SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN-FRANÇOIS LE GALL
MARC YOR

Sur l'équation stochastique de Tsirelson

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 17 (1983), p. 81-88
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1983__17__81_0>

SUR L'EQUATION STOCHASTIQUE DE TSIRELSON

J.F. Le Gall (*) et M. Yor (*)

1 - Introduction et énoncé des principaux résultats.

Soit C l'espace des fonctions continues $w : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, nulles en 0, et $(\mathscr{C}_t \,;\, t \in [0,1])$ la filtration canonique sur C. D'après le théorème de Girsanov, pour toute fonctionnelle $b : [0,1] \times C \longrightarrow \mathbb{R}$, bornée, $(\mathscr{C}_t)$-prévisible, il existe une unique probabilité P_b sur $(C, \mathscr{C}_1)$ telle que le processus des coordonnées, soit (X_t), soit solution de :

$$(1) \qquad dX_t = dB_t + b(t,X.)\,dt \ , \qquad X_o = 0 \ ,$$

où (B_t) désigne un $((\mathscr{C}_t),P)$ mouvement Brownien réel.

Toutefois, Tsirelson [4] a construit une fonctionnelle $b \equiv \tau$ telle que l'équation (1) ne possède pas de solution forte (i.e : telle qu'aucune solution X de (1) ne soit adaptée à la filtration de B). L'équation de Tsirelson a été étudiée notamment par Krylov (voir Lipcer - Shyriaev [2]), Beneš [1], et Stroock - Yor [3]. Rappelons que la fonctionnelle τ est définie par :

$$\tau(t,w) = \sum_{k=-\infty}^{-1} 1_{]t_k,t_{k+1}]}(t) \left[\frac{w(t_k) - w(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \right] ,$$

où $[x]$ désigne la partie fractionnaire de $x \in \mathbb{R}$, et $(t_k)_{k \in -\mathbb{N}}$ est une suite de réels décroissant strictement de 1 à 0 (dans toute la suite, la seule fonctionnelle b considérée sera τ).

Dans cette Note, nous poursuivons l'étude de l'équation de Tsirelson, en précisant les relations de dépendance qui existent entre les solutions de (1) correspondant à des mouvements Browniens B corrélés, voire identiques.

Soit donc $(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, P)$ espace de probabilité filtré, et $B = (B^1, \text{—}, B^n)$ une $(\mathscr{F}_t,P)$ martingale continue gaussienne telle que, pour tout $(i,j) \in \{1,..,n\}^2$, $\langle B^i, B^j \rangle_t = \rho_{i,j} \cdot t$, avec $\rho_{i,i} \equiv 1$ (i.e : pour tout i, B^i est un $((\mathscr{F}_t),P)$ mouvement Brownien réel).

(*) Laboratoire de Calcul des Probabilités - Tour 56 - 3ème étage
4, Place Jussieu - 75230 Paris -

Pour $\lambda = (\lambda_1, —, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $Q(\lambda) = \sum_{i,j} \rho_{i,j} \lambda_i \lambda_j$.

Soit enfin, pour $0 \le s \le t$, $\mathcal{B}_t^s = \sigma\{B_u^i ; i \in \{1, —, n\}, s \le u \le t\}$; on note simplement $\mathcal{B}_t$ pour $\mathcal{B}_t^o$.

Théorème 1 :

Notons, pour $i \in \{1, —, n\}$, X^i une solution de :

$$dX_t^i = dB_t^i + \tau(t, X_\cdot^i)\, dt \; ; \; X_o^i = 0.$$

Posons $\mathcal{X}_t = \sigma(X_u^i ; i \in \{1, \dots n\}, u \le t)$ et pour $i \in \{1, \dots n\}$, et tout $t \ge 0$: $\eta_t^i = \sum_{k=-\infty}^{-1} 1_{]t_k ; t_{k+1}]}(t) \left(\frac{X_t^i - X_{t_k}^i}{t - t_k}\right)$

Alors :

a) La loi de $([\eta_t^1], \dots, [\eta_t^n])$ ne dépend pas de $t \in]0,1]$ et est invariante par les translations $(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow (x_1 + u_1, \dots, x_n + u_n)$ pour $(u_1, \dots, u_n) \in (\mathrm{Ker}\ Q)^\perp$.

b) pour tout $t \in]0,1]$, $([\eta_t^1], \dots, [\eta_t^n])$ est indépendante de $\mathcal{B}_1$ et pour tout $s \in]0,t]$, on a :

(2) $$\mathcal{X}_t = \mathcal{B}_t \vee \sigma([\eta_s^1], \dots, [\eta_s^n]).$$

Remarques :

1) Si Q est non dégénérée (en particulier si $n = 1$), la loi de $([\eta_t^1], \dots, [\eta_t^n])$ est nécessairement la mesure de Lebesgue sur $[0,1[^n$.

2) Du théorème 1, on déduit que (1) ne possède pas de solution forte : en prenant $n = 1$, la relation (2) montre que $\mathcal{X}_t$ est strictement plus grande que $\mathcal{B}_t$. □

Dans le cas particulier où $\rho_{i,j} \equiv 1 (i,j \in \{1, \dots, n\})$, on a bien sûr : $B^1 = B^2 = \dots = B^n \equiv B$. On peut alors énoncer une sorte de réciproque au théorème 1.

Théorème 2 :

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ une variable aléatoire à valeurs dans $([0,1[)^n$, $\mathcal{F}$-mesurable, indépendante de $\mathcal{B}_1$, et de loi invariante par les translations $(x_1, \dots x_n) \longrightarrow (x_1 + u, \dots, x_n + u)$, pour tout $u \in \mathbb{R}$.

Alors, il existe une filtration $(\mathcal{G}_t)$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et des processus X^i $\mathcal{G}_t$ adaptés tels que :

- B reste un $\mathcal{G}_t$ mouvement brownien
- $X^1,\dots,X^n$ sont solutions de

  $dX_t^i = dB_t + \tau(t,X_\cdot^i)\,dt$; $X_o^i = 0$

- $\forall$ $j=1,\dots,n$: $\alpha_j = \left[\dfrac{X_{t_o}^j - X_{t_{-1}}^j}{t_o - t_{-1}}\right]$

  (avec les notations précédentes : $\alpha_j = [\eta_1^j]$).

2 - Démonstrations des théorèmes 1 et 2.

2.1) Démonstration du théorème 1.

Posons, pour tout $i\in\{1,\dots n\}$, et tout $t\in[0,1]$

$$\varepsilon_t^i = \sum_{k=-\infty}^{-1} 1_{]t_k;t_{k+1}]}(t)\left(\frac{B_t^i - B_{t_k}}{t-t_k}\right)$$

On a, pour tout $k\in -\mathbb{N}$:

$\forall\, t\in\,]t_k;t_{k+1}]$, $\eta_t^i = \varepsilon_t^i + [\eta_{t_k}^i]$.

D'où, pour tout $p=(p_1,\dots,p_n)\in\mathbb{Z}^n$,

$$\phi(t;p) \overset{\text{def}}{=} E[\exp(2i\Pi\sum_{j=1}^n p_j[\eta_t^j])]$$

$$= E[\exp(2i\Pi\sum_{j=1}^n p_j\,\eta_t^j)]$$

$$= E[\exp(2i\Pi\sum_{j=1}^n p_j(\eta_{t_{k-\ell}}^j + \varepsilon_{t_{k-\ell+1}}^j + \dots + \varepsilon_{t_k}^j + \varepsilon_t^j))]$$

(pour tout $t\in\,]t_k;t_{k+1}]$, et $\ell\in\mathbb{N}$)

$$= E[\exp(2i\Pi\sum_{j=1}^n p_j(\varepsilon_{t_{k-\ell+1}}^j + \dots + \varepsilon_{t_k}^j + \varepsilon_t^j))]\ \phi(t_{k-\ell};p)$$

$$= \exp(-2\Pi^2 Q(p)\left(\frac{1}{t-t_k} + \frac{1}{t_k-t_{k-1}} + \dots + \frac{1}{t_{k-\ell+1}-t_{k-\ell}}\right)\ \phi(t_{k-\ell};p)$$

Or, on a : $|\phi(t,p)|\le 1$, et donc :

- si $Q(p)>0$, $\phi(t;p) = 0$
- si $Q(p)=0$, $\phi(t;p) = C(p)$,

où $C(p)$ est une constante qui ne dépend que de p.

Cela démontre l'assertion a). En ce qui concerne b), on remarque que :

$Q(p) = 0$ entraîne $\sum_{j=1}^n p_j\,\varepsilon_t^j = 0$ p.s.

Ensuite, on écrit, pour tout $p \in \mathbb{Z}^n$, et $t \in]t_k, t_{k+1}]$

$$E[\exp(2i\Pi \sum_{j=1}^{n} p_j[\eta_t^j]) \mid \mathcal{B}_1]$$

$$= \lim_{\ell \to -\infty} E[\exp(2i\Pi \sum_{j=1}^{n} p_j[\eta_t^j]) \mid \mathcal{B}_1^{t_\ell}]$$

$$= \lim_{\ell \to -\infty} E[\exp(2i\Pi \sum_{j=1}^{n} p_j(\eta_{t_\ell}^j + \varepsilon_{t_{\ell+1}}^j + \ldots + \varepsilon_{t_k}^j + \varepsilon_t^j)) \mid \mathcal{B}_1^{t_\ell}]$$

$$= \lim_{\ell \to -\infty} (\exp 2i\Pi \sum_{j=1}^{n} p_j(\varepsilon_{t_{\ell+1}}^j + \ldots + \varepsilon_{t_k}^j + \varepsilon_t^j) \, \phi(t_\ell ; p)$$

$$= 0 \text{ si } Q(p) > 0;\ C(p), \text{ si } Q(p) = 0.$$

Ce qui démontre que $([\eta_t^1], \ldots, [\eta_t^n])$ est indépendant de $\mathcal{B}_1$. La relation (2) est une conséquence facile des définitions. □

2.2) <u>Démonstration du théorème 2.</u>

Remarquons tout d'abord qu'on peut définir les variables η_t^j par récurrence de façon que l'on ait :

$$[\eta_1^j] = \alpha_j \ , \text{ et}$$

pour tout k, pour tout $t \in]t_k ; t_{k+1}]$, pour tout $j \in \{1, \ldots n\}$,

$$\eta_t^j = \varepsilon_t + [\eta_{t_k}^j] \ ,$$

avec $\varepsilon_t \overset{\text{déf}}{=} \sum_{k=-\infty}^{-1} 1_{]t_k ; t_{k+1}]}(t) \left(\frac{B_t - B_{t_k}}{t - t_k}\right)$.

Ensuite, on pose, pour $t \in]0,1]$:

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{B}_t \vee \sigma([\eta_t^1], \ldots, [\eta_t^n]).$$

La famille de tribus $(\mathcal{G}_t)_{t \in]0,1]}$ forme une filtration.

Puis, on définit X^j (pour $j \in \{1, \ldots n\}$) par :

$X_o^j = 0$, et pour tout ℓ, et tout $t \in]t_\ell ; t_{\ell+1}]$:

$$X_t^j = \sum_{k \le \ell} \eta_{t_k}^j (t_k - t_{k-1}) + \eta_t^j (t - t_\ell)$$

$$= B_t + \sum_{k \le \ell} [\eta_{t_{k-1}}^j](t_k - t_{k-1}) + [\eta_{t_\ell}^j](t - t_\ell)$$

Il est immédiat que le processus X^j est $(\mathcal{G}_t)$-adapté.

De plus, on a, par construction :

$$X_t^j = B_t + \int_0^t b(s, X^j) \, ds.$$

Il reste à vérifier que B est un $(\mathcal{G}_t)$-mouvement brownien.

Or, on a, par définition des variables η^j :

pour tout k, pour tout $j=1,..,n$: $[\eta^j_{t_k}] = [\varepsilon_{t_k}] + [\eta^j_{t_{k-1}}]$.

En raisonnant par récurrence, et en utilisant le fait que la loi de $(\alpha^1,\dots,\alpha^n)$ est invariante par les translations $(x_1,..,x_n) \longrightarrow (x_1+u,\dots,x_n+u)$ pour $u \in \mathbb{R}$, on voit que :

pour tout $k \in -\mathbb{N}$,

$([\eta^1_{t_k}],\dots,[\eta^n_{t_k}])$ est indépendante de $\mathcal{B}_1$

puis, pour tout $t \in]0,1]$,

$([\eta^1_t],\dots,[\eta^n_t])$ est indépendante de $\mathcal{B}_1$.

On en déduit facilement que B est un $(\mathcal{G}_t)$-mouvement brownien. □

Remarque :

La tribu $\mathcal{G}_o \overset{\text{déf}}{=} \bigcap_{t>0} \mathcal{G}_t$ n'est en général pas triviale (sauf si $n=1$), Les variables aléatoires $[\eta^i_t]-[\eta^j_t]$ (qui ne dépendent pas de $t \in]0;1]$) étant $\mathcal{G}_o$-mesurables.

3 - Compléments

3.1) Quoique pour toute solution X de (1), et tout $t>0$, la variable $[\eta_t]$ soit indépendante de $\mathcal{B}_1$ (cf. théorème 1), on peut néanmoins représenter toute variable mesurable par rapport à X comme intégrale stochastique relativement à B. De façon précise, on a le

Théorème 3 :

Soient (B_t) un $\mathcal{F}_t$-mouvement brownien et $X^1,\dots X^n$ n solutions $\mathcal{F}_t$-adaptées de (1).

Notons $\mathcal{X}_t$ la filtration naturelle, rendue $(\mathcal{F},P)$ complète et continue à droite, de $(X^1,\dots X^n)$.

Alors, toute variable aléatoire $Z \in L^2(\Omega,\mathcal{X}_1,P)$ se représente sous la forme :

$$Z = Z_o + \int_0^1 \phi_s \, dB_s .$$

où : Z_o est $\mathcal{X}_o$ mesurable,

et ϕ_s est un processus $\mathcal{X}_s$-prévisible tel que $E[\int_0^1 \phi_s^2 \, ds] < +\infty$

Démonstration :

Notons $(\mathcal{B}_t)$ la filtration naturelle (complétée) de B, et pour $s \leq t$

$\mathcal{B}_t^s = \sigma(B_u - B_s \,/\, s \leq u \leq t)$.

D'après la relation (2), on a :
pour tout $s \in]0;1]$, $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_s \vee \mathcal{B}_1^s$.

A l'aide du théorème de représentation des martingales browniennes, un argument de classe monotone montre que, pour tout $s \in]0;1]$, toute variable aléatoire Z de $L^2(\Omega, \mathcal{X}_1, P)$ se représente sous la forme

$$Z = Z_s + \int_s^1 \phi_u \, dB_u$$

avec $Z_s \in L^2(\mathcal{X}_s, P)$, et (ϕ_u) est un processus $(\mathcal{X}_u)$-prévisible tel que $E[\int_s^1 \phi_u^2 \, du] < \infty$. On termine la démonstration en faisant décroitre s vers 0. □

Remarque :

Compte tenu de la relation (2), on a, pour tout $t > 0$:

$$\mathcal{X}_t = \mathcal{B}_t \vee \sigma([\eta_t^1], \ldots, [\eta_t^n]),$$

et il est intéressant d'expliciter la représentation des variables aléatoires $\exp(2i\Pi \sum_{j=1}^n p_j [\eta_t^j])$ pour $p = (p_1, \ldots p_n) \in \mathbb{Z}^n$.

Pour $t = 1$ par exemple, on a :

$$\exp(2i\Pi \sum_{j=1}^n p_j [\eta_1^j]) = \exp(2i\Pi (\sum_{j=1}^n p_j)\varepsilon_1) \exp(2i\Pi \sum_{j=1}^n p_j \, \eta_{t_{-1}}^j)$$

$$= \exp(2i\Pi \sum_{j=1}^n p_j \, \eta_{t_{-1}}^j) \exp(-2\Pi^2 \frac{(\Sigma p_j)^2}{t_o - t_{-1}}) \ldots$$

$$\ldots \left[1 + \int_{t_{-1}}^{t_o} 2i\Pi \left(\frac{\sum_{j=1}^n p_j}{t_o - t_{-1}}\right) \exp(2i\Pi (\sum_{j=1}^n p_j) \frac{B_u - B_{t_{-1}}}{t_o - t_{-1}}) \, dB_u \right]$$

$$= \exp\left(-2\Pi^2 \frac{(\Sigma p_j)^2}{t_o - t_{-1}}\right) \left[\exp\left(2i\Pi \sum_{j=1}^{n} p_j\, \eta^j_{t_{-1}}\right) + \right.$$

$$\left. \int_{t_{-1}}^{t_o} 2i\Pi \left(\frac{\sum_{j=1}^{n} p_j}{t_o - t_{-1}}\right) \exp\left(2i\Pi \sum_{j=1}^{n} p_j\, \eta^j_{t_{-1}}\right) \exp\left(2i\Pi \left(\sum_{j=1}^{n} p_j\right) \frac{B_u - B_{t_{-1}}}{t_o - t_{-1}}\right) dB_u \right]$$

et on continue en décomposant à son tour $\exp\left(2i\Pi \sum_{j=1}^{n} p_j\, \eta^j_{t_{-1}}\right)$

3.2) Pour terminer, nous étudions un exemple d'équation stochastique, sans terme de drift, qui possède des propriétés exactement analogues à celles de l'équation de Tsirel'son.

Considérons l'équation

(3) $\quad dX_t = a(t,X.)\, dB_t\ ;\ X_o = 0\ ,$

où la fonctionnelle $a : [0,1] \times C \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$a(t,w) = \sum_{k=-\infty}^{-1} 1_{]t_k,t_{k+1}]}(t)\ \text{sgn}\,(w(t_k) - w(t_{k-1}))\ ,$$

(t_k) désignant la suite utilisée dans la définition de τ, et la fonction $\text{sgn}(\cdot)$ valant 1, pour $x > 0$, et -1, pour $x \le 0$.

On a alors l'analogue suivant du théorème 2, dont la démonstration est laissée au lecteur.

<u>Théorème 4</u> :

Soit B un $\mathcal{F}_t$ mouvement brownien et $(\mathcal{B}_t)$ sa filtration canonique.

a) Supposons que, pour $i \in \{1,\ldots n\}$, X^i soit un processus $\mathcal{F}_t$ adapté solution de (3).

Notons pour tout $t \in]0,1]$:

$$\eta_t = \sum_{k=-\infty}^{-1} 1_{]t_k;t_{k+1}]}(t)\ \text{sgn}\,(X^i_t - X^i_{t_k})$$

Soit $\mathcal{X}_t$ la filtration canonique de $(X^1,\ldots X^n)$.

Alors : • La loi de $(\eta^1_t,\ldots\eta^n_t)$ ne dépend pas de $t \in]0,1]$ et est invariante par la symétrie $(x_1,\ldots x_n) \longrightarrow (-x_1,\ldots -x_n)$.

• pour tout $t \in]0,1]$, $(\eta^1_t,\ldots\eta^n_t)$ est indépendant de $\mathcal{B}_1$ et pour tout $s \in]0,t]$,

$$\mathcal{H}_t = \mathcal{B}_t \vee \sigma(\eta_s^1, \ldots \eta_s^n).$$

b) Inversement, soit $(\alpha^1, \ldots \alpha^n)$ une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1,1\}^n$, $\mathcal{F}$ mesurable, indépendante de $\mathcal{B}_1$, et de loi invariante par la symétrie $(x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow (-x_1, \ldots, -x_n)$.

Alors, il existe une filtration $(\mathcal{G}_t)$ sur Ω, et des processus X^i $(\mathcal{G}_t)$ adaptés tels que

- B est un $(\mathcal{G}_t)$ mouvement brownien.
- $X^1, X^2, \ldots X^n$ sont solutions de (3).
- $\forall\, j \in \{1, \ldots n\}$ $\quad \alpha^j = \mathrm{sgn}\,(X^j_{t_o} - X^j_{t_{-1}})$

(avec les notations de a) : $\alpha_j = \eta_1^j$).

REFERENCES

[1] V. Beneš : Non existence of strong non-anticipating solutions to Stochastic DEs; Implications for Functional DEs, Filtering and control. In : Stochastic Processes and their applications - Vol 5, 1977, p.243-263.

[2] R. Lipcer, A.N. Shyriaev : Statistics of Random Processes, I. General Theory. Applications of Mathematics, Vol. 5, Springer-Verlag, 1977.

[3] D.W. Stroock, M. Yor : On extremal solutions of martingale problems. Ann.Sci. ENS. 4èmé série, t. 13, 1980, p. 95-164.

[4] B. Tsirelson : An example of a stochastic differential equation having no strong solution. Teo. Verojatnost. i. Prim. Vol 20, 1975, p. 427-430.