Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Sophie Weinryb

Étude d'une équation différentielle stochastique avec temps local

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 17 (1983), p. 72-77

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1983__17__72_0>

ETUDE D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE STOCHASTIQUE

AVEC TEMPS LOCAL

par Sophie WEINRYB *

1 - Introduction

On étudie ici l'équation stochastique unidimensionnelle :

$$(1) \qquad X_t = x + B_t + \int_0^t \alpha(s)dL_s \quad ,$$

où (B_t) désigne un mouvement Brownien réel issu de 0 , (L_t) est le temps local en 0 de la semi-martingale inconnue X , et $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est une fonction déterministe.

Dans le cas où $\alpha(s) \equiv \alpha \leqslant 1/2$, l'équation (1) admet une unique solution trajectorielle, appelée "skew Brownian motion" (voir Harrison-Shepp [1], et, pour d'autres extensions, Stroock-Yor [2]). Des résultats partiels d'existence de solution ont été obtenus par Watanabe ([3], [4]). Bien que le cas où α est constante soit maintenant bien connu, il semble que l'étude de l'équation (1) présente une réelle difficulté, malgré les liens étroits qui existent entre celle-ci et le "skew Brownian motion". Indiquons également que l'équation (1) est apparue de façon naturelle au cours de l'étude d'un phénomène de diffusion à travers une paroi poreuse (voir [5]), question que nous ne détaillerons pas ici. Cette note est consacrée à la démonstration du théorème 1.

Théorème 1

Lorsque $\alpha(t) \leqslant 1/2$, *il y a unicité trajectorielle pour l'équation* (1) .

Pour la démonstration du théorème, nous utilisons une méthode due à Le Gall [6], inspiré lui-même de Perkins [7], qui consiste à prouver d'abord l'unicité en loi des solutions de (1), puis que, si X^1 et X^2 sont deux solutions de (1), $(X_t^1 \vee X_t^2 \ ; \ t \geqslant 0)$ en est également une, ce qui implique alors l'unicité trajectorielle.

2 - Démonstration du Théorème 1

2.1. Unicité en loi. Remarquons tout d'abord, en écrivant l'équation stochastique satisfaite par (X_t^2) , que $|X|$ suit la loi du module d'un mouvement Brownien issu de x (cf. Yamada-Watanabe [8]).

a) On en déduit l'unicité de la loi du processus (L_t) . En effet, si l'on note $L_t^- = \lim_{x\uparrow\uparrow 0} L_t^x$, où (L_t^x) désigne le temps local de (X_t) en x , on a, d'après Yor [9] :

$$L_t - L_t^- = 2\int_0^t \alpha(s)dL_s \ ; \ A_t = \frac{1}{2}(L_t + L_t^-) = \lim_{(\varepsilon\to 0)} \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t 1_{(0\leqslant |X_s|\leqslant\varepsilon)}ds$$

et donc, la loi de $(L_t \equiv \int_0^t \frac{dA_s}{1-\alpha(s)}\ ,\ t\geqslant 0)$ est déterminée par celle de $|X|$.

b) Montrons maintenant l'unicité, pour tout $t\geqslant 0$, de la loi de la *variable* X_t .

Notons $g_t(\lambda) = E(e^{i\lambda X_t})$ $(\lambda\in\mathbb{R}\ ;\ t\geqslant 0)$. D'après la formule d'Ito, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, $(g_t(\lambda),\ t\geqslant 0)$ est solution de l'équation différentielle du 1er ordre :

$$g_t(\lambda) = e^{i\lambda x} - \frac{\lambda^2}{2}\int_0^t g_s(\lambda)ds + i\lambda h(t)\ ,$$

où $h(t) = E[\int_0^t \alpha(s)dL_s]$ est, d'après a), une fonction uniquement déterminée.

Ainsi, pour tout $t\geqslant 0$, la loi de la variable X_t est uniquement déterminée.

c) L'argument précédent montre que, pour tout $s,t\geqslant 0$, la loi conditionnelle de la variable X_{t+s} , connaissant $\sigma\{X_u\ ,\ u\leqslant s\}$, est uniquement déterminée (la nouvelle fonction déterministe considérée est $\tilde{\alpha}(u)\equiv\alpha(u+s)$) . Ainsi, la loi des marginales de rang fini de toute solution X est uniquement déterminée.

2.2. Le supremum de deux solutions est encore une solution.

a) Si (X_t^1) et (X_t^2) sont deux solutions de (1), le processus $(X_t^1 - X_t^2)$ est à variation bornée, son temps local en 0 est donc nul, et l'on a :

$$X_t^1 \vee X_t^2 = (X_t^1 - X_t^2)^+ + X_t^2 = \int_0^t 1_{(X_s^1 > X_s^2)}d(X_s^1 - X_s^2) + X_t^2\ .$$

$$= x + B_t + \int_0^t \alpha(s)\left\{1_{(X_s^2<0)}dL_s^1 + 1_{(X_s^1\leqslant 0)}dL_s^2\right\}\ ,$$

où (L_t^i) $(i=1,2)$ désigne le temps local en 0 de (X_t^i) .

b) La démonstration sera alors terminée à l'aide du résultat général suivant.

Lemme :

Soient (X_t^i) $(i = 1,2)$ *deux semi-martingales continues telles que le temps local en* 0 *de* $X^1 - X^2$ *soit nul. Alors, si* (L_t^i) $(i = 1,2)$ *désigne le temps local de* (X_t^i) *, le temps local de* $(X_t^1 \vee X_t^2)$ *est donné par :*

$$\mathcal{L}_t^o = \int_o^t 1_{(X_s^2 < 0)} dL_s^1 + \int_o^t 1_{(X_s^1 \leqslant 0)} dL_s^2 \quad .$$

Démonstration du lemme :

On a, d'après la formule de Tanaka :

(2) $$(X_t^1 \vee X_t^2)^+ = \int_o^t 1_{(X_s^1 \vee X_s^2 > 0)} d(X_s^1 \vee X_s^2) + \frac{1}{2} \mathcal{L}_t^o \; .$$

On a, d'autre part :

(3) $$(X_t^1 \vee X_t^2)^+ = X_t^{1+} \vee X_t^{2+} = (X_t^{1+} - X_t^{2+})^+ + X_t^{2+} \; .$$

Ces deux formules permettent d'obtenir $(\mathcal{L}_t^o)$ par identification des processus à variation finie qui y figurent. On obtient aisément :

(4) $$\mathcal{L}_t^o = A_t + \int_o^t 1_{(X_s^1 \leqslant 0)} dL_s^2 \; ,$$

où (A_t) désigne le temps local en 0 de $(X_t^{1+} - X_t^{2+})$. Il reste donc à montrer :

(5) $$A_t = \int_o^t 1_{(X_s^2 < 0)} dL_s^1 \quad .$$

Dans ce but, considérons la transformation lipschitzienne : $(X_t^i) \to (Z_t^i)$, où l'on pose : $Z_t^i = X_t^i - 2\overline{\alpha} X_t^{i^+} = - X_t^{i-} + (1 - 2\overline{\alpha})\, X_t^{i+}$, avec $\overline{\alpha} \in]0,1/2[$.

On vérifie que :

(6)
$(Z_t^1 - Z_t^2)$ est du même signe que $(X_t^1 - X_t^2)$.
si $X_t^1 - X_t^2 \geqslant 0$, on a : $(1 - 2\overline{\alpha})(X_t^1 - X_t^2) \leqslant Z_t^1 - Z_t^2 \leqslant X_t^1 - X_t^2$.

On déduit de (6) deux remarques :

(R1) si $S_t \overset{\text{déf}}{=} [(X_t^1 - X_t^2) - (Z_t^1 - Z_t^2)]^+ \equiv 2\overline{\alpha}(X_t^{1+} - X_t^{2+})^+$, on a :

(7) $$S_t = (X_t^1 - X_t^2)^+ - (Z_t^1 - Z_t^2)^+ \; .$$

(R2) Le temps local en 0 de $Z^1 - Z^2$ est nul.

Pour prouver (R2), notons $N_{[0,a]}(t)$ le nombre de descentes, pendant l'intervalle de temps $[0,t]$, de $Z^1 - Z^2$, à travers la bande $[0,a]$ $(a>0)$, et $\tilde{N}_{[0,a]}(t)$ la quantité analogue relative à la semi-martingale $X^1 - X^2$. On déduit de (6) que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $aN_{[0,a]}(t) \leqslant a\tilde{N}_{[0,a]}(t)$. Ces deux expressions convergent en probabilité, lorsque $a \to 0$, respectivement vers le temps local en 0 de $Z^1 - Z^2$ et $X^1 - X^2$ (cf. [10]) ; la nullité du temps local en 0 de $X^1 - X^2$ entraîne alors celle du temps local en 0 de $Z^1 - Z^2$.

Réécrivons maintenant l'égalité (7). Il vient, à l'aide de la formule de Tanaka et de (R2) :

$$S_t = 2\bar{\alpha} \int_0^t 1_{(X_s^{1+} > X_s^{2+})} d(X_s^{1+} - X_s^{2+}) + \bar{\alpha} A_t \quad \text{, d'une part.}$$

$$= \int_0^t 1_{(X_s^1 > X_s^2)} \{d(X_s^1 - X_s^2) - d(Z_s^1 - Z_s^2)\} \quad \text{, d'autre part.}$$

$$= 2\bar{\alpha} \int_0^t 1_{(X_s^1 > X_s^2)} \, d(X_s^{1+} - X_s^{2+}) \ ,$$

d'où : $A_t = 2 \displaystyle\int_0^t \{1_{(X_s^{1+} > X_s^{2+})} - 1_{(X_s^1 > X_s^2)}\} \, d(X_s^{2+} - X_s^{1+})$, d'où l'on déduit aisément l'identité (5).

3 - Remarques

1°) L'hypothèse : $\alpha(t) \leqslant 1/2$ n'a quasiment pas servi dans la démonstration; toutefois, on déduit aisément de l'argument utilisé en 2.1. - a), que l'équation (1) n'admet pas de solution dès que $1-2\alpha(t) < 0$ sur un ensemble de mesure de Lebesgue positive.

2°) Le théorème 1 s'étend au cas d'une équation plus générale.

Théorème 2

Sous les hypothèses du théorème 1, si l'on suppose en outre que σ *et* b *sont deux fonctions mesurables, bornées et que* σ *est lipschitzienne, minorée par une constante strictement positive, l'équation suivante jouit de l'unicité trajectorielle :*

(7) $$X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s + \int_0^t b(X_s) ds + \int_0^t \alpha(s) dL_s \ .$$

Démonstration du théorème 2

On se ramène d'abord au cas où $\sigma \equiv 1$. En effet, grâce aux hypothèses faites sur σ , la fonction $h(x)=\int_0^x \frac{dy}{\sigma(y)}$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dont la dérivée seconde au sens des distributions est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue ; nous la noterons $\varphi(a)da$. Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une solution de (7), l'extension de la formule d'Ito permet d'écrire :

$$Y_t \equiv h(X_t) = h(x) + B_t + \int_0^t [\sigma^2(X_s) \frac{\varphi(X_s)}{2} + \frac{b(X_s)}{\sigma(X_s)}]ds + \int_0^t \frac{\alpha(s)}{\sigma(0)} dL_s$$

En remarquant que $h(u^+) = [h(u)]^+$, on montre aisément, à l'aide de la formule de Tanaka, par exemple, que le temps local en 0 , soit $(\tilde{L}_t)_t$, de $Y.$ est $\left(\frac{L_t}{\sigma(0)}\right)_{t\geq 0}$. Posant alors $\tilde{b}(y) = [\sigma^2 \times \frac{\varphi}{2} + \frac{b}{\sigma}] \circ h^{-1}(y)$, l'unicité trajectorielle de (7) découlera de l'unicité trajectorielle de l'équation (8) vérifiée par $Y.$:

$$(8) \qquad Y_t = h(x) + B_t + \int_0^t \tilde{b}(Y_s)ds + \int_0^t \alpha(s)d\tilde{L}_s \ .$$

Ce dernier résultat est une conséquence de la démonstration du théorème 1 dont on reprend pas à pas les étapes. On montre en effet que (8) admet une unique solution en loi en se ramenant à l'équation (1) par la transformation de Girsanov ; on prouve enfin que le supremum de deux solutions est encore une solution, comme en 2.2., en remarquant qu'alors l'argument essentiel est que le temps local en 0 de la différence de deux solutions est nul.

Je tiens à remercier ici Messieurs Yor et Métivier pour leurs précieuses indications concernant ce travail.

REFERENCES

[1] J.M. HARRISON, L.A. SHEPP, *On skew Brownian motion*, Annals of Probability, Vol. 9, n° 2, April 1981.

[2] D.W. STROOCK, M. YOR, *Some remarkable martingales*, Séminaire Prob. XV, Lectures Notes Math. 850, Springer Verlag, 1979/80.

[3] S. WATANABE, *Applications of Poisson point processes to Markov processes*, Intern. Conf. Prob. Math. Stat. Vilnius, Vol. 1, 1973.

[4] S. WATANABE, *Construction of diffusion processes by means Poisson point process of Brownian excursions*, Proc. Third Japan-USSR Symp. Prob. Theor., Lecture Notes Math. 550, Springer Verlag.

[5] S. WEINRYB, *Limite faible d'un processus de sauts avec frontières de transmission*, Rapport interne 78, Centre de Mathématiques Appliquées de l'Ecole Polytechnique, 1982.

[6] J.F. LE GALL, *Temps locaux et équations différentielles stochastiques*, Thèse 3e cycle, Université de Paris VI, Juin 1982.

[7] E. PERKINS, *Local time and pathwise uniqueness for stochastic differential equations*, Séminaire Prob. XVI, Lecture Notes Math. 920, Springer Verlag, 1982.

[8] T. YAMADA, S. WATANABE, *On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations*, J. Math. Kyoto Univ., 11, 1971.

[9] M. YOR, *Continuité des temps locaux*, Astérisque, 52/53, 1978, Soc. Math. Fr.

[10] N. EL KAROUI, *Sur les montées des semi-martingales*, Astérisque, 52/53, Soc. Math. Fr.

(*) Centre de Mathématiques Appliquées
ECOLE POLYTECHNIQUE
91128 - PALAISEAU CEDEX - France.