

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JACQUES NEVEU

## **Sur la charge associée à une mesure aléatoire réelle stationnaire**

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 18 (1984), p. 391-401

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1984\\_\\_18\\_\\_391\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1984__18__391_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR LA CHARGE ASSOCIEE A UNE  
MESURE ALEATOIRE REELLE  
STATIONNAIRE

par

J. NEVEU (\*)

Résumé : Etant donné une mesure aléatoire réelle (de Radon) stationnaire  $N$  définie sur l'espace  $[\Omega, \mathcal{A}, P; (\theta_t, t \in \mathbb{R})]$ , la variable aléatoire positive

$$W = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} (N(\cdot - t, 0]) - t$$

représente à l'instant zéro la charge d'un serveur assurant la demande de service  $N(dt)$  au rythme  $dt$ . (A tout instant la charge du serveur est la quantité de service demandée antérieurement et non encore effectuée). Les propriétés de  $W$  sont bien connues lorsque  $N$  est un processus ponctuel discret ; nous les étendons ici dans le cas général en remarquant que dans le cas d'une mesure aléatoire de la forme  $N(dt) = \sigma \theta_t dt$  par exemple, ces propriétés prennent une forme un peu différente.

(\*) Laboratoire de PROBABILITES  
Tour 56 - 3ème étage  
4, Place Jussieu  
75230 PARIS Cédex 05

Soit  $(\theta_t, t \in \mathbb{R})$  un flot mesurable réel défini sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  qui préserve la mesure et soit ergodique. Soit  $N$  une mesure aléatoire réelle stationnaire par ce flot, c'est-à-dire une application mesurable de  $\Omega$  dans le cône des mesures de Radon positives sur  $\mathbb{R}$  qui vérifie la propriété d'équivariance  $N(\theta_t \omega) = \tau_t \circ N(\omega)$  ( $\omega \in \Omega, t \in \mathbb{R}$ ) où  $(\tau_t, t \in \mathbb{R})$  désigne le flot des translations  $(\tau_t(s) = s - t)$  sur  $\mathbb{R}$  et son extension aux mesures de Radon.

Deux cas particuliers de mesures aléatoires stationnaires sont plus intéressants du point de vue des applications :

- les mesures aléatoires ponctuelles stationnaires, d'une part,
- et
- les mesures aléatoires de la forme  $\sigma(\theta_t \omega) dt$  où  $\sigma$  est une v. a. r. positive et intégrable, d'autre part.

Notons la "décomposition de LEBESGUE" suivante, qui se démontre très simplement.

PROPOSITION 1 : Pour toute mesure aléatoire stationnaire  $N$ , il existe une v. a. r. positive  $\sigma$  unique à une équivalence près, telle que pour presque tout  $\omega$ , la mesure  $\sigma(\theta_t \omega) dt$  soit la partie absolument continue de  $N(\omega, \cdot)$  par rapport à la mesure de LEBESGUE.

Nous dirons dans la suite que  $\sigma$  est la partie absolument continue de  $N$ .

Démonstration : Soit  $\theta$  l'involution de  $\Omega \times \mathbb{R}$  définie par  $\theta[(\omega, t)] = (\theta_t \omega, -t)$ . Elle applique la mesure positive  $P(d\omega) N(\omega, dt)$  sur le produit d'une mesure positive  $\sigma$ -finie  $\hat{P}$  sur  $\Omega$  (la mesure de Palm de  $N$ ) et de la mesure de Lebesgue  $\lambda$  sur  $\mathbb{R}$ . Si  $\sigma$  désigne alors la v.a.r. positive unique à une équivalence près, telle que  $\sigma \cdot P$  soit la partie  $P$ -absolument continue de  $\hat{P}$ , la mesure produit  $\sigma(\omega) P(d\omega) \lambda(dt)$  sera aussi la partie  $P(d\omega) \lambda(dt)$ -absolument continue de  $\hat{P}(d\omega) \lambda(dt)$

sur  $\Omega \times \mathbb{R}$  ; ensuite par transposition par  $\theta$  puisque  
 $\theta[f(\omega) P(d\omega) \lambda(dt)] = f(\theta_t \omega) P(d\omega) \lambda(dt)$ , la mesure  $\sigma(\theta_t \omega)$   
 $P(d\omega) \lambda(dt)$  sera la partie  $P(d\omega) \lambda(dt)$  - absolument continue  
de  $P(d\omega) N(\omega, dt)$  ce qui équivaut à dire que pour  $P$  presque  
tout  $\omega$ ,  $\sigma(\theta_t \omega) \lambda(dt)$  est la partie absolument continue de  
 $N(\omega, dt)$  par rapport à  $\lambda(dt)$ . ■

La masse totale  $i = \hat{P}(\Omega)$  de la mesure de Palm de  $N$   
s'appelle l'intensité de  $N$  car elle vérifie l'égalité  
 $E[N(F)] = i \lambda(F)$  pour tout borélien  $F$  de  $\mathbb{R}$ .

PROPOSITION 2 : Si  $N$  est une mesure aléatoire stationnaire  
d'intensité  $i < 1$ , la v.a.r. positive

$$W = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} (N(\cdot - t, 0]) - t)$$

est p.s. finie.

La f.a.r. positive et stationnaire  $(W(t) = W \circ \theta_t, t \in \mathbb{R})$   
est cadlag, ses seules discontinuités sont les sauts éventuels  
de la mesure  $N$ , elle vérifie l'équation différentielle stochas-  
tique

$$(1) \quad dW(t) + 1_{\{W(t) > 0\}} dt + 1_{\{W(t) = 0\}} \sigma \theta_t dt = N(dt)$$

où  $\sigma$  désigne la partie absolument continue de  $N$ .

Enfin  $\sigma \leq 1$  sur  $\{W = 0\}$  et

$$(2) \quad \int_{\{W = 0\}} (1 - \sigma) dP = 1 - i,$$

de sorte que  $P(W = 0) \geq 1 - i$ , l'égalité ayant lieu si  $\sigma = 0$  p.s.

Démonstration : les v.a.r. positives

$$W_u = \sup_{0 \leq t \leq u} (N(\cdot - t, 0]) - t)$$

sont intégrables car  $W_u \leq N(\cdot - u, 0])$  et  $E[N(\cdot - u, 0)] = u \leq u$  ;  
elles croissent avec  $u$  et tendent vers  $W$  lorsque  $u \uparrow \infty$ .

De plus si  $0 \leq v \leq u$

$$W_u \theta_v = \sup_{0 \leq t \leq u} (N(\cdot - t, v]) - t)$$

par la stationnarité de  $N$  et comme

$$\sup_{v \leq t \leq u} (N(\cdot - t, v]) - t = N(\cdot - v, v]) - v + W_{u-v}$$

tandis que :

$$\sup_{0 \leq t \leq v} (N(\cdot - t, v]) - t = N(\cdot - v, v]) - v + M_v$$

à condition de poser :

$$M_v = \sup_{0 \leq s \leq v} (s - N(\cdot - s, v]) \quad (v \in \mathbb{R}_+),$$

nous pouvons écrire que :

$$W_u \theta_v = N(\cdot - v, v]) - v + \max(W_{u-v}, M_v) \quad (u, v \in \mathbb{R}_+);$$

Il est facile de vérifier que la f.a. réelle  $(M_v, v \in \mathbb{R}_+)$   
est positive, croissante et continue, et telle que  $M_v \leq v$ .

En faisant tendre  $u \uparrow \infty$  dans l'équation précédente, nous  
obtenons que la v.a.  $W = \lim_{u \uparrow \infty} W_u$  de la proposition vérifie

l'égalité

$$v + W \theta_v = N(\cdot - v, v]) + \max(W, M_v) \quad (v \in \mathbb{R}_+).$$

Cela montre d'abord que l'évènement  $\{W < \infty\}$  est invariant par  
les  $\theta_v$  ( $v \in \mathbb{R}_+$ ) et donc que sa probabilité vaut 0 ou 1  
par l'ergodicité du flot.

D'autre part, en prenant l'espérance des deux membres de l'équation en  $W_u$ , nous pouvons écrire, si  $0 \leq v \leq u$ , que

$$\begin{aligned} E[N([0, v]) - v + (M_v - W_{u-v})^+] &= E[W_u \theta_v - W_{u-v}] \\ &= E[W_u - W_{u-v}] \geq 0 \end{aligned}$$

puisque  $W_u$  est intégrable et supérieur à  $W_{u-v}$ ; en faisant tendre  $u \uparrow \infty$  il vient alors :

$$E[(M_v - W)^+] \geq (1 - i)v$$

Si  $i < 1$ , le second membre est strictement positif avec  $v$  et il est donc impossible dans ce cas que  $W$  soit p.s. infini, ce qui implique que :

$$P(W < \infty) = 1 \text{ lorsque } i < 1 \text{ d'après ce qui précède.}$$

On sait que pour une transformation  $\theta$  préservant la probabilité  $P$  et une fonction réelle p.s. finie  $f$ , la fonction  $f\theta - f$  possède une espérance nulle dès qu'elle est intégrable (que  $f$  elle-même soit intégrable ou non). Lorsque  $W$  est p.s. finie, en particulier lorsque  $i < 1$ , l'équation en  $W$  montre donc que :

$$E[(M_v - W)^+] = (1 - i)v \quad (v \in \mathbb{R}_+).$$

Montrons ensuite qu'il existe une mesure aléatoire stationnaire de la forme  $n(\theta_t \omega)dt$  avec  $0 \leq n \leq 1$  sur  $\Omega$  telle que p.s.

$$v + W\theta_v - W = N([0, v]) + \int_0^v n\theta_s ds \quad (v \in \mathbb{R}_+)$$

En effet, pour tout  $\omega$  fixé, la fonction d'intervalles

$$[u, u+v] \rightarrow v + W\theta_{u+v} - W\theta_u - N([u, u+v])$$

qui vaut encore :

$$\{v + W\theta_v - W - N([0, v])\} \circ \theta_u = (M_v - W)^+ \circ \theta_u \quad (u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}_+)$$

d'après ce qui précède, est additive, continue en  $v$ , positive et majorée par  $v$  ; elle est donc l'intégrale sur les intervalles d'une mesure positive, inférieure à la mesure de Lebesgue. Cette mesure aléatoire (elle dépend manifestement mesurablement de  $\omega$ ) est évidemment stationnaire ; puisqu'elle est majorée par la mesure de Lebesgue, sa mesure de Palm  $\hat{P}$  est majorée par  $P$ , c'est-à-dire de la forme  $\eta \cdot P$  pour une v.a.  $\eta$  à valeurs dans  $[0,1]$  ; la mesure aléatoire elle-même est alors p.s. égale à  $\eta(\theta_t \omega) dt$ .

D'après la formule que nous venons de démontrer, p.s. la f.a.  $(W(t) = W_0 \theta_t, t \in \mathbb{R})$  est cadlag et ses discontinuités sont exactement les sauts (positifs) de la mesure aléatoire  $N$  ; en particulier si  $N = \sigma \theta_t dt$ , la f.a.  $W(\cdot)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . De plus elle satisfait l'équation différentielle stochastique

$$(3) \quad dW(t) + (1 - \eta \theta_t) dt = N(dt)$$

sur  $\mathbb{R}$ . Il reste à identifier  $\eta$ . Or d'après ce qui précède et le théorème ergodique local

$$\eta = \lim_{v \downarrow 0} \text{p.s.} \quad \frac{1}{v} \int_0^v \eta \theta_s ds = \lim_{v \downarrow 0} \text{p.s.} \quad \frac{1}{v} (M_v - W)^+ ;$$

cela montre d'abord que  $\eta = 0$  sur  $\{W > 0\}$  puisque

$$\lim_{v \downarrow 0} M_v = 0.$$

Etablissons ensuite que  $\eta = \lim_{v \downarrow 0} \frac{1}{v} M_v = 1 - \sigma$  sur  $\{W = 0\}$ .

D'après le théorème classique de dérivation de Lebesgue, si  $\sigma$  désigne la v.a. associée à  $N$  par la proposition 1,

$$\lim_{v \downarrow 0} \frac{1}{v} N(\omega, ]u, u+v]) = \sigma(\theta_u \omega)$$

pour  $P(d\omega)du$  presque tout  $(\omega, u)$  ; comme  $N(\omega, ]u, u+v])$

$= N(\theta_u \omega, ]0, v])$ , si  $A$  désigne l'évènement

$$A = \{\omega : \lim_{v \downarrow 0} \frac{1}{v} N(\omega, ]0, v]) = \sigma(\omega)\}$$

Cela revient à dire que l'ensemble  $\{(\omega, u) : \theta_u \omega \notin A\}$  est  $P(d\omega)$  du négligeable et puisque  $P$  est invariante par le flot, cela montre que  $P(A^c) = 0$ . Or sur  $A$

$$\lim_{v \downarrow 0} \frac{1}{v} M_v = [1 - \sigma(\omega)]^+ \text{ par définition des } M_v. \text{ Enfin}$$

sur  $\{W = 0\}$ ,  $N([-t, 0]) \leq t$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et comme par symétrie de ce qu'on vient de démontrer

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} N([-t, 0]) = \sigma \text{ p.s.,}$$

on a donc :

$$\sigma \leq 1 \text{ p.s. sur } \{W = 0\}.$$

Cela achève de prouver que :

$$(4) \quad \eta = 1_{\{W = 0\}} (1 - \sigma) \text{ p.s.}$$

et donc que :

$$1 - \eta \theta_t = 1_{\{W \theta_t > 0\}} + 1_{\{W \theta_t = 0\}} \sigma \theta_t$$

Enfin par application du théorème de convergence dominée à l'égalité  $E[(M_v - W)^+] = v(1 - i)$ , on obtient que  $E(\eta) = 1 - i$  c'est-à-dire que :

$$\int_{\{W = 0\}} (1 - \sigma) dP = 1 - i. \quad \blacksquare$$

Après le résultat d'unicité que constitue la proposition suivante, nous montrerons que la variable aléatoire  $\eta$  de la démonstration précédente s'interprète comme étant la disponibilité du serveur à l'instant zéro.

PROPOSITION 3 : Sous les hypothèses de la proposition précédente,  
la v.a.r.  $W$  est à une équivalence près, l'unique v.a.r. positive  
telle que la f.a. stationnaire  $(W \circ \theta_t, t \in \mathbb{R})$  soit une solution  
cadlag de l'équation (1) et telle que  $\sigma \leq 1$  sur  $\{W = 0\}$ .

Démonstration : Supposons que  $W^*$  soit une seconde v.a.r. positive p.s. finie jouissant des propriétés de la proposition ; alors pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} W^* &= W^* \circ \theta_{-t} - \int_{-t}^0 (1_{\{W^* \circ \theta_s > 0\}} + 1_{\{W^* \circ \theta_s = 0\}} \sigma \circ \theta_s) ds + N([-t, 0]) - t \\ &\geq N([-t, 0]) - t \end{aligned}$$

et il en résulte que  $W^* \geq W$ . Comme la v.a.  $W$  vérifie aussi l'égalité de la première ligne, il vient par différence :

$$(W^* - W) - (W^* - W) \circ \theta_{-t} = \int_{-t}^0 (\sigma \circ \theta_s - 1) 1_{\{W \circ \theta_s = 0 < W^* \circ \theta_s\}} ds.$$

Le deuxième membre est une v.a.r. négative (car  $\sigma \leq 1$  sur  $\{W = 0\}$ ) et intégrable qui d'après la forme du premier membre, possède une espérance nulle ; les deux membres sont donc p.s. nuls. Ainsi, la v.a. positive  $W^* - W$  est p.s. invariante par le flot et donc constante p.p. Cette constante ne peut être que nulle car sinon, la v.a.  $W^*$  serait p.s. strictement positive et l'égalité ci-dessus entraînerait que :

$$\int_{-t}^0 (\sigma \circ \theta_s - 1) 1_{\{W \circ \theta_s = 0\}} ds = 0 \quad (t \in \mathbb{R}_+)$$

et donc que :

$$E[(\sigma - 1) 1_{\{W = 0\}}] = 0 ;$$

or ceci contredit la formule (2) de la proposition précédente.

Nous avons ainsi établi que :

$$W^* = W \text{ p.s. } \blacksquare$$

Considérons pour terminer, l'application  $t \rightarrow t + W(t)$  ; elle translate l'instant  $t \in \mathbb{R}$  au premier instant auquel toute la demande formulée jusqu'à  $t$  ( $t$  compris) aura pu être satisfaite. De plus, si  $N(\{t\}) \neq 0$ , la demande ponctuelle  $N(\{t\})$  sera satisfaite pendant l'intervalle de temps :

$$]t + W(t-), t + W(t)]$$

de longueur :

$$\Delta W(t) = N(\{t\}),$$

si le serveur sert les demandes dans leur ordre d'arrivée.

Ces considérations rendent plus intuitive la première partie de la proposition suivante :

PROPOSITION 4 : Sous les hypothèses de la proposition 2, si

$N = N_1 + N_2$  est la décomposition de  $N$  en mesure ponctuelle stationnaire  $N_1 = \sum_n \sigma_n \epsilon_{T_n}$  et en mesure diffuse ( $N_2(\omega, \{t\}) = 0$

sur  $\Omega \times \mathbb{R}$ ), la mesure aléatoire stationnaire  $N^* = N_1^* + N_2^*$

où  $N_1^*(dt) = (\sum_n 1]T_n + W(T_n-), T_n + W(T_n)]$   $\lambda(dt)$  et où

$N_2^*$  est l'image de  $N_2$  par  $t \rightarrow t + W \circ \theta_t$  est donnée par

$$N^*(dt) = (1 - n \theta_t) dt$$

où  $n$  est la v.a. à valeurs dans  $[0, 1]$  de la formule (4).

La mesure aléatoire  $N^*$  est donc majorée par la mesure de Lebesgue et inversement  $W$  est à une équivalence près la plus petite v.a.r. positive, telle que l'application  $t \rightarrow t + W \theta_t$  transforme  $N$  de la manière précédente en une mesure aléatoire majorée par la mesure de LEBESGUE.

Démonstration : L'intégrale de toute fonction borélienne positive  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  par la mesure aléatoire  $N^*$  est donnée par :

$$\int_{\mathbb{R}} f(s) N^*(ds) = \sum_n \int_{T_n + W(T_n -)}^{T_n + W(T_n)} f(s) ds + \int_{\mathbb{R}} f(s + W(s)) N_2(ds)$$

Or, d'après la formule (3)

$$\int f(s + W(s)) N_2(ds) = \int f(s + W(s)) d(s + W(s)) - n \theta_s ds$$

$$\{s : \Delta W(s) = 0\}$$

puisque les sauts de  $W$  coïncident avec la partie ponctuelle de  $N$  ; par conséquent, par le changement de variable  $t \rightarrow t + W(t)$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(s) N^*(ds) &= \int_{\mathbb{R}} f(u) du - \int_{\mathbb{R}} f(s + W(s)) n \theta_s ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(u) (1 - n \theta_u) du \end{aligned}$$

car  $n \theta_s = 0$  si  $W(s) > 0$ .

Enfin, si  $W^*$  est une v.a.r. positive telle que  $t + W^* \theta_t$  soit cadlag en  $t$  et transforme la mesure  $N$  en une mesure majorée par la mesure de Lebesgue, la masse  $N([-t, 0])$  est pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  appliquée sur l'intervalle  $]-t + W^* \theta_{-t}, W^*]$

et l'hypothèse de majoration de la mesure image par la mesure de Lebesgue entraîne que :

$$W^* + t - W^*_{-t} \leq N_1] - t, 0]) \quad (t \in \mathbb{R}_+).$$

La définition de  $W$  montre alors que  $W^* \geq W$ . ■

Bibliographie :

- A.A. BOROVKOV - "Random Processes in Queuing Theory"  
Springer Verlag 1976.
- J. NEVEU - "Processus ponctuels".  
Lect. Notes Math. 598, p. 249-447  
Springer Verlag 1977.

