

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

WEI-AN ZHENG

Une remarque sur une même i.s. calculée dans deux filtrations

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 18 (1984), p. 172-173

[<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1984__18__172_0>](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1984__18__172_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE REMARQUE SUR UNE MEME I.S.

CALCULEE DANS DEUX FILTRATIONS

par ZHENG Weian .

Soient, sur un espace complet (Ω, \mathcal{A}, P) , deux filtrations $\underline{F} = (\underline{F}_t)_{t \geq 0}$ et $\underline{G} = (\underline{G}_t)_{t \geq 0}$ vérifiant les conditions habituelles. Si X est une semimartingale pour chacune des deux filtrations, et si un processus borné H est prévisible pour chacune des deux filtrations, l'intégrale stochastique $H \cdot X$ est-elle la même lorsqu'on la calcule dans \underline{F} ou dans \underline{G} ? Si les filtrations sont comparables (par exemple $\underline{F}_t \subset \underline{G}_t$ pour tout t), la réponse est oui, car c'est vrai si H est \underline{F} -prévisible élémentaire, et on passe par classe monotone à H \underline{F} -prévisible borné. Mais dans le cas général, on ne peut pas approcher H par des processus élémentaires qui soient à la fois prévisibles pour \underline{F} et \underline{G} , et nous ne savons pas conclure. Voici néanmoins une réponse partielle.

THEOREME. On suppose que, pour tout t , $\sum_{s \leq t} |\Delta X_s| < \infty$ p.s. Alors

- a) $H_{\underline{F}} \cdot X - H_{\underline{G}} \cdot X$ est un processus à variation finie ;
- b) Si $H_{\underline{F}} \cdot X$ est adapté à \underline{G} et $H_{\underline{G}} \cdot X$ adapté à \underline{F} , $H_{\underline{F}} \cdot X = H_{\underline{G}} \cdot X$.

Nous noterons $\underline{I} = (\underline{I}_t)_{t \geq 0}$ la filtration intersection : $\underline{I}_t = \underline{F}_t \cap \underline{G}_t$. Le théorème de Stricker montre que X est une \underline{I} -semimartingale. Les processus à variation finie $A_t = \sum_{s \leq t} \Delta X_s$ et $B_t = \int_0^t H_s dA_s$ sont adaptés à \underline{F} et \underline{G} , donc à \underline{I} ; la décomposition $H \cdot X = H \cdot (X - A) + H \cdot A$ permet de se ramener au cas où X est continu, ce que nous supposons dans la suite.

Appelons K la projection prévisible du processus mesurable H sur la filtration \underline{I} .

LEMME. Pour tout processus A continu, à variation finie et \underline{I} -adapté, on a $H \cdot A = K \cdot A$.

En effet, l'intégrale de Stieltjes $H \cdot A$ est adaptée à \underline{F} et à \underline{G} donc à \underline{I} ; elle est donc \underline{I} -prévisible, donc égale à sa projection duale \underline{I} -prévisible, qui n'est autre que $K \cdot A$.

Démonstration du théorème (X est continue).

a) Soient $X = M + B$ et $X = N + C$ les décompositions respectives de X dans les filtrations \underline{F} et \underline{G} . On a

$$H_{\underline{F}} X - K_{\underline{F}} X = (H - K)_{\underline{F}} M + (H - K) \cdot B ;$$

en appliquant le lemme à $A = \langle M, M \rangle = [X, X]$, on obtient $(H - K) \cdot \langle M, M \rangle = 0$, d'où $(H - K)^2 \cdot \langle M, M \rangle = 0$, et $(H - K)_{\underline{F}} M = 0$. Donc $H_{\underline{F}} X - K_{\underline{F}} X$ est v.f.. Puisque

$K_{\underline{F}} X = K_{\underline{G}} X$ (on est dans le cas où les filtrations sont comparables), $H_{\underline{F}} X - K_{\underline{F}} X$ est v.f. et vaut $(H - K) \cdot B$. De même, $H_{\underline{G}} X - K_{\underline{G}} X = (H - K) \cdot C$. En définitive, $H_{\underline{F}} X - H_{\underline{G}} X$ est v.f. et vaut $(H - K) \cdot (B - C)$.

b) Si $H_{\underline{F}} X$ est \underline{G} -adapté et $H_{\underline{G}} X$ \underline{F} -adapté, le processus à variation finie

$$A = H_{\underline{F}} X - H_{\underline{G}} X = (H - K) \cdot (B - C)$$

est \underline{I} -adapté. Grâce au lemme, $(H - K) \cdot A = 0$, donc

$$A = (H - K) \cdot (B - C) = [(H - K)^{-1} I_{\{H \neq K\}}] (H - K) \cdot A = 0 ,$$

ce qui est le résultat cherché.