x) + \lambda g(y) - g((1-\lambda)x + \lambda y)] , \end{aligned}$$

où la fonction  $g$  est définie par  $g(x) = \|x\|^2$ .

Ceci montre que, dans le voisinage  $W$ ,  $f+2ckg$  est lue dans la carte comme une fonction convexe, donc, toujours dans la carte,  $f = (f+2ckg) - 2ckg$  est différence de deux fonctions convexes.

c) Nous revenons nous placer dans une carte normale en  $a$ . Soient  $u$  et  $v$  dans  $T_a(V)$  et  $\lambda$  dans  $[0,1]$ ; posons  $r = (1-\lambda)u + \lambda v$ . Nous voulons montrer que  $(1-\lambda)\delta f(u) + \lambda\delta f(v) - \delta f(r) \geq 0$ . Le premier membre est la limite, pour  $t$  tendant vers zéro par valeurs positives, de

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t} [(1-\lambda)f(tu) + \lambda f(tv) - f(tr)] \\ &= \frac{1}{t} [(1-\lambda)f(tu) + \lambda f(tv) - f(w(tu, tv, \lambda))] \\ &+ \frac{1}{t} [f(w(tu, tv, \lambda)) - f(tr)] \end{aligned}$$

Le premier terme est non négatif, par  $\Gamma$ -convexité de  $f$ . Pour achever la démonstration, nous allons vérifier que le deuxième tend vers zéro. Pour  $t$  assez petit, en utilisant la condition de Lipschitz et le lemme 1, on obtient

$$\frac{1}{t} |f(w(tu, tv, \lambda)) - f(tr)| \leq \frac{k}{t} \|w(tu, tv, \lambda) - tr\| \leq \frac{k}{t} c \|tu - tv\|^2.$$

Ceci tend vers zéro avec  $t$ . La proposition est établie.  $\square$

Meyer nous a fait observer que le c) admet une réciproque :

**COROLLAIRE 1.** Soit  $f$  une fonction sur  $V$ . Pour que  $f$  soit  $\Gamma$ -convexe, il faut et il suffit que, pour chaque  $a \in V$ , il existe une forme linéaire  $h$  sur  $T_a(V)$ , telle que, sur un voisinage de  $a$ , l'on ait  $f - f(a) \geq h \exp_a^{-1}$ .

**Démonstration.** Condition nécessaire : Il suffit, en appliquant la proposition 1 c), de choisir  $h$  telle que  $h \leq \delta f$  et de remarquer que, par convexité, on a toujours  $f - f(a) \geq \delta f \exp_a^{-1}$ . Condition suffisante : Si  $g : I \rightarrow V$  est une géodésique,  $f \circ g$  est une fonction sur  $I$  telle que tout  $t \in I$  a un voisinage  $U$ , sur lequel est définie une fonction affine  $h$ , avec  $h(t) = f \circ g(t)$ ,  $h \leq f \circ g$  sur  $U$ . Ceci entraîne que la fonction d'une variable  $f \circ g$  est convexe, donc  $f$  est  $\Gamma$ -convexe.  $\square$

De même, le b) fournit une caractérisation des fonctions qui sont localement différences de deux fonctions  $\Gamma$ -convexes, montrant en particulier qu'elles ne dépendent pas du choix de  $\Gamma$ .

COROLLAIRE 2. Soit  $a \in V$  et soit  $f$  une fonction sur  $V$ . Les conditions suivantes sont équivalentes.

(i) Au voisinage de  $a$ ,  $f$  est différence de deux fonctions  $\Gamma$ -convexes.

(ii) Au voisinage de  $a$ , lue dans une carte locale,  $f$  est différence de deux fonctions convexes.

Démonstration. (i)  $\Rightarrow$  (ii) résulte de la proposition 1 b), où  $V$  est remplacée par un voisinage de  $a$ . Pour la réciproque, il suffit de démontrer que, si  $B$  est une boule de  $\mathbb{R}^d$  munie d'une connexion affine  $\Gamma$ , toute fonction  $f$ , convexe pour la structure affine de  $\mathbb{R}^d$ , est localement différence de deux fonctions  $\Gamma$ -convexes. Un calcul tout-à-fait semblable à la démonstration de la proposition 1 b) montre que, sur un voisinage de  $0$  et pour une constante  $C$  assez grande,  $f(x) + C\|x\|^2$  est  $\Gamma$ -convexe. Il suffit donc de vérifier que  $g(x) = \|x\|^2$  est  $\Gamma$ -convexe. Mais on sait qu'une fonction  $g$  de classe  $C^2$  est  $\Gamma$ -convexe si et seulement si la matrice symétrique  $(D_{ij} - \Gamma_{ij}^k D_k)g$  est positive en chaque point. Ici, elle vaut

$$2\delta_{ij} - 2 \sum_k \Gamma_{ij}^k(x) x^k,$$

donc elle vaut  $2\delta_{ij}$  en  $0$ , et elle est positive sur un voisinage de  $0$ .  $\square$

## FONCTIONS CONVEXES ET SEMIMARTINGALES

Dans ce paragraphe, nous démontrons les deux résultats annoncés dans l'introduction : Les fonctions  $\Gamma$ -convexes transforment les semimartingales en semimartingales et les  $\Gamma$ -martingales en sous-martingales locales.

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace probabilisé complet, muni d'une famille croissante  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  de sous-tribus de  $\mathcal{F}$  qui soit complète (chaque  $\mathcal{F}_t$  contient tous les événements négligeables de  $\mathcal{F}$ ) et continue à droite ( $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$ ). Parmi les processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  que permet d'étudier une telle structure, nous nous intéresserons aux semimartingales réelles, c'est-à-dire aux processus adaptés (chaque  $X_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable), càdlàg (pour chaque  $\omega$ ,  $t \mapsto X_t(\omega)$  est une fonction continue à droite sur  $\mathbb{R}_+$  qui a en tout  $t > 0$  une limite à gauche) qui se décomposent en somme d'une martingale locale et d'un processus à variation finie. Notons tout de suite deux propriétés de ces processus qui nous seront utiles. Si  $X$  est càdlàg et s'il

existe une suite  $(T_n)$  de temps d'arrêt tels que  $\sup_n T_n = \infty$  et que chaque processus arrêté  $X^{T_n-}$  (égal à  $X_t$  si  $t < T_n$  et à  $X_{T_n-}$  si  $t \geq T_n$ , avec la convention  $X_{0-} = 0$ ) soit une semimartingale, alors  $X$  est aussi une semimartingale. L'autre propriété est la stabilité par les fonctions : Si  $f$  est une fonction convexe, ou une fonction de classe  $C^2$ , et si  $X$  est une semimartingale, alors  $f \circ X$  est aussi une semimartingale. Sur ces propriétés, et plus généralement sur tout ce qui concerne les semimartingales, on peut se reporter à Jacod [8] ou à Dellacherie-Meyer [4] ; pour les notations, nous suivons Dellacherie-Meyer [3] et [4].

Si  $V$  est une variété (de classe  $C^2$  au moins ; nous la supposons toujours  $C^\infty$ ) et  $X$  un processus à valeurs dans  $V$ , on dit que  $X$  est une semimartingale à valeurs dans  $V$  si, pour toute fonction réelle  $f$  de classe  $C^2$  sur  $V$ ,  $f \circ X$  est une semimartingale réelle. Dans le cas où  $V = \mathbb{R}^d$ , il suffit pour cela que les coordonnées  $X^i$  de  $X$  soient des semimartingales réelles. Toujours quand  $V = \mathbb{R}^d$ , on sait (Meyer [10]) que si  $f$  est une fonction convexe sur  $\mathbb{R}^d$ ,  $f \circ X$  est encore une semimartingale.

Si  $f$  est une fonction réelle sur  $V$ , nous dirons que  $f$  opère sur les semimartingales si, pour toute semimartingale  $X$  à valeurs dans  $V$ ,  $f \circ X$  est une semimartingale réelle ; nous dirons que  $f$  opère localement sur les semimartingales si tout point de  $V$  a un voisinage ouvert  $W$  tel que la restriction de  $f$  à  $W$  opère sur les semimartingales à valeurs dans  $W$  (les semimartingales à valeurs dans  $W$  sont exactement les semimartingales  $X$  à valeurs dans  $V$  telles que pour tout  $t$ ,  $X_t$  soit dans  $W$  et pour tout  $t > 0$ ,  $X_{t-}$  soit dans  $W$ ).

**PROPOSITION 2.** Soit  $f$  une fonction réelle sur  $V$ , qui opère localement sur les semimartingales. Alors  $f$  opère sur les semimartingales.

**Démonstration.** Soit  $X$  une semimartingale à valeurs dans  $V$ . Tout point de  $V$  a un voisinage ouvert relativement compact  $W$ , difféomorphe à une boule de  $\mathbb{R}^d$ , et tel que  $f$  opère sur les semimartingales à valeurs dans  $W$ . Soit  $(W_n)$  un recouvrement dénombrable de  $V$  par de tels ouverts, et soit  $(h_n)$  une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement. La suite des intérieurs des compacts

$$K_n = \{x \in V : \sum_{m \leq n} h_m(x) = 1\}$$



croît vers  $V$ , donc les temps d'arrêt  $T_n = \inf\{t : X_t \notin K_n\}$  tendent vers l'infini. Le lemme ci-dessous entraîne que, pour tout  $n$ , la fonction  $f_{h_n}$  opère sur les semimartingales à valeurs dans  $V$ , donc

$$(f \circ X)^{T_n-} = \sum_{m \leq n} (f_{h_m} \circ X)^{T_n-}$$

est une semimartingale réelle. Ceci montre que  $f \circ X$  est une semimartingale.  $\square$

LEMME 3. Soit  $g$  une fonction réelle sur  $V$ , dont le support est compact et inclus dans un ouvert  $U$  difféomorphe à une boule de  $\mathbb{R}^d$ . On suppose que la fonction  $g|_U$  opère sur les semimartingales à valeurs dans  $U$ . Alors  $g$  opère sur les semimartingales à valeurs dans  $V$ .

Démonstration. Soit  $X$  une semimartingale à valeurs dans  $V$ . Soient  $K$  le support de  $g$  et  $L$  un compact tel que  $K \subset \overset{\circ}{L} \subset L \subset U$ . Posons

$$S_0 = 0 ; T_n = \inf\{t \geq S_n : X_t \notin \overset{\circ}{L}\} ; S_{n+1} = \inf\{t \geq T_n : X_t \in K\}.$$

Puisque  $X$  est continu à droite,  $X_{T_n} \notin \overset{\circ}{L}$  sur  $\{T_n < \infty\}$  et  $X_{S_{n+1}} \in K$  sur  $\{S_{n+1} < \infty\}$ . La suite  $S_0 \leq T_0 < S_1 < T_1 < S_2 < T_2 < \dots$  est strictement croissante tant qu'elle est finie, et, comme  $X$  a des limites à gauche, cette suite tend vers l'infini.

Soit  $u$  un difféomorphisme entre  $U$  et une boule de  $\mathbb{R}^d$ , et soit  $\varphi$  une fonction  $\overset{\circ}{C}^\infty$  à support compact dans  $U$  telle que  $\varphi = 1$  sur  $L$ . La fonction  $\bar{u}$  égale à 0 sur  $V-U$  et à  $\varphi u$  sur  $U$  est une fonction  $\overset{\circ}{C}^\infty$  sur  $V$ , à valeurs dans la boule  $u(U)$ , qui coïncide avec  $u$  sur le compact  $L$ . Le processus  $Y = g \circ u^{-1} \circ \bar{u} \circ X$  est une semimartingale réelle, car,  $u^{-1} \circ \bar{u}$  étant  $\overset{\circ}{C}^\infty$ ,  $u^{-1} \circ \bar{u} \circ X$  est une semimartingale à valeurs dans  $U$ .

Sur  $\llbracket T_n, S_{n+1} \rrbracket$ ,  $X \notin K$ , donc  $g \circ X = 0$ ; sur  $\llbracket S_n, T_n \rrbracket$ ,  $X \in \overset{\circ}{L}$ , donc  $g \circ X = Y$ . Ceci montre que  $g \circ X$  est une semimartingale réelle.  $\square$

THEOREME 1. Toute fonction  $\Gamma$ -convexe sur  $V$  (ou, plus généralement, toute fonction qui est localement différence de deux fonctions  $\Gamma$ -convexes) opère sur les semimartingales.

Démonstration. Par la proposition 2, il suffit de démontrer qu'une telle fonction opère localement sur les semimartingales. En se restreignant à un petit ouvert, on est ramené, par le corollaire 2 de la proposition 1, au cas où  $V$  est une boule de

$\mathbb{R}^d$  et la fonction une différence de deux fonctions convexes pour la structure affine de  $\mathbb{R}^d$ . La démonstration est alors exactement la même que dans  $\mathbb{R}^d$  tout entier (Meyer [10] page 362).

Le problème réciproque, beaucoup plus difficile, de savoir si toutes les fonctions qui opèrent sur les semimartingales sont de ce type est, à notre connaissance, encore ouvert, même dans le cas où  $V = \mathbb{R}^d$  ( $d > 1$ ).

Nous allons maintenant nous intéresser au cas où la semimartingale  $X$  à valeurs dans  $V$  est une  $\Gamma$ -martingale. Rappelons que cela signifie que  $X$  est continue, et que, dans tout ouvert  $U \subset V$  muni de coordonnées locales  $(x^i)$ , en notant  $dX^i = dM^i + dA^i$  la décomposition de la semimartingale réelle  $X^i$  ( $i$  ième coordonnée de  $X$ , semimartingale dans l'ouvert prévisible  $\{X \in U\}$ ) en une martingale locale continue et un processus à variation finie continu, on a, sur  $\{X \in U\}$ ,

$$dA_t^i = -\frac{1}{2} \Gamma_{jk}^i(X_t) d\langle M^j, M^k \rangle_t$$

(où les  $\Gamma_{jk}^i$  sont les symboles de Christoffel de la connexion dans la carte  $(x^i)$  et où la convention de sommation d'Einstein est en vigueur). Voir Bismut [1], Meyer [11] ou Darling [2]; ce dernier définit les  $\Gamma$ -martingales par leur propriété d'être transformées en sous-martingales locales par les fonctions  $\Gamma$ -convexes de classe  $C^2$ . Nous allons ici étendre cela aux fonctions  $\Gamma$ -convexes quelconques.

**THEOREME 2.** Soient  $X$  une  $\Gamma$ -martingale dans  $V$  et  $f$  une fonction  $\Gamma$ -convexe sur  $V$ . Le processus réel  $f \circ X$  est une sous-martingale locale.

Démonstration. Il suffit d'établir que tout point de  $V$  a un voisinage ouvert  $W$  tel que, pour toute  $\Gamma$ -martingale  $Y$  à valeurs dans  $W$ ,  $f \circ Y$  est une sous-martingale. En effet, on pourra alors recouvrir  $V$  par une suite  $(W_n)$  de tels ouverts, et on en déduira que le processus continu à variation finie figurant dans la décomposition de  $f \circ X$  est localement croissant dans l'ouvert  $\{X \in W_n\}$ , donc globalement croissant (pour plus de détails sur ce procédé de localisation, voir Meyer-Stricker [12] ou Zheng [11]).

Donc, quitte à remplacer  $V$  par un petit ouvert, on peut supposer que  $V$  est une boule de  $\mathbb{R}^d$ , que la fonction  $\Gamma$ -convexe  $f$  est globalement  $k$ -lipschitzienne (et donc bornée) et que tout point de  $V$  est le centre d'une carte normale globale (voir Kobayashi-Nomizu [9] page 149). Nous noterons  $e^i(a, b)$  la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée, dans la base  $(\frac{\partial}{\partial x^i})|_a$  de  $\exp_a^{-1}(b)$ , c'est-à-dire que les  $d$  fonctions  $e^i(a, \cdot)$  forment une carte normale de centre  $a$  et que la fonction  $\frac{\partial e^i}{\partial y^j}(x, y)$  vaut  $\delta_j^i$  sur la diagonale  $\{x=y\}$ . Nous désignerons par  $\Gamma_{jk}^i(a, \cdot)$  les symboles de Christoffel de la connexion dans la carte  $(e^i(a, \cdot))$ ; puisque cette carte est normale, et puisque nous avons supposé la connexion sans torsion, on a  $\Gamma_{jk}^i(x, x) = 0$ . Quitte à restreindre encore un peu l'ouvert  $V$ , nous supposons que les dérivées  $\frac{\partial e^i}{\partial y^j}(x, y)$  sont globalement bornées par une constante  $c$  et les fonctions  $\Gamma_{jk}^i(x, y)$  uniformément continues sur  $V \times V$ .

Sous ces hypothèses, soit  $X$  une  $\Gamma$ -martingale à valeurs dans  $V$ . Nous voulons montrer que  $f \circ X$  est une sous-martingale locale. Quitte à arrêter  $X$  à un temps arbitrairement grand, on peut supposer le processus croissant

$$C_t = \sum_{i,j} \int_0^t |d\langle X^i, X^j \rangle_s|$$

borné. Pour montrer que le processus borné  $f \circ X$  est une sous-martingale, nous allons

vérifier que, si  $S$  et  $T$  sont deux temps d'arrêt bornés tels que  $S \leq T$ , on a  $E[f(X_T)] \geq E[f(X_S)]$ . Pour  $\varepsilon > 0$ , définissons une suite croissante  $(R_n)$  de temps d'arrêt tels que  $S \leq R_n \leq T$  par

$$R_0 = S; \quad R_{n+1} = T \wedge \inf \{ t \geq R_n : \sup_{i,j,k} |\Gamma_{jk}^i(X_{R_n}, X_t)| \geq \varepsilon \}.$$

Puisque les fonctions  $\Gamma_{jk}^i(x, y)$  sont uniformément continues et nulles sur la diagonale, les temps  $R_n$  croissent stationnairement vers  $T$ . On peut donc écrire

$$\begin{aligned} E[f(X_T) - f(X_S)] &= \sum_n E[f(X_{R_{n+1}}) - f(X_{R_n})] \\ &\geq \sum_n E[\delta f_{X_{R_n}}(\exp_{X_{R_n}}^{-1}(X_{R_{n+1}}))] \end{aligned}$$

(car la restriction de  $f$  à une géodésique issue de  $X_{R_n}$  est convexe)

$$\begin{aligned} &= \sum_n E[E[\delta f_{X_{R_n}}(\exp_{X_{R_n}}^{-1}(X_{R_{n+1}})) | \mathcal{F}_{R_n}]] \\ &\geq \sum_n E[\delta f_{X_{R_n}}(E[\exp_{X_{R_n}}^{-1}(X_{R_{n+1}}) | \mathcal{F}_{R_n}])] \end{aligned}$$

(car  $\delta f_{X_{R_n}}$  est convexe sur l'espace tangent  $T_{X_{R_n}}(V)$ )

$$\begin{aligned}
&\geq -k \sum_n E[|E[\exp^{-1}(X_{R_{n+1}})|\mathcal{F}_{R_n}]|] \\
& \quad (\text{car } |\delta f_a(u)| \leq k \|u\|) \\
&\geq -k \sum_n E[\sum_i |E[e^i(X_{R_n}, X_{R_{n+1}})|\mathcal{F}_{R_n}]|] .
\end{aligned}$$

Il reste à évaluer  $e^i(X_{R_n}, X_{R_{n+1}})$ . Fixons  $x \in V$ . En écrivant que  $X$  est une  $\Gamma$ -martingale dans le système de coordonnées globales  $e^i(x, \cdot)$ , on obtient

$$\begin{aligned}
e^i(x, X_{R_{n+1}}) &= e^i(x, X_{R_n}) + N_{R_{n+1}}^i - N_{R_n}^i \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{R_n}^{R_{n+1}} \Gamma_{jk}^i(x, X_t) d\langle e^j(X, X), e^k(X, X) \rangle_t
\end{aligned}$$

(où  $N^i$  est une martingale locale réelle dépendant de  $x$ )

$$\begin{aligned}
&= e^i(x, X_{R_n}) + N_{R_{n+1}}^i - N_{R_n}^i \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_{R_n}^{R_{n+1}} \Gamma_{jk}^i(x, X_t) \frac{\partial e^j}{\partial y^p}(x, X_t) \frac{\partial e^k}{\partial y^q}(x, X_t) d\langle X^p, X^q \rangle_t .
\end{aligned}$$

Comme, dans cette formule, tout le reste est borné sur l'intervalle  $[R_n, R_{n+1}]$ ,

la martingale locale  $N^i$  aussi. C'est donc une vraie martingale, ce qui fournit, en conditionnant par rapport à  $\mathcal{F}_{R_n}$  et en remplaçant  $x$  par  $X_{R_n}$ , qui est  $\mathcal{F}_{R_n}$ -mesurable,

$$\begin{aligned}
&E[e^i(X_{R_n}, X_{R_{n+1}})|\mathcal{F}_{R_n}] \\
&= -\frac{1}{2} E[\int_{R_n}^{R_{n+1}} (\Gamma_{jk}^i \frac{\partial e^j}{\partial y^p} \frac{\partial e^k}{\partial y^q})(X_{R_n}, X_t) d\langle X^p, X^q \rangle_t | \mathcal{F}_{R_n}] ,
\end{aligned}$$

d'où

$$|E[e^i(X_{R_n}, X_{R_{n+1}})|\mathcal{F}_{R_n}]| \leq \frac{d^2}{2} \varepsilon c^2 E[C_{R_{n+1}} - C_{R_n} | \mathcal{F}_{R_n}]$$

et

$$E[\sum_i |E[e^i(X_{R_n}, X_{R_{n+1}})|\mathcal{F}_{R_n}]|] \leq \frac{d^3}{2} \varepsilon c^2 E[C_{R_{n+1}} - C_{R_n}] .$$

Revenant à notre estimation de  $E[f(X_T) - f(X_S)]$ , on obtient

$$E[f(X_T) - f(X_S)] \geq -k \frac{d^3}{2} \varepsilon c^2 \sum_n E[C_{R_{n+1}} - C_{R_n}] = -k \frac{d^3}{2} \varepsilon c^2 E[C_T - C_S] .$$

Comme  $\varepsilon$  est arbitraire, nous avons établi que  $E[f(X_T)] \geq E[f(X_S)]$ , et le théorème est démontré.  $\square$

On remarquera que cette démonstration du théorème 2 est indépendante du théorème 1 : Nous avons établi directement que  $f \circ X$  est une sous-martingale, sans savoir a priori que c'est une semimartingale.

Voici des applications de ce théorème. La première, qui nous a été signalée par Elworthy, est une nouvelle démonstration, probabiliste, d'un résultat de nature géométrique.

COROLLAIRE 1. Soient  $W$  une variété riemannienne,  $V$  une variété munie d'une connexion,  $h$  une application harmonique de  $W$  vers  $V$  et  $f$  une fonction  $\Gamma$ -convexe sur  $V$ . Sur  $W$ ,  $f \circ h$  est alors une fonction sous-harmonique.

Démonstration. Il suffit de vérifier que  $f \circ h$  transforme les mouvements browniens en sous-martingales locales. Soit donc  $B$  un mouvement brownien à valeurs dans  $W$ , défini sur un intervalle stochastique prévisible  $[0, \zeta[$ . Comme  $h$  est harmonique,  $h \circ B$  est une  $\Gamma$ -martingale à valeurs dans  $V$ , et  $f \circ h \circ B$  est donc une sous-martingale locale.  $\square$

Ce théorème permet aussi d'éliminer une hypothèse parasite dans un résultat de Meyer ([10] page 98).

COROLLAIRE 2. Si  $0$  est un point d'une variété de Hadamard  $V$  (variété riemannienne complète, simplement connexe, à courbure sectionnelle partout non positive), et  $X$  une  $\Gamma$ -martingale à valeurs dans  $V$ , alors  $d(X_t, 0)$  est une sous-martingale locale. En effet, la fonction  $d(\cdot, 0)$  est  $\Gamma$ -convexe.

Ceci permet d'étendre à toutes les variétés de Hadamard un résultat bien connu quand  $V = \mathbb{R}^d$ .

COROLLAIRE 3. Si  $X$  est une  $\Gamma$ -martingale dans une variété de Hadamard  $V$ , alors les événements

$$\{\omega : \{X_t(\omega), t \geq 0\} \text{ est relativement compact dans } V\}$$

et  $\{\omega : \lim_{t \rightarrow \infty} X_t(\omega) \text{ existe dans } V\}$  sont presque sûrement égaux.

En effet, pour tout  $0$  dans  $V$ , la sous-martingale locale continue  $d(X_t, 0)$  converge si et seulement si elle est bornée ; il suffit donc de choisir un nombre fini de points  $0_i$  tels que les fonctions  $d(0_i, \cdot)$  séparent les points.

Plus généralement, le théorème 2 permettrait de redémontrer un résultat de He, Yan et Zheng [6] : Sur une variété munie d'une connexion, tout point admet un

voisinage compact tel que presque toute trajectoire de  $\Gamma$ -martingale à valeurs dans ce compact converge. L'exemple ci-dessous, où  $V$  est une sphère, se généralise directement aux hypersphères de toutes dimensions.

COROLLAIRE 4. Si  $X$  est une  $\Gamma$ -martingale à valeurs dans une sphère, presque toutes les trajectoires de  $X$  relativement compactes dans un hémisphère ouvert sont convergentes.

Démonstration. Si  $O$  est un point de la sphère, la fonction  $d^2(O, \cdot)$  est  $\Gamma$ -convexe sur l'hémisphère de pôle  $O$ . Soit  $(O_n)$  une suite dense sur la sphère. Une trajectoire de  $X$  (ou tout autre ensemble) relativement compacte dans un hémisphère ouvert l'est nécessairement dans l'hémisphère ouvert de pôle  $O_n$  pour une infinité de valeurs de  $n$  — deux suffiraient — ; il ne reste qu'à utiliser la convergence des sous-martingales continues bornées  $d^2(X_t, O_n)$  correspondantes.  $\square$

On notera que les hémisphères ouverts possèdent une sorte de maximalité pour cette propriété de convergence : Dans tout hémisphère fermé, il existe une  $\Gamma$ -martingale qui ne converge pas, par exemple un mouvement brownien sur le grand cercle frontière.

## APPENDICE : LEMMES 1 ET 2.

LEMME 1. Soient  $a$  un point de  $V$ ,  $W$  un voisinage  $\Gamma$ -convexe de  $a$  relativement compact dans le domaine d'une carte locale et tel que  $W \times W \times [0,1]$  soit relativement compact dans  $\text{Dom } w$ . Il existe alors une constante  $c$  dépendant de la carte, telle que, pour  $(x,y,\lambda) \in W \times W \times [0,1]$ , on ait, après identification de  $W$  à une partie de  $\mathbb{R}^d$  au moyen de la carte,

$$\|w(x,y,\lambda) - (1-\lambda)x - \lambda y\| \leq 2c\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2.$$

Démonstration. Soit  $\bar{w}(x,z,\lambda) = w(x, x+z, \lambda) - x - \lambda z$ . Pour  $x$  fixé, soit  $g$  "la" géodésique telle que  $g(0) = x$ ,  $\dot{g}(0) = D_j$  ( $j^{\text{ième}}$  vecteur de base). Comme  $w(x, g(t), \lambda) = g(\lambda t)$ , on a, en dérivant par rapport à  $t$ ,

$$\frac{\partial w^i}{\partial y^k}(x, g(t), \lambda) \dot{g}^k(t) = \lambda \dot{g}^i(\lambda t);$$

pour  $t=0$ , on obtient, en utilisant  $\dot{g}^k(0) = \delta_j^k$ ,  $\frac{\partial w^i}{\partial y^j}(x, x, \lambda) = \lambda \delta_j^i$ , que l'on peut encore écrire  $\frac{\partial \bar{w}^i}{\partial z^j}(x, 0, \lambda) = 0$ .

En dérivant par rapport à  $\lambda$ , on obtient

$$(*) \quad \frac{\partial^2 \bar{w}^i}{\partial \lambda \partial z^j}(x, 0, \lambda) = 0.$$

Par ailleurs,  $\bar{w}^i(x, 0, \lambda) = 0$  (définitions de  $w$  et  $\bar{w}$ ), donc

$$(**) \quad \frac{\partial \bar{w}^i}{\partial \lambda}(x, 0, \lambda) = 0.$$

Les relations (\*) et (\*\*) montrent que la fonction  $z \mapsto \frac{\partial \bar{w}^i}{\partial \lambda}(x, z, \lambda)$  et ses dérivées partielles d'ordre un sont nulles pour  $z=0$ . Comme les variables  $(x, z, \lambda)$  restent dans un compact (hypothèse sur  $W$ ), on en déduit

$$\left| \frac{\partial \bar{w}^i}{\partial \lambda}(x, z, \lambda) \right| \leq c^i \|z\|^2,$$

d'où l'on tire, en remarquant que  $\bar{w}(x, z, \lambda) = 0$  pour  $\lambda=0$  ou  $\lambda=1$ ,

$$|\bar{w}^i(x, z, \lambda)| \leq c^i \inf(\lambda, 1-\lambda) \|z\|^2 \leq c^i 2\lambda(1-\lambda) \|z\|^2,$$

ce qui est le résultat annoncé.  $\square$

Définissons par récurrence des fonctions  $w_k$  ( $k \geq 1$ ) par

$$w_1(x, y, \lambda) = w(x, y, \lambda)$$

$$w_k(x_0, \dots, x_k; \lambda_1, \dots, \lambda_k) = w(w_{k-1}(x_0, \dots, x_{k-1}; \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}), x_k, \lambda_k).$$

Nous ne cherchons pas à préciser le domaine d'existence exact de  $w_k$ ; il nous suffit de savoir que cela existe quand les  $x_i$  sont assez voisins pour être tous dans un

même ouvert  $\Gamma$ -convexe et les  $\lambda_i$  entre 0 et 1.

LEMME 2. Soient  $a$  et  $W$  comme dans le lemme 1. Il existe  $x_0, \dots, x_d$  dans  $W$  tels que le "simplexe"

$$\{w_d(x_0, \dots, x_d; \lambda_1, \dots, \lambda_d) : (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in [0, 1]^d\}$$

soit un voisinage de  $a$ .

(Contrairement aux vrais simplexes, définis dans les espaces affines, cet ensemble dépend en général de l'ordre de numérotation de ses  $d+1$  sommets.)

Démonstration. Nous notons  $\omega$  l'interpolation euclidienne  $\omega(x, y, \lambda) = (1-\lambda)x + \lambda y$  et  $\omega_k$  les itérées successives de  $\omega$ , définies semblablement à  $w_k$ . Le lemme 1 implique que, dans  $W$ ,

$$\| (w - \omega)(x, y, \lambda) \| \leq c \|x - y\|^2.$$

Nous allons en déduire que, pour  $x_0, \dots, x_k$  dans  $W$ ,

$$(*) \quad \| (w_k - \omega_k)(x_0, \dots, x_k; \lambda_1, \dots, \lambda_k) \| \leq c_k \sup_{0 \leq i < j \leq k} \|x_i - x_j\|^2.$$

En effet, la décomposition

$$\begin{aligned} (w_k - \omega_k)(\dots) &= (w - \omega)(w_{k-1}(\dots), x_k, \lambda_k) \\ &\quad + \omega(w_{k-1}(\dots), x_k, \lambda_k) - \omega(\omega_{k-1}(\dots), x_k, \lambda_k) \end{aligned}$$

fournit la récurrence

$$\begin{aligned} \|w_k - \omega_k\| &\leq c \|w_{k-1} - x_k\|^2 + \|w_{k-1} - \omega_{k-1}\| \\ &\leq c (\|w_{k-1} - \omega_{k-1}\| + \|\omega_{k-1} - x_k\|)^2 + \|w_{k-1} - \omega_{k-1}\| \\ &\leq c (c_{k-1} \sup \|x_i - x_j\|^2 + \sup \|x_i - x_j\|)^2 + c_{k-1} \sup \|x_i - x_j\|^2 \\ &\leq [c(c_{k-1} \text{diamètre}(W) + 1)^2 + c_{k-1}] \sup_{i,j} \|x_i - x_j\|^2 \\ &\quad \text{car } \|x_i - x_j\| \leq \text{diamètre}(W) \end{aligned}$$

et (\*) est établie.

Le voisinage  $W$  étant toujours identifié à une boule de  $\mathbb{R}^d$  et  $a$  à son centre  $0$ , soient  $x_0, \dots, x_d \in W$  les sommets d'un simplexe affine  $S$  qui est un voisinage de  $0$  et contient donc une boule ouverte  $B(\delta)$ . Choisissons  $t \in ]0, 1[$  assez petit pour que



$$2t c_d \sup_{i,j} \|x_i - x_j\|^2 \leq \delta$$

(où  $c_d$  est la constante figurant dans la relation (\*)), et considérons le simplexe  $tS$ , de sommets  $tx_0, \dots, tx_d$ .

A chaque point  $y$  intérieur à  $tS$ , on peut faire correspondre le point  $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$  de  $]0, 1[^d$  tel que

$$y = w_d(tx_0, \dots, tx_d; \lambda_1, \dots, \lambda_d) ;$$

cette correspondance est continue. Soit

$$f(y) = w_d(tx_0, \dots, tx_d; \lambda_1, \dots, \lambda_d)$$

où les  $\lambda_i$  sont ceux définis ci-dessus. La fonction  $f$  est une application continue, définie sur l'intérieur du simplexe  $tS$ , à valeurs dans le "simplexe"

$$\Sigma_t = \{w_d(tx_0, \dots, tx_d; \lambda_1, \dots, \lambda_d) : (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in [0, 1]^d\} ,$$

et vérifiant

$$\begin{aligned} \|y - f(y)\| &\leq c_d \sup_{i,j} \|tx_i - tx_j\|^2 && \text{(relation (*))} \\ &\leq \frac{1}{2} t \delta && \text{(hypothèse sur } t \text{)} \end{aligned}$$

Comme la boule  $B(t\delta)$  est incluse dans  $tS$ , en appliquant le lemme ci-dessous avec  $\varepsilon = \frac{1}{2} t \delta$  et  $r = t\delta$ , on obtient le résultat annoncé : Le "simplexe"  $\Sigma_t$  contient la boule  $B(\frac{1}{2} t \delta)$ .  $\square$

LEMME. En notant  $B(r)$  la boule ouverte centrée à l'origine et de rayon  $r$  dans  $\mathbb{R}^d$ , soit  $f$  une fonction continue de  $B(r)$  dans  $\mathbb{R}^d$  telle que, pour tout  $x$ ,  $\|f(x) - x\| \leq r - \varepsilon < r$ . Alors  $f(B(r))$  contient  $B(\varepsilon)$ .

Démonstration. Soit  $y \in B(\varepsilon)$ . Choisissons un réel  $r'$  dans  $] \|y\| + r - \varepsilon, r[$  et une fonction continue  $\varphi$  de  $[0, r']$  dans  $[0, 1]$  qui vaille 1 sur  $[0, \|y\| + r - \varepsilon]$  et 0 en  $r'$ . Pour  $x \in \overline{B}(r')$ , posons

$$g(x) = x + \varphi(\|x\|)(f(x) - x) ,$$

de sorte que  $g$  est une fonction continue sur  $\overline{B}(r')$  qui vaut l'identité sur la frontière  $\partial B(r')$ . Il existe  $z \in B(r')$  tel que  $g(z) = y$ , car sinon, en associant à chaque  $x$  l'intersection de la demi-droite qui va de  $y$  vers  $g(x)$  avec  $\partial B(r')$ , on aurait une rétraction continue de  $\overline{B}(r')$  sur  $\partial B(r')$ . Ce  $z$  vérifie

$$\|z\| \leq \|y\| + \|z - g(z)\| \leq \|y\| + \|f(z) - z\| \leq \|y\| + r - \varepsilon ;$$

or, sur  $\overline{B}(\|y\| + r - \varepsilon)$ ,  $g = f$ , donc  $y = f(z)$ .  $\square$

## REFERENCES

- [1] J.M. BISMUT. Mécanique aléatoire. Lecture Notes in Math. 866, Springer 1981.
- [2] R.W.R. DARLING. Martingales in manifolds - Definition, examples, and behaviour under maps. Séminaire de Probabilités XVI (Supplément : Géométrie Différentielle stochastique), Lecture Notes in Math. 921, Springer 1982.
- [3] C. DELLACHERIE et P.A. MEYER. Probabilités et Potentiel. Chapitres I à IV. Hermann, Paris, 1975.
- [4] C. DELLACHERIE et P.A. MEYER. Probabilités et Potentiel. Chapitres V à VIII : Théorie des martingales. Hermann, Paris 1980.
- [5] R.E. GREENE et H. WU. On the Subharmonicity and Plurisubharmonicity of Geodesically Convex Functions. Indiana University Math. Journal 22, 641-653, 1973.
- [6] S.W. HE, J.A. YAN et W.A. ZHENG. Sur la convergence de certaines semimartingales. Séminaire de Probabilités XVII, Springer (A paraître).
- [7] S. HELGASON. Differential Geometry and Symmetric spaces. Academic Press, New-York, 1962.
- [8] J. JACOD. Calcul Stochastique et Problèmes de Martingales. Lecture Notes in Math. 714, Springer 1979.
- [9] S. KOBAYASHI and K. NOMIZU. Foundations of Differential Geometry. Volume 1. Interscience Publishers, New York 1963.
- [10] P.A. MEYER. Un cours sur les intégrales stochastiques. Séminaire de Probabilités X, Lecture Notes in Math. 511, Springer 1976.
- [11] P.A. MEYER. Géométrie stochastique sans larmes. Séminaire de Probabilités XV, Lecture Notes in Math. 850, Springer 1981.

[12] P.A. MEYER et C. STRICKER. Sur les semimartingales au sens de L. Schwartz.

Mathematical Analysis and Applications, Part B, Advances in Math. Supplementary Studies, Vol 7 B. Academic Press, New-York, 1981.

[13] W.A. ZHENG. Semi-martingales in Predictable Random Open Sets. Séminaire de

Probabilités XVI, Lecture Notes in Math 920, Springer 1982.

I.R.M.A. (Laboratoire associé au CNRS)  
Département de Mathématique  
7 rue René Descartes  
67084 STRASBOURG Cédex  
FRANCE

