

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CHRISTOPHE STRICKER

Caractérisation des semimartingales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 18 (1984), p. 148-153

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1984__18__148_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CARACTERISATION DES SEMIMARTINGALES

par C. STRICKER

Dans [3] nous avons donné une démonstration élémentaire de la forme forte du théorème de Dellacherie–Mokobodzki, suivant laquelle, si X est un processus permettant une intégration stochastique, on peut transformer X par changement de loi en une semimartingale appartenant à n'importe quelle classe \mathcal{G}^P . En réalité nous avons montré que l'ensemble des intégrales stochastiques de processus prévisibles élémentaires, bornés par 1, était un sous-ensemble borné d'un certain $L^2(Q)$. Il nous restait à montrer (sans utiliser tout l'arsenal du calcul stochastique) que X se décomposait sous Q en une martingale de carré intégrable et un processus prévisible à variation de carré intégrable. Par souci de complétude nous rappelons d'abord les résultats de [3].

On considère un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$.

Pour éviter des localisations fastidieuses tous les processus considérés sont indexés par $[0, 1]$. \mathcal{L} désigne l'espace vectoriel des combinaisons linéaires d'indicatrices de rectangles de $[0, 1] \times \Omega$ de la forme $1_{]u, 1] \times A}$ avec $A \in \mathcal{F}_u$; si X est un processus adapté nous posons $X^* = \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, 1]} X_t$ et si

$H = \sum a_i 1_{]t_i, t_{i+1}]}$ avec a_i \mathcal{F}_{t_i} -mesurable, on définit l'intégrale élémentaire $H \cdot X = \sum a_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$ et $H \cdot X_t = H 1_{]0, t] \cdot X$. Dorénavant H et K désigneront des éléments de \mathcal{L} . Dans la suite toutes les espérances se rapporteront à une loi Q qui changera de place en place, tout en restant équivalente à P . Tout repose sur le résultat suivant, dû essentiellement à Nikiš'in, dont on pourra trouver une démonstration très élégante dans [4]:

THEOREME 1. Soit \mathcal{V} un sous-ensemble convexe de $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un réel $c > 0$ tel que $P[V > c] \leq \epsilon$ pour tout $V \in \mathcal{V}$, il existe une variable aléatoire bornée Z telle que $Z > 0$ p.s. et que

$$\sup_{V \in \mathcal{V}} E[ZV] < +\infty.$$

THEOREME 2. Si l'ensemble $\{H \cdot X, |H| \leq 1\}$ est borné dans L^0 , il existe une loi Q équivalente à P telle que

$$\sup_{|H| \leq 1} E^Q[H \cdot X]^2 < +\infty.$$

La démonstration de ce théorème comportera plusieurs étapes.

LEMME 1. L'ensemble $\{(H \cdot X)^*, |H| \leq 1\}$ est aussi borné dans L^0 .

Démonstration. Supposons le contraire : il existe une suite (H^n) de \mathcal{E} telle que $|H^n| \leq 1$ et que $P[(H^n \cdot X)^* > n] > \epsilon > 0$. Choisissons un ensemble dénombrable D tel que pour tout n : $(H^n \cdot X)^* = \sup_{t \in D} |H^n \cdot X|_t$ p.s. Pour tout n il existe

un temps d'arrêt T_n ne prenant qu'un nombre fini de valeurs et tel que $P[|H^n \cdot X|_{T_n} \geq n] > \epsilon$. Il suffit de prendre $T_n = \inf\{t \in \Delta, |H^n \cdot X|_t \geq n\}$ où Δ est une partie finie de D assez riche. Remarquant que $H^n \cdot X_{T_n} = H^n \cdot 1_{]0, T_n]} \cdot X$, on voit que cela contredit l'hypothèse du théorème.

LEMME 2. L'ensemble des variables aléatoires $\sum_{\sigma} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$ est borné dans L^0 lorsque σ parcourt les subdivisions finies de $[0, 1]$ et il en est de même de son enveloppe convexe.

Démonstration. Quitte à retrancher X_0 à X , on peut supposer $X_0 = 0$. Notons d'abord une conséquence évidente du lemme précédent : X^* est fini p.s. Ainsi les processus prévisibles élémentaires $H = \sum X_{u_i} 1_{]t_i, t_{i+1}]}$ avec $u_i \leq t_i$ sont majorés par X^* qui est p.s. fini. Donc la famille $(H \cdot X)$ est bornée dans L^0 ainsi que son enveloppe convexe et il en est de même de l'enveloppe convexe de la famille $\sum (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$ car $\sum_{i=0}^{n-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 = X_{t_n}^2 - 2 \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$.

LEMME 3 . Il existe une loi Q équivalente à P telle que $\sup_{|H| \leq 1} E^Q |H \cdot X| < + \infty$.

Démonstration . D'après le théorème 1 il existe une loi Q équivalente à P telle que $U = \sup_{\sigma} E [\sum (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2]$, $E [X^*]^2$ et $\sup_{|H| \leq 1} E [H \cdot X]$ soient tous finis pour la loi Q. En prenant $H = \sum 1_{C_i \times]t_i, t_{i+1}]}$ où $C_i = \{E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathfrak{F}_{t_i}] > 0\}$ (resp. $\{E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathfrak{F}_{t_i}] \leq 0\}$) on remarque que X est une quasimartingale, c'est-à-dire $\text{Var } X = \sup_{\sigma} E [\sum |E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathfrak{F}_{t_i}]|] < + \infty$. Pour toute suite de variables aléatoires a_i appartenant à \mathfrak{F}_{t_i} on note $A_{t_j} = \sum_{i=0}^{j-1} a_i E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathfrak{F}_{t_i}]$ et on pose $M_{t_j} = \sum_{i=0}^{j-1} a_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) - A_{t_j}$. On obtient aisément les inégalités suivantes si $|a_i| \leq 1$: $E [M_{t_n}^*]^2 \leq 4 U$ et $E |A_{t_n}| \leq \text{Var } X$. Il en résulte que l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{|H \cdot X|, |H| \leq 1\}$ est aussi bornée dans L^0 . Ainsi il existe une loi Q équivalente à P telle que $\sup_{|H| \leq 1} E^Q |H \cdot X| < + \infty$.

Passons maintenant à la démonstration proprement dite du théorème 2. Comme $(M_{t_j})_{j=0, \dots, n}$ est une martingale discrète, l'inégalité classique de Doob montre que $E [M_{t_n}^*]^2 \leq 16 U$. Soient H un processus prévisible élémentaire borné par 1 et Δ une partie finie de $[0, 1]$. On peut écrire $H = \sum a_i 1_{]t_i, t_{i+1}]}$ avec Δ contenu dans $\{t_0 = 0, \dots, t_n\}$. Alors $E [\sup_{t \in \Delta} |H \cdot X_t|] \leq 4 U^{\frac{1}{2}} + \text{Var } X$. D'où un résultat meilleur que celui du lemme 3 : $\sup_{|H| \leq 1} E^Q |H \cdot X|^* < + \infty$. En parti-

culier l'enveloppe convexe de $\{(H \cdot X)^*, |H| \leq 1\}$ est bornée dans L^0 . Si $H = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 1_{]t_i, t_{i+1}]}$ et si $K = \sum_{j=0}^{n-1} a_j [\sum_{i=0}^{j-1} a_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})] 1_{]t_j, t_{j+1}]}$, alors on a l'égalité évidente : $(H \cdot X)^2 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 + 2(K \cdot X)$. Comme $K^* \leq (H \cdot X)^*$ si $|a_i| \leq 1$ pour tout i, l'ensemble des $K \cdot X$ est borné dans L^0 ainsi que son enveloppe convexe d'après l'hypothèse du théorème 2. Il en est de même de l'enveloppe convexe de $\{(H \cdot X)^2, |H| \leq 1\}$. Une nouvelle application

du théorème 1 permet d'affirmer l'existence d'une loi Q équivalente à P telle que

$$\sup_{|H| \leq 1} E^Q [H \cdot X]^2 < +\infty \text{ et le théorème 2 est démontré.}$$

Nous supposons maintenant que notre espace filtré $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t), P)$ vérifie les conditions habituelles. Sous les hypothèses du théorème 2 nous venons de montrer qu'il existe une loi Q équivalente à P telle que (i)

$$\sup_{|H| \leq 1} E^Q [H \cdot X]^2 < +\infty$$

et (ii)
$$\sup_{\sigma} E^Q [\sum (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2] < +\infty.$$

Dans ces conditions on a le théorème suivant sous la loi Q :

THEOREME 3. $X = M + A$ où M est une martingale de carré intégrable et A un processus prévisible à variation de carré intégrable.

Démonstration. La condition (ii) ci-dessus entraîne que $\sup_{\sigma} E [M_1^{\sigma}]^2 < +\infty$ où

$$M_1^{\sigma} = \sum_{\sigma} X_{t_{i+1}} - X_{t_i} - E [X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathfrak{F}_{t_i}].$$

Grâce au théorème de compacité faible dans L^2 , il existe une suite (σ_n) de subdivisions que nous pouvons supposer dyadiques, de plus en plus fines, de pas tendant vers 0, telles que la suite $(M_1^{\sigma_n})$ tende faiblement dans L^2 vers une variable aléatoire M_1 .

On pose $M_t = E [M_1 | \mathfrak{F}_t]$ et on constate aisément que $M_t^{\sigma_n} = E [M_1^{\sigma_n} | \mathfrak{F}_t]$ tend faiblement dans L^2 vers $E [M_1 | \mathfrak{F}_t]$ si $t \in \cup_n \sigma_n$. On pose $A_t = X_t - M_t$ et il reste

à montrer que A_t est à variation de carré intégrable. Soit (s_k) une subdivision de $[0, 1]$ telle que pour tout k $s_k \in \cup_n \sigma_n$ et soit Y une variable aléatoire appartenant à la boule unité de L^2 . (V_k) désigne une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et $\sigma_n^k = \sigma_n \cap [s_k, s_{k+1}]$. Comme $A_{s_{k+1}} - A_{s_k}$ est égal à

la limite faible de $\sum_{\sigma_n^k} E [X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathfrak{F}_{t_i}]$ lorsque n tend vers $+\infty$, on a :

$$\begin{aligned} E [Y \sum_k V_k (A_{s_{k+1}} - A_{s_k})] &= \lim_n E [Y \sum_k V_k (\sum E [X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathfrak{F}_{t_i}])] \\ &\leq \sup_n (E [\sum_{\sigma_n} |E [X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathfrak{F}_{t_i}]|^2])^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ce sup est fini . En effet si $H^i = \text{sign}(E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathfrak{F}_{t_i}])$ et si

$$H = \sum_{\sigma} H^i 1_{]t_i, t_{i+1}]},$$

$$H \cdot X = \sum_{\sigma} H^i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i} - E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathfrak{F}_{t_i}]) + \sum_{\sigma} H^i E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathfrak{F}_{t_i}].$$

Donc :

$$\sup_n E \left[\sum_{\sigma_n} |E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathfrak{F}_{t_i}]|^2 \right] \leq \sup E [H \cdot X]^2 + 2 \sup_n E \left[\sum (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \right] < +\infty.$$

Ainsi $E \left[Y \sum_k V_k (A_{s_{k+1}} - A_{s_k}) \right]$ est majoré par une constante α indépendante de

Y , des V_k et de la subdivision (s_k) , si bien que A est à variation de carré intégrable . Il reste maintenant à montrer que A est prévisible , c'est-à-dire que pour toute martingale bornée (N_t) on a l'égalité : $E[N_1 A_1] = E \left[\int_0^1 N_{t-} dA_t \right]$.

Reprenant les subdivisions (σ_n) définies précédemment nous avons :

$$\begin{aligned} E \left[\int_0^1 N_{t-} dA_t \right] &= \lim_n E \left[\sum_{\sigma_n} N_{t_i} (A_{t_{i+1}} - A_{t_i}) \right]. \text{ Or } A_t = X_t - M_t \text{ et } (M_t) \text{ est} \\ &\text{une martingale , si bien que } E[N_{t_i} (A_{t_{i+1}} - A_{t_i})] = E[N_{t_i} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})] \\ &= E[N_1 E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathfrak{F}_{t_i}]]. \end{aligned}$$

D'où :

$$E \left[\int_0^1 N_{t-} dA_t \right] = \lim_n E \left[N_1 \sum_{\sigma_n} E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathfrak{F}_{t_i}] \right] = E[N_1 A_1].$$

Notons que ce dernier calcul est désormais classique et qu'il est dû à Rao .

REMARQUE . Une application simple du lemme de Khintchine montre que la condition (i) implique la condition (ii) du théorème 3 (voir [1]) .

REFERENCES .

- [1] BOULEAU , N. : Sur la variation quadratique de certaines mesures vectorielles . Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 61, 283-290 (1982) .
- [2] DELLACHERIE , C. et MEYER , P.A. : Probabilités et Potentiel , B , théorie des martingales . Hermann , Paris 1979 .

- [3] STRICKER , C. : Sur la caractérisation des semimartingales .
Séminaire de Probabilités XV , Lecture Notes in M. 850 , 523–525 ,
Springer 1981 .
- [4] YAN , J.A. : Caractérisation d'une classe d'ensembles convexes
de L^1 ou H^1 . Séminaire de Probabilités XIV , Lecture Notes
in M. 784 , 220–222 , Springer 1980 .

C. STRICKER
Laboratoire de Mathématiques
E.R.A. CNRS 070 654
Route de Gray
25030 BESANCON Cedex