

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

Transformations de Riesz pour les lois gaussiennes

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 18 (1984), p. 179-193

[<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1984__18__179_0>](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1984__18__179_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TRANSFORMATIONS DE RIESZ POUR LES LOIS GAUSSIENNES

par P.A. Meyer

Cet exposé est la rédaction définitive des résultats sur le processus d'Ornstein-Uhlenbeck présentés dans le Séminaire XVI ([1]). Il reprend des notes diffusées au Séminaire P. Malliavin (E.N.S., printemps 1982). Par rapport au texte du Séminaire XVI, il y a de sérieux progrès mathématiques (addition des théorèmes 2 et 3) et une présentation bien moins obscure. Par rapport à l'exposé [2], paru dans les Proceedings du Congrès de Bangalore, la nouveauté est l'équivalence dans le th. 2.

Le théorème 2 n'aurait jamais été établi sans l'insistance de P. Malliavin, que je tiens à remercier ici pour l'intérêt qu'il a porté à ces résultats.

I. INTRODUCTION ET ENONCÉ DES RESULTATS

1. LES TRANSFORMATIONS DE RIESZ CLASSIQUES

Jusqu'au n°3, notre présentation reste formelle, et il est inutile de chercher à trop en préciser les détails.

Les transformations de Riesz sur $\mathbb{R}^n$ sont les opérateurs de convolution R_k ($1 \leq k \leq n$) définis par le procédé suivant

$$f(x) \xrightarrow{\text{Fourier}} \hat{f}(u) \xrightarrow[\text{multiplicateur}]{\frac{i u_k}{|u|}} \hat{f}(u) \xrightarrow[\text{Fourier}^{-1}]{} R_k f(x)$$

Le multiplicateur étant borné, ce sont des opérateurs bornés sur L^2 .

Le théorème fondamental de la << vieille >> théorie des intégrales singulières dit que

(1) R_k est borné de L^p dans L^p pour $1 < p < \infty$.

Nous nous proposons d'abord d'exprimer cela en oubliant une grande partie de la structure. Voici un tableau d'opérateurs de convolution sur $\mathbb{R}^n$, et des multiplicateurs de Fourier correspondants

P_t	semi-groupe brownien (normalisation des analystes)	$e^{-t u ^2}$
A	son générateur (le laplacien)	$- u ^2$
Q_t	semi-groupe de Cauchy (ou noyau de Poisson du demi-espace)	$e^{-t u }$
C	générateur de Cauchy	$- u $

R	potentiel newtonien	$1/ u ^2$
V	potentiel de Cauchy	$1/ u $
D_k	k-ième dérivée partielle	$i u_k$

L'opérateur de Riesz R_k s'interprète donc comme $D_k V$. Donc on peut exprimer (1) pour tous les k à la fois en l'écrivant

$$(2) \quad \|\sqrt{\text{grad}^2 V} f\|_p \leq c_p \|f\|_p \quad 1 < p < \infty$$

ou en remplaçant f par Cf

$$(2') \quad \|\sqrt{\text{grad}^2 f}\|_p \leq c_p \|Cf\|_p \quad 1 < p < \infty .$$

2. PASSAGE AUX SEMI-GROUPES

Considérons un espace mesurable E , une mesure σ -finie ξ , un semi-groupe (P_t) de noyaux markoviens (sousmarkoviens ne suffirait pas ici) tel que $\xi P_t = \xi$; A et R s'interpréteront respectivement comme le générateur et le potentiel de (P_t) .

Il existe un procédé universel pour définir le semi-groupe de Cauchy associé à (P_t) :

$$Q_t = \int_0^\infty \mu_t(ds) P_s$$

où (μ_t) est le semi-groupe de convolution stable d'ordre $1/2$ sur $\mathbb{R}_+$, caractérisé par $\int e^{-ps} \mu_t(ds) = e^{-t\sqrt{p}}$; C et V s'interprètent alors comme le générateur et le potentiel de (P_t) .

Reste à interpréter $\text{grad}^2 f$, ou plutôt l'opérateur bilinéaire $\text{grad} f \cdot \text{grad} g$. Ce sera ici

$$\Gamma(f, g) = A(fg) - fAg - gAf ,$$

lorsqu'il existe, i.e. lorsque le domaine de A contient une algèbre suffisamment riche. Le problème général des transformations de Riesz consiste à se demander si (sur un espace assez riche)

$$(3) \quad \|\sqrt{\Gamma(f, f)}\|_p \leq c_p \|Cf\|_p , \quad 1 < p < \infty .$$

Dans presque tous les cas (une exception notable : celle du processus de la chaleur) on suppose le semi-groupe (P_t) symétrique par rapport à la mesure ξ , ce qui permet de retrouver un peu de la structure décrite au n°1. Considérons la représentation spectrale de P_t dans L^2

$$(4) \quad P_t = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dE_\lambda$$

et soit $\varphi(\lambda)$ une fonction borélienne sur $\mathbb{R}_+$. Nous dirons que l'opérateur (non borné en général)

$$(5) \quad T_\varphi = \int_0^\infty \varphi(\lambda) dE_\lambda$$

est associé au multiplicateur spectral φ . Nous pouvons faire un tableau

de multiplicateurs spectraux utiles :

$$(5) \quad \begin{array}{lll} P_t : e^{-t\lambda} & A : -\lambda & R : 1/\lambda \, I_{\{\lambda > 0\}} \\ Q_t : e^{-t\sqrt{\lambda}} & C : -\sqrt{\lambda} & V : 1/\sqrt{\lambda} \, I_{\{\lambda > 0\}} \end{array}$$

Pour ces deux derniers opérateurs, remarquer le facteur $I_{\{\lambda > 0\}}$, qui évite une divergence triviale ; CV et AR ne sont pas égaux à $-I$, mais à $E_0 - I$ (formellement).

3. LE SEMI-GROUPE D'ORNSTEIN-UHLENBECK

Soit W un espace de Fréchet séparable muni d'une mesure gaussienne ξ , qui n'est portée par aucun sous-espace fermé $\neq W$. Alors la forme bilinéaire sur le dual W' de W

$$(6) \quad q(\alpha, \beta) = \int_W \{x, \alpha\} \{x, \beta\} \xi(dx)$$

où $\{, \}$ met en dualité W et W' , fait de W' un espace préhilbertien séparé, dont le complété sera noté H . L'injection $W' \hookrightarrow H$ étant continue, on obtient par transposition une injection continue $i : H \hookrightarrow W$. Remarquer que $H \subset L^2(\xi)$ est séparable.

Le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck de la mesure ξ est un semi-groupe de vrais noyaux markoviens sur W , défini par exemple au moyen de la formule de Mehler ([1], p.96, formule (8) ; la normalisation a été changée)

$$P_t f(x) = \int f(xe^{-t} + y\sqrt{1-e^{-2t}}) \xi(dy)$$

Ce semi-groupe est symétrique par rapport à ξ . En fait, on ne se sert jamais de cette représentation, mais seulement des résultats suivants :

1) $L^2(\xi)$ est somme directe hilbertienne de sous-espaces C_n , appelés chaos de Wiener ; pour chaque $t > 0$, C_n est le sous-espace propre de P_t correspondant à la valeur propre e^{-nt} . La représentation spectrale de (P_t) est donc purement discrète, et les « multiplicateurs spectraux » sont simplement des suites $\varphi(n)$. Le chaos C_0 est constitué par les constantes, le chaos C_1 s'identifie à l'espace de Hilbert H (adhérence de W' dans L^2).

Nous désignerons par J_n le projecteur orthogonal sur C_n . Nous appellerons polynômes généralisés de degré $\leq n$ les éléments de $P_n = C_0 + \dots + C_n$, et fonctions d'ordre $\geq n$ les éléments de l'orthogonal $\Theta_n = P_n^\perp$. On construit des polynômes généralisés de la manière suivante : soit (α_n) une base orthonormale de H contenue dans W' , fixée une fois pour toutes, et soient $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_m}$ des éléments de cette base, non nécessairement distincts, et P un polynôme de degré $\leq k$ sur $\mathbb{R}^m$. Alors $P(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_m})$ est un polynôme généralisé de degré $\leq k$. Plus précisément, si les indices $i_1, \dots, i_m$ sont distincts et P est un polynôme d'Hermite de

degré k sur $\mathbb{R}^m$, $P(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_m})$ appartient au chaos C_k , et les éléments de ce type engendrent un sous-espace dense de C_k .

Les polynômes généralisés simples que nous venons de décrire seront appelés polynômes dans toute la suite - mais on notera que cette définition dépend du choix de la base (α_n) , tandis que la notion de polynôme généralisé n'en dépend pas.

Les polynômes forment une algèbre, stable par les opérateurs P_t , Q_t , $A^{(1)}C$, R , V et plus généralement par tous les T_φ ; comme elle est dense dans tous les L^p ($1 < p < \infty$) elle forme un ensemble commode de << fonctions test >> sur lequel travailler.

On désignera par $\hat{e}_n$ le projecteur $\sum_{k \geq n} J_k$ de L^2 sur $\mathcal{C}_n$.

2) Il nous faut maintenant décrire l'opérateur bilinéaire Γ associé à (P_t) . Tout d'abord, étant donné un élément α de H , la translation par $i(\alpha)eW$ transforme la mesure ξ en une mesure équivalente, et on peut donc la faire opérer sur les classes de fonctions définies p.p.. Nous désignerons par D_α l'opérateur de dérivation suivant $i(\alpha)$; en fait, nous ne ferons varier α que parmi nos vecteurs de base. Si m est un multiindice $(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k})$, nous poserons $D_m = D_{\alpha_{i_1}} \dots D_{\alpha_{i_k}}$. Il est bien clair que les dérivations D_α transforment les polynômes de degré $\leq k$ en polynômes de degré $\leq k-1$. La propriété fondamentale sera pour nous la suivante ([1], p. 113; médiocre démonstration!)

(7) Sur l'algèbre des polynômes, l'opérateur bilinéaire Γ est donné par : $\Gamma(f, g) = 2 \sum_n D_{\alpha_n} f D_{\alpha_n} g$.

Cette somme, en réalité, est finie. On a les formules importantes

$$(8) \quad D_\alpha P_t = e^{-t} P_t D_\alpha, \quad D_\alpha A = A D_\alpha - D_\alpha.$$

Nous introduirons plus généralement les gradients itérés d'ordre k

$$(9) \quad \Gamma_0(f, g) = 2fg, \quad \Gamma_1(f, g) = \Gamma(f, g), \quad \Gamma_k(f, g) = 2 \sum_{m \in \mathbb{N}^k} D_m f D_m g$$

Pour $k > 1$, ces opérateurs semblent propres au semi-groupe d'O-U, et dépourvus de signification générale en théorie des semi-groupes. Mais il est utile d'en avoir une expression indépendante du choix d'une base, que voici : de manière récurrente

$$(10) \quad \Gamma_{k+1}(f, f) = \frac{1}{2} A \Gamma_k(f, f) - \Gamma_k(f, A f) - k \Gamma_k(f, f),$$

formule que l'on obtient en sommant sur m les relations $\Gamma(D_m f, D_m f) = A(D_m f)^2 - 2 D_m f A D_m f = A(D_m f)^2 - 2 D_m f (D_m A f + k D_m f)$.

1. L'opérateur A est noté L dans la plupart des travaux sur ce sujet.

4. ENONCE DES RESULTATS

Les théorèmes suivants sont énoncés pour des polynômes. L'extension aux polynômes généralisés est à peu près triviale, après quoi il reste à faire des prolongements par complétion aux divers domaines considérés.

THEOREME 1. On a une équivalence de norme dans L^p , $1 < p < \infty$

$$(11) \quad c_p \|\sqrt{f}(f, f)\|_p \leq \|cf\|_p \leq c_p \|\sqrt{f}(f, f)\|_p$$

Autrement dit, le problème des transformations de Riesz est résolu positivement pour le semi-groupe d'O-U.

THEOREME 2. Pour $k > 1$, on a

$$(12) \quad c_p \|\sqrt{f_k}(f, f)\|_p \leq \|c^k f\|_p \leq c_p (\|\sqrt{f_k}(f, f)\|_p + \|f\|_p).$$

L'inégalité de gauche figure dans [2], l'inégalité de droite est nouvelle. L'addition du terme $\|f\|_p$ est nécessaire (si f est un polynôme de degré $\leq k-1$, on a $f_k(f, f) = 0$), mais devient inutile si l'on se restreint aux fonctions d'ordre $\geq k$.

Enfin, nous tenons à dégager un résultat d'ordre technique, évidemment peu profond, mais très utile, et qui est certainement vrai pour bien d'autres semi-groupes que le semi-groupe d'O-U (développements en harmoniques sphériques ?). Notre démonstration est probabiliste, et il doit en exister une démonstration analytique simple.¹

THEOREME 3. Soit F une fonction analytique au voisinage de 0 sur $\mathbb{R}$, et soit T_φ l'opérateur de multiplicateur spectral φ , où

$$(13) \quad \varphi(n) = F\left(\frac{1}{n}\right) \text{ pour } n \geq n_0 \text{ suffisamment grand}$$

Alors T_φ est borné de L^p dans L^p , $1 < p < \infty$.

En particulier, si $\varphi(0) = F(0)$, $\varphi(n) = F\left(\frac{1}{n}\right)$ pour $n > 0$, l'opérateur T_φ s'interprète formellement comme $F(R)$. Plus généralement, on aurait le même énoncé avec $F(1/n^\alpha)$, $\alpha > 0$.

5. LE CAS DE LA MESURE DE WIENER

Jusqu'à maintenant, nous sommes restés dans une situation très générale en apparence. Or en fait, la topologie de W n'a rien à voir avec ces énoncés, et toutes les situations décrites (en dimension infinie) sont isomorphes du point de vue de la théorie de la mesure. Il suffit donc d'établir les théorèmes pour l'une d'elles. Par ailleurs, les situations en dimension finie s'en déduiront aussi par projection. C'est pourquoi l'on va travailler sur la mesure μ du mouvement brownien issu de 0, utilisant ainsi l'arsenal du calcul stochastique.

1. Il en existe une : voir appendice.

Identifions d'abord les objets qui ont été décrits. W est ici l'espace des applications w de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, continues et nulles en 0, et l'on pose comme d'habitude $w(t) = B_t(w)$. La topologie utilisée est celle de la convergence compacte, de sorte que W' est l'espace des mesures bornées sur $\mathbb{R}_+$, ne chargeant pas 0 et à support compact. Identifiant une telle mesure η à sa fonction de répartition $\alpha(t) = \eta([t, \infty[)$ continue à droite et à support compact, W' s'interprète comme un espace de fonctions à variation bornée et à support compact, mis en dualité avec W par la formule

$$\{w, \alpha\} = - \int_0^\infty w(s) d\alpha(s) = \int_0^\infty \alpha(s) dB_s(w) \quad (\text{intégration par parties formelle})$$

et la dernière expression fait aussitôt apparaître la covariance

$$q(\alpha, \beta) = \int \alpha(s) \beta(s) ds \quad \text{donc} \quad H = L^2(\mathbb{R}_+, ds)$$

L'application $i : H \rightarrow W$ étant l'intégration. Le k -ième chaos de Wiener C_k est l'espace des intégrales stochastiques multiples d'ordre k (de processus déterministes)

$$(14) \quad \begin{aligned} f &= \int_{s_1 < s_2 < \dots < s_k} h(s_1, \dots, s_k) dB_{s_1} \dots dB_{s_k} \\ \text{avec} \quad \int_{s_1 < s_2 < \dots < s_k} h^2(s_1, \dots, s_k) ds_1 \dots ds_k &= \|f\|_2^2 < \infty. \end{aligned}$$

Il est familier aux probabilistes, dans ce contexte, que sur les chaos de Wiener toutes les normes L^p ($1 < p < \infty$) sont équivalentes, avec une majoration du type suivant, pour $p > 2$

$$(15) \quad \|f\|_p \leq c p^{k/2} \|f\|_2, \quad f \in C_k$$

D'où il résulte que les projecteurs J_k sont bornés de L^p dans L^p pour $p > 2$, puis (par passage à l'adjoint) pour $p > 2$, et de même pour $J_k = I - (J_0 + \dots + J_{k-1})$.

Mais surtout, nous disposons maintenant de la théorie de l'intégrale stochastique de processus prévisibles, et de la théorie des martingales. Tout d'abord, une v.a. $f \in H^p$, pour $p \geq 1$, admet une représentation prévisible

$$f = E[f] + \int_0^\infty u_s dB_s, \quad \left(\int_0^\infty u_s^2 ds \right)^{1/2} \in L^p$$

La norme L^p étant, pour $p > 1$, équivalente à la variante suivante de la norme H^p

$$(16) \quad \|f\|_{H^p(1)} = |E[f]| + \left\| \left(\int_0^\infty u_s^2 ds \right)^{1/2} \right\|_{L^p}$$

de plus, le semi-groupe d'O-U opère par la formule ([1], p. 102)

$$(17) \quad P_t f = E[f] + e^{-t} \int_0^\infty P_t u_s dB_s$$

D'où il résulte ([1], p. 101, lemme 1) que si $E[f] = 0$, $\|P_t f\| \leq e^{-t} \|f\|$,

et que R applique $\mathcal{O}_1 \cap L^p$ dans lui même, en diminuant la norme $H^p(1)$. La démonstration du théorème 3 va consister essentiellement à étendre cette remarque aux ordres supérieurs... Mais nous en avons terminé avec les généralités et les rappels.

II. DEMONSTRATION DES THEOREMES 1-3

1. NORMES $H^p(n)$, $p > 1$, $n > 1$.

Rien n'est plus facile que d'expliquer formellement l'idée de ce n°. Il restera ensuite à justifier les détails. Nous raisonnons pour $n=2$.

Nous partons de $f \in L^2$, écrive $E[f] + \int u_s dB_s$, et nous remarquons que $u_s \in L^2$ pour presque tout s . Donc on peut écrire

$$u_s = \int u_{rs} dB_r$$

et comme u_s est $\mathbb{F}_s$ -mesurable on peut remplacer u_{rs} par $u_{rs} I_{\{r < s\}}$. D'autre part, on a $E[u_s]^2 ds \leq E[\int u_s^2 ds] < \infty$, et l'on peut écrire

$$(18) \quad f = E[f] + \int E[u_s] dB_s + \int \left(\int_0^s u_{rs} dB_r \right) dB_s$$

sans trop nous interroger pour l'instant sur la dernière intégrale.

Le premier terme appartient à C_0 , le second à C_1 , et l'on a

$$(19) \quad P_t f = E[f] + e^{-t} \int E[u_s] dB_s + e^{-2t} \int \left(\int_0^s P_t u_{rs} dB_r \right) dB_s$$

d'où l'on déduit sans peine que le troisième terme a une norme en $\mathcal{O}(e^{-2t})$ dans L^2 , donc appartient à $\mathcal{O}_2$. Autrement dit, on est en train d'écrire explicitement les projecteurs J_0, J_1 et J_2 .

Nous introduisons alors la norme

$$(20) \quad \|f\|_{H^p(2)} = |E[f]| + (E[u_s]^2 ds)^{1/2} + \left\| \left(\int u_{rs}^2 dr ds \right)^{1/2} \right\|_{L^p}$$

Nous allons montrer qu'elle est équivalente à la norme $H^p(1)$ pour $1 < p < \infty$. Pour cela, nous considérons l'espace de Hilbert $E = L^2(\mathbb{R}_+, ds)$ et l'application $U : w \mapsto u(w)$ de W dans E ; alors le second terme dans la norme $H^p(1)$ (formule (16)) est la norme de U dans $L^p(E)$.

D'après les inégalités de Burkholder hilbertiennes, nous obtenons une norme équivalente en remplaçant ce terme par $\|[U, U]_\infty^{1/2}\|_{L^p}$, où $[U, U]$ est le processus croissant scalaire associé à la martingale hilbertienne $U_t = E[U | \mathbb{F}_t]$ (sans oublier le terme initial $U_0 = E[U] = s \mapsto E[u_s]$). Maintenant, puisque $u_s = E[u_s] + \int u_{rs} dB_r$, $U - U_0$ est une intégrale stochastique $\int H_r dB_r$, où (H_r) est le processus prévisible à valeurs dans E $H_r(w) = (s \mapsto u_{rs}(w))$, et $[U, U]_\infty = \|U_0\|^2 + \int_0^\infty \|H_r\|_E^2 dr = \int E[u_s]^2 ds + \int \left(\int u_{rs}^2 dr \right) ds$, d'où aussitôt l'équivalence cherchée.

On voit comment passe de là à l'ordre 3 : le dernier terme de (20) peut à son tour être interprété comme la norme L^p d'une v.a. U à valeurs

dans un espace de Hilbert E , qui sera cette fois $L^2(\mathbb{R}_+, drds)$, etc. Justifions plutôt le raisonnement précédent, c'est à dire

- Il existe une version du processus (u_{rs}) , mesurable du couple, nulle pour $s \geq r$, adaptée à $\mathbb{F}_{r \wedge s}$, telle que le processus croissant scalaire adapté à la martingale hilbertienne $E[U|\mathbb{F}_t]$ soit tel que

$$[U, U]_\infty = \int E[u_s]^2 ds + \iint u_{rs}^2 drds.$$

Nous allons traiter le cas où $f = e^{\int \alpha(u) dB_u - \frac{1}{2} \int \alpha(u)^2 du}$, avec $\alpha \in L^2(\mathbb{R}_+, du)$; alors $f_t = E[f|\mathbb{F}_t]$ est du même type, avec des intégrales étendues de 0 à t , et l'on a

$$f = 1 + \int_0^\infty \alpha_s f_s dB_s \quad \text{donc} \quad u_s = \alpha_s f_s, \quad E[u_s] = \alpha_s$$

$$u_{rs} = \alpha_r \alpha_s f_r I_{\{r < s\}}$$

versions explicites, ne posant aucun problème de mesurabilité. Ensuite $U = (s \mapsto \alpha(s) f_s)$, d'où aussitôt $U_t = E[U|\mathbb{F}_t] = (s \mapsto \alpha(s) f_{s \wedge t})$ et par conséquent

$$E[\|U_\infty - U_t\|_E^2 | \mathbb{F}_t] = E[\int \alpha_s^2 (f_s - f_{s \wedge t})^2 ds | \mathbb{F}_t] = E[\iint_{\{t < r < s\}} \alpha_s^2 \alpha_r^2 f_r^2 drds | \mathbb{F}_t]$$

d'où $[U, U]_t = \|U_0\|_E^2 + \iint_{r < s < t} \alpha_r^2 \alpha_s^2 f_r^2 drds$, la valeur désirée. Plus généralement, si on a deux martingales du même type (les éléments de la seconde comportant des ') on a $[U, U']_t = U_0 \cdot U'_0 + \iint_{r < s < t} \alpha_r \alpha'_r \alpha_s \alpha'_s f_r f'_r drds$.

A partir de là, sachant que l'espace vectoriel engendré par les v.a. f du type ci-dessus est dense dans tous les L^p , il n'y a pas de difficulté à faire l'extension.

2. DEMONSTRATION DU THEOREME 3

Soit ρ le rayon de convergence de la série définissant la fonction analytique F autour de 0. Nous pouvons supposer que l'entier n_0 est assez grand pour que $1/n_0 < \rho$. Nous écrivons alors

$$T_\varphi = T_\varphi(I - \mathbb{I}_{n_0}) + T_\varphi \mathbb{I}_{n_0} = T_\varphi(I - \mathbb{I}_{n_0}) + F(R) \mathbb{I}_{n_0}$$

Le premier terme correspond à une combinaison linéaire finie des J_k , et ne pose aucun problème. Pour le second, nous remplaçons la norme L^p sur $\mathcal{O}_{n_0} \cap L^p$ par la norme équivalente $H^p(n_0)$, pour laquelle la norme de R est $\leq 1/n_0 < \rho$, et l'opérateur $F(R)$ est donc bien défini et borné. En combinant ces deux résultats, on obtient le théorème 3.

Le reste de la démonstration va procéder ainsi : nous allons montrer (à l'aide du th. 3) que le théorème 1 entraîne la moitié gauche des inégalités du th.2, puis que celle-ci entraîne la moitié droite. Enfin, nous établirons en tout dernier lieu le théorème 1.

3. PASSAGE DU TH.1 AU TH.2 (MOITIE GAUCHE)

On va faire une récurrence, reposant sur l'inégalité de Khintchine hilbertienne (conséquence facile des inégalités de Burkholder hilbertiennes). Elle s'énonce ainsi : soit H un espace de Hilbert, soit $(r_m(t))$ un système de fonctions de Rademacher indexé par un ensemble dénombrable I , et soit (a_m) un système de v.a. à valeurs dans H , tel que $a_m=0$ sauf pour un nombre fini d'indices. Alors on a pour $1 \leq p < \infty$ une équivalence de normes

$$(21) \quad E[\int \|\sum_m r_m(t) a_m\|_H^p dt] \sim E[(\sum_m \|a_m\|_H^2)^{p/2}] .$$

Principe de la récurrence : H sera $\mathbb{R}^2$, I sera $\mathbb{N}^k$; pour $m \in I$ on pose $f_m = D_m f$, et $a_m = G f_m$, où G est l'opérateur qui à une fonction h associe la suite $(D_{\alpha} h)$, considérée comme v.a. à valeurs dans H . Noter que $f_m \neq 0$ pour un nombre fini d'indices m seulement, et que a_m a un nombre fini de composantes non nulles.

On pose $h_t = \sum_m r_m(t) f_m$, on écrit le théorème 1 (inégalité de transformées de Riesz)

$$\|\sqrt{\Gamma(h_t, h_t)}\|_p^p \leq c_p \|Ch_t\|_p^p$$

et on intègre en t , et en w .

Côté gauche. $\frac{1}{2} \Gamma(h_t, h_t) = \sum_n (D_{\alpha_n} h_t)^2 = \|Gh_t\|_{\mathcal{L}^2}^2 = \|\sum_m r_m(t) G f_m\|_{\mathcal{L}^2}^2 = \|\sum_m r_m(t) a_m\|_{\mathcal{L}^2}^2$. Par conséquent en intégrant

$c_p \int dt \|\sqrt{\Gamma}\|_p^p = E[\int dt \|\sum_m r_m(t) a_m\|_{\mathcal{L}^2}^p]$ qui équivaut d'après (21) à $E[(\sum_m \|G f_m\|_{\mathcal{L}^2}^2)^{p/2}] = E[(\sum_{m,n} (D_{\alpha_n} D_m f)^2)^{p/2}] = cte \|\sqrt{\Gamma_{k+1}}(f, f)\|_{L^p}^p$.

Côté droit. $E[\int dt \|Ch_t\|_p^p] = E[\int dt \|\sum_m r_m(t) G f_m\|_p^p]$ qui équivaut d'après (21), appliqué avec $H=\mathbb{R}$, à $\|(\sum_m (G f_m)^2)^{1/2}\|_p^p$; or $f_m = D_m f$; si nous avons $D_m G f$ au lieu de $G D_m f$, nous retrouverions ici $\|\sqrt{\Gamma_k}(G f, G f)\|_p^p$, et l'hypothèse de récurrence au rang k nous permettrait de remplacer cela par $\|C^k(G f)\|_p^p = \|C^{k+1} f\|_p^p$, et l'on serait bien monté au rang $k+1$. On voit donc qu'il s'agit d'évaluer un commutateur.

Nous allons prouver :

LEMME. Si m est un multiindice d'ordre k , et f est d'ordre $\geq k$, on a $CD_m f = D_m C T_k f$, où T_k est l'opérateur de multiplicateur spectral $\sqrt{1-k/n} \mathbb{I}_{\{n \geq k\}}$ (T_k commute donc à C , etc.).

Ce lemme nous permettra de conclure. Partant en effet d'un polynôme f , écrivons le $f = g + h$, avec $h = \mathbb{I}_k f$; alors les termes du développement de f suivant les chaos de Wiener sont des polynômes d'Hermite, donc h est un polynôme d'ordre $\geq k$, auquel s'applique tout ce qui précède. On a

de plus $D_m f = D_m g + D_m h$, donc (le premier terme étant une constante)
 $CD_m f = CD_m h = D_m CT_k h$ d'après le lemme, et le raisonnement précédent
 fait apparaître $C^{k+1} T_k h = T_k \frac{1}{k} C^{k+1} f$ au lieu de $C^{k+1} f$. Il ne reste
 plus qu'à appliquer le th. 3 : $T_k \frac{1}{k}$ est borné dans L^p , et on peut
 conclure.

Reste donc à prouver le lemme. Comme f est un polynôme d'ordre $\geq k$,
 f est une somme finie de polynômes appartenant aux chaos de Wiener
 C_{k+j} , et il suffit de regarder ce qui arrive lorsque feC_n , $n=k+j$. Nous
 appliquons d'abord (8)

$$P_S D_m f = e^{ks} D_m P_S f = e^{ks} e^{-(k+j)s} D_m f$$

Pour former $Q_t D_m f$, nous intégrons par rapport à $\mu_t(ds)$, et nous ob-
 tenons

$$Q_t D_m f = (\int \mu_t(ds) e^{-js ds}) D_m f = e^{-t\sqrt{j}} D_m f = e^{-t\sqrt{n-k}} D_m f$$

Dérivant en t et faisant $t=0$

$$CD_m f = -\sqrt{n-k} D_m f$$

Mais $Cf = -\sqrt{n} g$, donc on peut aussi écrire cela $D_m(\sqrt{1-k/n} Cf)$, et le
 lemme est prouvé.

4. TRANSFORMATION DES INEGALITÉS EN EQUIVALENCES

Dans ce n°, nous allons montrer comment la moitié gauche du th. 1 ou
 du th.2, i.e. $\|\sqrt{\Gamma_n(f,f)}\|_p \leq c_p \|C^n f\|_p$, permet d'établir la moitié
 droite. Plus précisément, nous allons montrer que, si f est un polynôme
d'ordre $\geq n$, on a (avec une autre constante c_p , bien sûr !)

$$(22) \quad \|C^n f\|_p \leq c_p \|\sqrt{\Gamma_n(f,f)}\|_p$$

ce qui est le résultat désiré pour le théorème 1 (car l'addition d'une
 constante à f ne change aucun des deux membres). Pour $n>1$, on écrit
 $f=g+h$, avec $h=\frac{1}{n}f$; on a $\Gamma_n(g,.)=0$ puisque toutes les dérivées
 d'ordre k de g sont nulles, donc $\Gamma_n(h,h)=\Gamma_n(f,f)$, et l'inégalité
 (22) nous permet de contrôler $\|C^n h\|_p$. Quant à $\|C^n g\|_p$, on passe de
 f à $C^n g$ par un multiplicateur n'ayant qu'un nombre fini de termes non
 nuls, donc borné dans tous les L^p , et c'est fini.

Passons à la démonstration de (22). Nous partons de la formule (10),
 que nous intégrons sur W en remarquant que $\int Af=0$ pour tout f . Il
 reste donc

$$\int \Gamma_{n+1}(f,f) = - \int \Gamma_n(f, Af) - \int \Gamma_n(f,f)$$

Un peu d'expérimentation pour les basses valeurs de n montrera que l'on
 a une formule du genre

$$(23) \quad \int \Gamma_n(f,g) = \sum_{k=0}^n a_{kn} \langle C^k f, C^k g \rangle \quad \text{avec} \quad a_{nn}=1, a_{0n}=0$$

et l'on vérifie par récurrence que

$$(24) \quad \sum_0^n a_{kn} x^k = P_n(x) = (x-n+1)(x-n+2)\dots x$$

Introduisons aussi la notation $Q_n(x)$ pour $(-1)^n P_n(-x) = x(x+1)\dots(x+n-1)$. Alors la formule précédente s'écrit (on rappelle que $C^k V^k f = (-1)^k f$)

$$(25) \quad \Gamma_n(f, g) = \langle C^n f, V^n Q_n(A)g \rangle$$

Soit h un polynôme, et soit $k = \deg h$, polynôme d'ordre $\leq n$; comme f est supposé d'ordre $\leq n$, on a $\langle C^n f, h \rangle = \langle C^n f, k \rangle$. D'autre part, on peut trouver un polynôme g d'ordre $\leq n$ tel que $V^n Q_n(A)g = k$; il est donné par le multiplicateur

$$\varphi(i) = 0, \quad i < n, \quad \varphi(i) = (-1)^n \sqrt{i^n} / i(i-1)\dots(i-n+1) \quad \text{si } i \geq n$$

Alors la formule (25) nous donne

$$\begin{aligned} |\langle C^n f, h \rangle| &= |\langle C^n f, V^n Q_n(A)g \rangle| = \int |\Gamma_n(f, g)| \leq \int \sqrt{\Gamma_n(f, f)} \sqrt{\Gamma_n(g, g)} \\ &\leq \|\sqrt{\Gamma_n(f, f)}\|_p \|\sqrt{\Gamma_n(g, g)}\|_q \quad (\text{Hölder}) \end{aligned}$$

Nous appliquons maintenant la moitié gauche du théorème 1 ou 2 pour remplacer le dernier terme par $c_q \|C^n g\|_q$, et cette fois on passe de h à $C^n g$ par le multiplicateur

$$\frac{i^n}{i(i-1)\dots(i-n+1)} I_{\{i \geq n\}} = (1 - \frac{1}{i})^{-1} \dots (1 - \frac{n-1}{i})^{-1}$$

et comme la fonction $1/(1-x)\dots(1-(n-1)x)$ est analytique au voisinage de 0, le théorème 3 s'applique pour donner

$$|\langle C^n f, h \rangle| \leq c_p \|\sqrt{\Gamma_n(f, f)}\|_p \|h\|_q$$

Faisant varier h dans la boule unité de L^q et passant au sup, on obtient l'inégalité cherchée.

5. DEMONSTRATION DU THEOREME 1

Cette partie est vraiment l'essentiel de la démonstration, mais elle ne comporte aucun progrès véritable par rapport à [1]. Nous la présentons donc rapidement (le théorème 3 permet d'améliorer un peu la pédagogie).

Nos deux outils sont des inégalités de Littlewood-Paley-Stein, valables pour des semi-groupes bien plus généraux que le semi-groupe d'O-U.

$$(26) \quad \text{Si } f \in L^2 \text{ est telle que } P_t f \rightarrow 0 \text{ pour } t \rightarrow \infty, \text{ on a pour } 1 < p < \infty$$

$$\|f\|_p \leq c_p \|G_f\|_p \quad \text{ou} \quad G_f^2 = \int_0^\infty t \left(\frac{d}{dt} Q_t f \right)^2 dt.$$

$$(27) \quad \text{On a pour } 1 < p < \infty \quad \|M_f\|_p \leq c_p \|f\|_p, \text{ avec } M_t^2 = \int_0^\infty (P_t \sqrt{\Gamma(P_t f, P_t f)})^2 dt.$$

Ces inégalités (contrairement à l'inégalité générale de Littlewood-Paley-Stein) ne sont pas profondes : elles ne font que traduire les inégalités de Burkholder pour des martingales convenables.

D'autre part, ces inégalités sont valables, non seulement pour des fonctions scalaires, mais pour des fonctions f à valeurs dans un espace de Hilbert. Nous ne nous servons que de la première dans le cas vectoriel, et il faut dans ce cas remplacer $(\frac{d}{dt}Q_t f)^2$ par $\|\frac{d}{dt}Q_t f\|^2$.

Nous voulons établir l'inégalité

$$(28) \quad \|\sqrt{\Gamma(f, f)}\|_p \leq c_p \|Cf\|_p$$

et il est facile de voir que l'on peut se borner à établir cela lorsque f est d'ordre ≥ 2 . Nous allons interpréter le côté gauche, à un facteur 2 près, comme la norme dans $L^p(\mathcal{L}^2)$ de la fonction vectorielle $h = (D_\alpha)_n$, et l'inégalité (26) nous permet alors de remplacer le côté gauche par

$$\|G_h\|_p \quad \text{avec} \quad G_h^2 = \sum_n \int t \left(\frac{d}{dt} Q_t D_\alpha f \right)^2 dt$$

Nous interprétons $\frac{d}{dt} Q_t D_\alpha f$ comme $CQ_t D_\alpha = Q_t C D_\alpha = Q_t D_\alpha C T_1$, où T_1 est l'opérateur borné construit dans le lemme du n°3. Posant $g = T_1 Cf$ (qui est encore un polynôme d'ordre ≥ 2) nous avons

$$\frac{d}{dt} Q_t D_\alpha f = Q_t D_\alpha g = \int \mu_t(ds) P_s D_\alpha g = D_\alpha \int \mu_t(ds) e^{s P_s} g$$

(cf. la démonstration du même lemme). Elevant au carré et sommant sur n , nous retrouvons à un facteur 2 près

$$(29) \quad \int t \Gamma(u_t, u_t) dt \quad \text{avec} \quad u_t = \int \mu_t(ds) e^{s P_s} g$$

(bien remarquer que cette intégrale a un sens parce que g est d'ordre au moins 2 !). Comme $\sqrt{\Gamma}$ se comporte comme une norme, on a

$$\sqrt{\Gamma(u_t, u_t)} \leq \int \mu_t(ds) e^{s \sqrt{\Gamma(P_s g, P_s g)}}$$

et par conséquent (inégalité de Schwarz) $\Gamma(u_t, u_t) \leq \int \mu_t(ds) e^{2s \Gamma(P_s g, P_s g)}$. Portant cela dans (29) et remarquant que $\int t \mu_t(ds) dt = ds$, nous sommes ramenés à voir si pour un polynôme g d'ordre 2

$$(30) \quad \|(\int e^{2s \Gamma(P_s g, P_s g)} ds)^{1/2}\|_p \leq c_p \|g\|_p \quad ??$$

qui conclurait le théorème, puisque l'on passe de Cf à g par l'opérateur borné T_1 .

Pour obtenir cela, nous allons utiliser l'inégalité (27), que nous allons commencer par transformer. Utilisant la relation $P_t D_\alpha = e^{t D_\alpha} P_t$ et l'expression explicite de Γ , nous avons d'abord

$$P_t(\sqrt{\Gamma(h, h)}) \geq e^{t \sqrt{\Gamma(P_t h, P_t h)}}$$

donc, remplaçant h par $P_t f$ et portant dans M_f , nous obtenons que M_f majore $(\int e^{2t \Gamma(P_{2t} f, P_{2t} f)} dt)^{1/2}$, donc remplaçant $2t$ par t

$$(31) \quad \|(\int e^{t \Gamma(P_t f, P_t f)} dt)^{1/2}\|_p \leq c_p \|f\|_p$$

Cela ressemble à (30), mais il faut travailler pour améliorer l'exposant.

Ecrivons cela pour $P_u f$ au lieu de f :

$$\|(\int_0^\infty e^{s\Gamma(P_s f, P_s f)} ds)^{1/2}\|_p \leq c_p e^{u/2} \|f\|_p$$

Nous interprétons le côté gauche comme la norme dans $L^p(L^2(\mathbb{R}_+, ds))$ de la variable aléatoire

$$H_u : w \mapsto (s \mapsto I]_{u, \infty}[(s) e^{s/2 \sqrt{\Gamma(P_s f, P_s f)}} (w))$$

et par conséquent, en multipliant par $e^{u/2}$ et en intégrant

$$\|f e^{u/2 H_u} du\|_{L^p(L^2)} \leq c_p \int_0^\infty e^u \|P_u f\|_p du$$

Or $\int_0^\infty e^{u/2 H_u} du = 2(e^s - e^{s/2}) / \sqrt{\Gamma(P_s f, P_s f)}$, qui est $\geq c e^{s/2 \sqrt{\Gamma(P_s f, P_s f)}}$ pour $s \geq 1$. L'intégrale sur $[0, 1]$ étant trivialement majorable d'après (31), nous obtenons

$$(32) \quad \|(\int_0^\infty e^{2s\Gamma(P_s f, P_s f)} ds)^{1/2}\|_p \leq a_p \|f\|_p + b_p \int_0^\infty e^u \|P_u f\|_p du$$

Considérons l'opérateur $P_t \sharp_2$; sa norme dans L^2 est $\leq e^{-2t}$, et sa norme dans L^p est uniformément bornée en t . Appliquons le théorème de Riesz-Thorin : représentant l'exposant p comme $\frac{1}{p} = \frac{1-\lambda}{2} + \frac{\lambda}{p'}$, avec λ proche de 0, et interpolant, on voit que $\|P_t \sharp_2\|_p \leq A e^{-b t}$ avec b arbitrairement proche de 2, donc si f est d'ordre ≥ 2 ($\sharp_2 f = f$) on peut majorer le côté droit de (32) par $c_p \|f\|_p$, et la démonstration est terminée.

6. COMPLEMENTS

Nous ajoutons dans ce paragraphe quelques résultats techniques, qui ont été établis à l'occasion d'exposés sur le calcul de Malliavin, et qui se sont avérés fort utiles. Nous les présentons sous formes de remarques.

a) Soit $f \in L^p$, $p > 1$. Stein a remarqué (dans son livre sur la théorie de Littlewood-Paley) que le semi-groupe (P_t) - où les P_t sont considérés comme opérateurs sur L^p - est analytique dans un secteur angulaire contenant l'axe réel, et d'ouverture dépendant de p . Il en résulte que $P_t f$ appartient au domaine $\mathcal{D}_p(A^n)$ pour tout n , et d'autre part $P_t f \rightarrow f$ lorsque $t \rightarrow 0$, au sens fort.

b) Il en résulte d'abord que, pour vérifier que f appartient à un domaine $\mathcal{D}_p(A)$, $\mathcal{D}_p(C)$... il suffit de vérifier une condition de type faible : pour tout polynôme h $|\langle f, Ah \rangle|$ (ou $|\langle f, Ch \rangle|$) $\leq c \|h\|_q$. Traitons le cas de A : comme $P_t h$ est encore un polynôme, l'inégalité entraîne

$$|\langle A P_t f, h \rangle| = |\langle f, A P_t h \rangle| \leq c \|P_t h\|_q \leq c \|h\|_q$$

On en déduit que $\|A P_t f\|_p$ reste borné. Un argument simple de théorie

des martingales montre qu'alors $AP_t f$ converge dans L^p vers une fonction φ , et il est immédiat que $\varphi = Af$. L'argument s'étend à tous les A^n ou C^n .

c) Pour vérifier que $f \in L^p$ appartient à $\mathcal{D}_p(C)$, il suffit de vérifier : que les $D_{\alpha_n} f$ existent et appartiennent à L^p , et que $(\sum_n (D_{\alpha_n} f)^2)^{1/2}$ appartient à L^p [autrement dit, on n'a que du calcul différentiel élémentaire à effectuer...]. En effet, comme on l'a vu à l'instant, il suffit de vérifier que $\|CP_t f\|_p$ reste borné, ou que $\|\sqrt{\Gamma(P_t f, P_t f)}\|_p$ reste borné, ou enfin que $\|(\sum_n (D_{\alpha_n} P_t f)^2)^{1/2}\|_p$ reste borné.

Mais on a $D_{\alpha_n} P_t f = e^{-tP_t} D_{\alpha_n} f$, et (P_t) est une contraction de $L^p(\mathcal{M}^2)$, donc tout cela reste borné par $\|(\sum_n (D_{\alpha_n} f)^2)^{1/2}\|_p$. De même, la vérification d'appartenance à $\mathcal{D}_p(C^n)$ peut se faire au moyen des gradients itérés.

d) Si l'on a $1 < p, q, r < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, la forme bilinéaire Γ (convenablement prolongée) est continue de $\mathcal{D}_p(C) \times \mathcal{D}_q(C)$ dans L^r - conséquence évidente de la représentation de Γ au moyen des dérivées et de l'inégalité de Hölder - mais aussi, ce qui est plus intéressant, de $\mathcal{D}_p(A) \times \mathcal{D}_q(A)$ dans $\mathcal{D}_r(C)$.

Pour voir cela, on peut se borner à établir une inégalité du type $\|\Gamma(f, g)\|_r \leq c \|f\|_{\mathcal{D}_p(A)} \|g\|_{\mathcal{D}_q(A)}$ lorsque f et g sont des polynômes relatifs à la base (α_n) . Utilisant les inégalités de transformées de Riesz, on est ramené à évaluer $\|[\sum_n (D_{\alpha_n} \sum_m D_{\alpha_m} f D_{\alpha_m} g)^2]^{1/2}\|_r$. Dérivant le produit, utilisant l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, utilisant l'inégalité de Schwarz puis l'inégalité de Hölder on trouve un majorant

$$2(\|\sqrt{\Gamma_2(f, f)}\|_p \|\sqrt{\Gamma(g, g)}\|_q + \text{terme analogue}) .$$

On a choisi des polynômes f, g pour que toutes les sommes considérées soient en fait finies, et que l'application de l'opérateur D_{α_n} ne crée aucune difficulté. On applique enfin le th.2.

On a des résultats analogues pour les gradients itérés.

Je n'ai pas repris ici les considérations de [2] sur l'espace des << fonctions-test >>, qui joue le rôle sur W de l'espace S de Schwartz pour la définition des distributions (travaux de S. Watanabe). Cet espace peut être défini comme l'intersection des domaines de tous les opérateurs A^k dans tous les L^p , et l'on peut montrer que c'est une algèbre.

APPENDICE : DEMONSTRATION ANALYTIQUE DU THEOREME 3

La propriété cruciale dans la démonstration du théorème 3 est la suivante. Soit $\mathcal{O}'_n$ l'espace des polynômes généralisés d'ordre $\geq n$ (contenu dans tous les L^p) et soit R_n la restriction de R à l'espace invariant $\mathcal{O}'_n$. Alors la norme de l'opérateur R_n , pour la norme L^p ou une norme équivalente, est <1 pour n grand. Dans le texte, nous le montrons pour la norme équivalente $H_p(n)$. Ici nous allons le montrer - suivant une idée de Martin Silverstein - pour la norme L^p elle même, et de manière purement analytique.

Soit $A_n(p)$ la norme considérée. Comme $A_n(2)=1/n$, et comme $A_n(p)$ prend la même valeur pour deux exposants conjugués, nous pouvons supposer $p>2$. Ensuite, nous écrivons (pour $f \in \mathcal{O}'_n$, $\|f\|_p \leq 1$)

$$Rf = \int_0^{2\varepsilon} P_t f + \int_{2\varepsilon}^{\infty} P_t f$$

et la norme dans L^p du premier terme est au plus 2ε . Il nous faut évaluer le second. Pour cela, nous utilisons le théorème d'hypercontractivité de Nelson : on a $\|P_t f\|_{q_t} \leq 1$, avec $p \leq q_t \leq 1 + e^{t/2}(p-1)$. Ecrivant alors

$$\frac{1}{p} = \frac{1-s_t}{q_t} + \frac{s_t}{2} \quad \text{soit} \quad s_t = \frac{1/p - 1/q_t}{1/2 - 1/q_t}$$

on a $\|P_t f\|_p \leq \|P_t f\|_2^{s_t} \|P_t f\|_{q_t}^{1-s_t} \leq e^{-ntst}$

Une majoration grossière consiste à prendre $q_t = p + \varepsilon(p-1) \leq 1 + e^\varepsilon(p-1)$ si $t \geq 2\varepsilon$, donc $s_t \geq \varepsilon \frac{p-1}{p/2-1} = c\varepsilon$,

$$A_n(p) \leq 2\varepsilon + \int_{2\varepsilon}^{\infty} e^{-ntcs} ds \leq 2\varepsilon + \frac{1}{nc\varepsilon}, \quad \text{à minimiser en } \varepsilon,$$

qui nous donne un $A_n(p)$ en $c(p)/\sqrt{n}$, donc tendant bien vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$.

REFERENCES.

- [1]. P.A. MEYER. Note sur les processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Sémin. Prob. XVI, 1982, Lecture Notes in M. 920.
- [2]. P.A. MEYER. Quelques résultats analytiques sur le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck en dimension infinie. Proceedings ISI-IFIP Conference on Random Fields, Bangalore, 1982 (à paraître dans les Lecture Notes in M.).

Voir aussi : M. et P. KREE. Continuité de la divergence dans les espaces de Sobolev relatifs à l'espace de Wiener. C.R.A.S. t.296, 1983, p. 833. Pour la théorie L^2 : M. KREE, Bull. SMF, 105, 1977, p. 141-163.