GÉRALD MAZZIOTTO

Régularité à droite des surmartingales à deux indices et théorème d'arrêt

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 17 (1983), p. 418-424
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1983__17__418_0>

REGULARITE A DROITE DES SURMARTINGALES A DEUX INDICES
ET THEOREME D'ARRET

G. MAZZIOTTO

Parmi les surmartingales à deux indices, celles qui, de plus, engendrent une mesure de Doleans positive, sont assez bien connues ([4]) ([3]); on les appelle ici des V-surmartingales. Par la méthode des Laplaciens approchés ([6]), on montre que toute surmartingale est limite de différences de V-surmartingales, dans un sens à préciser. Cela entraine notamment que toute surmartingale dont l'espérance est continue à droite, admet une modification suffisamment régulière pour vérifier un théorème d'arrêt par points d'arrêt.

1- Généralités:

1.1. Les processus que l'on considère ici, sont, d'une manière générale à valeurs réelles, indexés sur l'ensemble $\mathbb{T} = [0,\infty]^2$ et définis sur un espace de probabilités complet $(\Omega,\underline{\underline{A}},\mathbb{P})$. Une relation d'ordre partiel est définie sur $\mathbb{T}$ par:

$$\forall\ s=(s_1,s_2),\ t=(t_1,t_2) \in \mathbb{T} :\ s < t \quad \text{ssi} \quad s_1 \leq t_1 \text{ et } s_2 \leq t_2 \ .$$

Etant donné un point $h=(h_1,h_2)$ de $\mathbb{T}$, on convient de noter $h'=(h_1,0)$ $h''=(0,h_2)$ et $|h|=h_1h_2$. On note aussi $\mathbb{T}^* =]0,\infty[^2$.

Sur $(\Omega,\underline{\underline{A}},\mathbb{P})$, on considère une filtration $\underline{\underline{F}} = (\underline{\underline{F}}_t;\ t \in \mathbb{T})$ vérifiant les axiomes classiques ([7]), F1, F2, F3, F4 de la théorie des processus à deux indices réels. Pour toutes les notions, règles de calcul, propriétés relatives à cette théorie, on se référe ici aux exposés de ([7]).

Les projections optionnelle, 1-optionnelle, 2-optionnelle d'un processus mesurable borné, X, sont définies selon ([1]); on les note ${}^oX$, ${}^{o1}X$, ${}^{o2}X$ respectivement. Etant donnés deux processus, X et Y, on dit que X est une modification de Y ssi: $\forall\ t \in \mathbb{T}\ ,\ X_t = Y_t$ p.s.

Un point d'arrêt (p.a.) est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{T}$ telle que

$$\forall\ t \in \mathbb{T} :\ \{T < t\} \in \underline{\underline{F}}_t \ .$$

1.2. Une surmartingale est un processus, $X = (X_t\ ;\ t \in \mathbb{T})$, mesurable, adapté à la filtration $\underline{\underline{F}}$ et intégrable, tel que :

$$\forall\ t,\ h \in \mathbb{T} :\ E(X_{t+h} \,/\, \underline{\underline{F}}_t) \leq X_t \quad \text{p.s.} \ .$$

Un potentiel est une surmartingale positive ($X \geq 0$) telle que, pour toute suite croissante de points de $\mathbb{T}$, $(t(n);\ n \in \mathbb{N})$, où soit la suite des premières coordonnées, soit la suite des secondes, converge vers ∞, on a

$$\lim X_{t(n)} = 0 \text{ et } \forall\ t :\ X_{t_1\infty} = X_{\infty t_2} = X_{\infty\infty} = 0 \quad \text{p.s.} \ .$$

Un processus réel quelconque, X, est dit à décroissance rapide (à l'infini) si il existe $c > 0$ et $\alpha \in \mathbb{T}^*$ tels que

$$\mathbb{P}(\{\forall\, t : |X_t| \leq c\, e^{-\alpha.t}\}) = 1 ,$$

où $\alpha.t$ désigne le produit scalaire $\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2$.
On remarque que si X est une surmartingale positive, alors $\forall\, c > 0$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{T}^*$, le processus $X^{c\alpha}$, défini par

$$\forall\, t \in \mathbb{T} : X_t^{c\alpha} = (X_t \wedge c)\, e^{-\alpha.t} ,$$

est un potentiel à décroissance rapide.
La variation d'un processus X, entre deux points t et t+h de $\mathbb{T}$, est la v.a. définie par

$$X_{]t,t+h]} = X_t + X_{t+h} - X_{t+h'} - X_{t+h''} .$$

On appelle V-surmartingale (resp. V-potentiel) une surmartingale (resp. un potentiel),X, cad dans $\mathbb{L}^1$, et qui engendre une mesure de Doleans positive ([2]),([3]),([7]), sur la tribu prévisible de $\Omega\times\mathbb{T}$.
Un processus adapté, A, est dit croissant si, les processus à un indice $(A_{t'}\ ; t \in \mathbb{T})$ et $(A_{t''}\ ; t \in \mathbb{T})$ sont croissants et si

$$\forall\, t, h : A_{]t,t+h]} \geq 0 \text{ p.s.} .$$

1.3. Un processus est dit cad si presque toutes ses trajectoires sont des fonctions continues à droite sur $\mathbb{T}$ ([7]).
Suivant ([10]) une surmartingale, X, est dite de la classe (R) si il existe une suite croissante $(X^n\ ; n \in \mathbb{N})$ de surmartingales cad telle que

$$\mathbb{P}(\{\forall\, t : X_t = \lim_n X_t^n \}) = 1 .$$

De même on définit, par récurrence, les surmartingales de la classe (R^n) comme limites croissantes de surmartingales de la classe (R^{n-1}), $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
Une surmartingale est dite de la classe (RR) si il existe n telle qu'elle soit de la classe (R^n).

Remarque 1.3: i) Dans la théorie classique, les surmartingales de la classe (R) se réduisent aux surmartingales cad (18-VI de ([5])). Ici, il existe des martingales de la classe (R) qui ne sont nulle part cad([10]) mais je ne sais pas si la classe (R^n) est strictement plus grande que la classe (R^{n-1}) pour $n > 1$.
ii) Une surmartingale de la classe (RR) est, par définition, limite d' d'une suite (pas nécessairement croissante) de surmartingales cad, dont elle est aussi l'enveloppe supérieure. Elle est donc à trajectoires semi-continues inférieurement (sci) pour la topologie droite (à droite); l'inverse est il vrai ?
1.4. Dans ([10]) J.B. Walsh établit un théorème d'arrêt par p.a. pour les surmartingales de la classe (R), en se ramenant grâce à la notion de chemin croissant optionnel au cas classique. Il est facile d'étendre ce résultat aux surmartingales de classe (RR).

PROPOSITION 1.3 : <u>Si X est une surmartingale de la classe (RR) et si S et T sont deux p.a. bornés tels que</u> $S < T$ <u>p.s. , on a</u>

$$E (X_T / \underline{\underline{F}}_S) \leq X_S \quad \text{p.s.} \quad .$$

<u>Démonstration</u>: D'après [10] c'est vrai pour la classe (R), on suppose qu'il en est de même pour n fixé. Soit X de la classe (R^{n+1}), par hypothèse, elle est limite d'une suite croissante $(X^k; k \in \mathbb{N})$ de surmartingales de la classe (R^n). Pour tous p.a. S, T bornés, tels que $S < T$, on a $\quad E (X^k_T / \underline{\underline{F}}_S) \leq X^k_S$

Par le Lemme de Fatou, X satisfait la même relation, car

$$X_S = \lim_k \uparrow X^k_S \quad \text{et} \quad X_T = \lim_k \uparrow X^k_T$$

D'où le résultat annoncé, par récurrence.

2- <u>Régularité des V-surmartingales</u>:

2.1. Les V-surmartingales font partie d'une famille de processus à deux indices étudiée depuis déjà longtemps, notamment par R. Cairoli [4] qui a établi que ceux ci admettaient une décomposition du type Doob-Meyer.

PROPOSITION 2.1 : [4] <u>Si X est une V-surmartingale positive, il existe un processus, A, croissant, prévisible, cad (et même pourvu de limites dans les trois autres quadrants), intégrable et une martingale faible, m, tels que</u>

$$X = m + A \qquad \text{et} \qquad E (A_{\infty\infty}) = E (X_0) \quad .$$

Si X est un V-potentiel, il est facile d'exprimer la martingale faible m à partir de A; on en déduit alors la formule classique

$$\forall\, t \in \mathbb{T} : X_t = E \left(\int_t^\infty dA_s \,/\, \underline{\underline{F}}_t \right) \quad \text{p.s.}$$

où la notation $\int_t^\infty$ désigne une intégration sur l'intervalle $]t,\infty]$.

2.2. A priori, il ne suffit pas que X soit borné pour que A le soit, par contre il existe des relations, [2], [3] dans des espaces du type $\mathbb{L}^p$ (avec $1 \leq p < \infty$) entre des normes adéquates de X et A. On en n'aura pas besoin dans la suite car les V-potentiels que l'on considérera seront associés à des processus croissants bornés par construction. Dans ce cas particulier, on a le résultat de régularité suivant.

PROPOSITION 2.2 : <u>Si X est un V-potentiel de processus croissant prévisible associé, A, borné, alors X admet une modification, $\tilde{X}$, cad.</u>

<u>Démonstration</u>: Il suffit de choisir

$$\tilde{X} = A + {}^{o}(A_{\infty\infty}) - {}^{o1}(A_{\infty .}) - {}^{o2}(A_{.\infty}) \quad .$$

Comme A est borné et cad, chacun des termes est encore cad d'après les travaux , [1] et [8] , sur les diverses projections optionnelles.

Ce résultat s'étend en fait aux V-surmartingales.

COROLLAIRE 2.2 : Si X est une V-surmartingale positive de processus croissant prévisible associé, A, borné, alors il existe des processus bornés et cad : Y, Y^o, Y^1, Y^2, qui sont, respectivement, un V-potentiel, une martingale, une martingale selon une coordonnée et un potentiel selon l'autre, tels que

$$\forall\ t\ :\ X_t = Y_t + Y^o_t + Y^1_t + Y^2_t \quad \text{p.s.} \quad .$$

Démonstration: On choisit des modifications cad-lag des surmartingales à un indice $(X_{u\infty}\ ;\ u \in \mathbb{R}_+)$ et $(X_{\infty u}\ ;\ u \in \mathbb{R}_+)$ et on pose

$$Y_t = {}^o(X_{]t,\infty]})_t \quad , \quad Y^1_t = {}^{o2}(X_{.\infty} - {}^{o1}(X_{\infty\infty}))_t \quad , \quad Y^o_t = {}^o(X_{\infty\infty})_t$$

et une formule analogue pour l'autre.

Tous ces processus sont cad: d'après la Proposition 2.2 pour Y et d'après les résultats [8],[1] sur les projections optionnelles de processus cad, pour les autres.

3- Formule des Laplaciens approchés:

3.1. Classiquement, cette formule [5] est utilisée pour évaluer le processus croissant prévisible associé à une surmartingale à un indice cad-lag. Initialement, en théorie du Potentiel [6], elle permet d'exprimer certaines fonctions excessives comme limite de potentiels. C'est ainsi qu'on l'utilise ici, dans le cadre des processus à deux indices.

3.2. Etant donné un processus, X, borné et mesurable sur $(\Omega\times \mathbb{T}, \underline{\underline{A}}\otimes\underline{\underline{T}})$, on peut, grâce aux résultats sur le calcul stochastique dépendant d'un paramètre [2],[9], lui associer au moins un processus (à quatre indices) $p(X) = (p_s(X)_t\ ;\ s,t \in \mathbb{T})$ borné et mesurable sur $(\Omega\times \mathbb{T}\times \mathbb{T}, \underline{\underline{A}}\otimes\underline{\underline{T}}\otimes\underline{\underline{T}})$ tel que

$$\forall\ s,t \in \mathbb{T}\ :\ p_s(X)_t = E\ (\ X_{s+t}\ /\ \underline{\underline{F}}_t\ )\quad \text{p.s.}$$

Pour $h \in \mathbb{T}^*$ fixé, on définit alors le processus borné et mesurable sur $(\Omega\times \mathbb{T}, \underline{\underline{A}}\otimes\underline{\underline{T}})$, X^h, suivant

$$\forall\ t \in \mathbb{T}\ :\ X^h_t = |h|^{-1} \int_0^h p_s(X)_t\, ds$$

On remarque que si on remplace, dans cette formule, le processus p(X) par une modification (pourvu qu'elle soit encore mesurable) on ne change le processus X^h que sur un ensemble evanescent. Ceci autorise la notation plus parlante suivante

$$\forall\ t \in \mathbb{T}\ :\ X^h_t = |h|^{-1} \int_0^h E(X_{s+t}\ /\ \underline{\underline{F}}_t)\, ds$$

en convenant que l'intégrale de Lebesgue est toujours évaluée sur la version mesurable de l'espérance conditionnelle. De même on remarque que si $\forall\ t\ :\ Y_t \geq 0$ p.s. , alors $\forall\ t\ :\ \int_0^t Y_s\, ds \geq 0$ p.s. .

3.3. De façon analogue, on définit les processus suivants

$$\forall\ t\ :\ A^{h+}_t = |h|^{-1} \int_0^t (E(X_{]s,s+h]}/\ \underline{\underline{F}}_s)\vee 0)\, ds \quad ,$$

$$A^{h-}_t = -|h|^{-1} \int_0^t (E(X_{]s,s+h]}/\ \underline{\underline{F}}_s)\wedge 0)\, ds \quad , \quad A^h_t = A^{h+}_t - A^{h-}_t \quad .$$

Par construction, les processus A^{h+} et A^{h-} sont croissants, à trajectoires cad (et même cad-lag), nuls sur les axes, A^h est à variation bornée sur tout domaine borné et ils sont adaptés. Si X est un processus à décroissance rapide à l'infini, alors les v.a. $A^{h+}_{\infty\infty}$, $A^{h-}_{\infty\infty}$ et $A^{h}_{\infty\infty}$ sont bien définies et bornées. De plus

LEMME 3.3 : <u>Etant donné un processus mesurable à décroissance rapide, X, pour tout h fixé dans $\mathbb{T}^*$, on a</u>

$$\forall\ t\ :\ X^h_t = E\left(\int_t^\infty dA^h_s \,/\, \underline{\underline{F}}_t\right) \quad \underline{\text{p.s.}} \quad .$$

<u>Démonstration</u>: On développe et on change de variables dans cette formule

$$\begin{aligned} E\left(\int_t^\infty dA^h_s \,/\, \underline{\underline{F}}_t\right) &= |h|^{-1}\, E\left(\int_t^\infty (X_s + p_h(X)_s - p_{h'}(X)_s - p_{h''}(X)_s)\, ds \,/\, \underline{\underline{F}}_t\right) \\ &= |h|^{-1} \int_0^\infty (p_s(X)_t + p_{s+h}(X)_t - p_{s+h'}(X)_t - p_{s+h''}(X)_t)\, ds \\ &= |h|^{-1}\int_0^h p_s(X)_t\, ds = X^h_t \quad \text{p.s.} \quad . \end{aligned}$$

3.4. Sous les hypothèses du Lemme 3.3, on a donc

$$\forall\ t\ :\ X^h_t = E\left(\int_t^\infty dA^{h+}_s \,/\, \underline{\underline{F}}_t\right) - E\left(\int_t^\infty dA^{h-}_s \,/\, \underline{\underline{F}}_t\right) \quad \text{p.s.} \quad .$$

Cela signifie que X^h est la différence de deux potentiels de mesures bornées. D'après la Proposition 2.2 , il existe donc une modification de X^h qui est cad.

3.5. On étudie maintenant la famille des processus $(X^h;\ h \in \mathbb{T}^*)$.

LEMME 3.5 : <u>Etant donnée une surmartingale positive, X, à décroissance rapide, on a</u> :

i) $\forall\ h \in \mathbb{T}^*$: X^h <u>est une surmartingale à décroissance rapide</u>

ii) $\forall\ h, k \in \mathbb{T}^*$: $h > k \Rightarrow \forall\ t$: $X^k_t \geq X^h_t$ <u>p.s.</u>

iii) $\forall\ h \in \mathbb{T}^*$, $\forall\ t \in \mathbb{T}$: $X_t \geq X^h_t$ <u>p.s.</u> .

<u>Démonstration</u>: i) Pour h fixé, soit $k > 0$; on a pour tout t :

$$E(X^h_t - X^h_{t+k} \,/\, \underline{\underline{F}}_t) = |h|^{-1}\int_0^h E(X_{t+s} - X_{t+s+k} \,/\, \underline{\underline{F}}_t)\, ds \geq 0 \quad \text{p.s.}$$

ii) Soient $h=(h_1,h_2)$ et $k=(\alpha_1 h_1, \alpha_2 h_2)$ avec $0 < \alpha_1, \alpha_2 \leqq 1$. Alors, par définition,

$$\begin{aligned} X^k_t - X^h_t &= |\alpha|\,|h|^{-1}\int_0^{\alpha_1 h_1}\int_0^{\alpha_2 h_2} E(X_{s+t} \,/\, \underline{\underline{F}}_t)\, ds_1 ds_2 \\ &\quad - |h|^{-1}\int_0^{h_1}\int_0^{h_2} E(X_{s+t} \,/\, \underline{\underline{F}}_t)\, ds_1 ds_2 \\ &= |h|^{-1}\int_0^{h_1}\int_0^{h_2} E(X_{t+(\alpha_1 s_1, \alpha_2 s_2)} - X_{t+s} \,/\, \underline{\underline{F}}_t)\, ds_1 ds_2 \end{aligned}$$

Comme X est une surmartingale, la quantité intégrée est toujours positive

iii) Le raisonnement est analogue.

3.6. On considère une suite $(h(n);n \in \mathbb{N})$ d'éléments de $\mathbb{T}^*$ qui decrôît vers 0 et on choisit les modifications cad des processus $X^{h(n)}$ précédents que l'on note X^n, $\forall n$. D'après le Lemme 3.5 $(X^n;n \in \mathbb{N})$ est une suite croissante majorée de surmartingales cad; on désigne par $\tilde{X}$ la limite, qui est encore une surmartingale bornée. Donc, par construction, $\tilde{X}$ est de la classe (R).

PROPOSITION 3.6 : Si X est une surmartingale positive à décroissance rapide telle que la fonction $t \to E(X_t)$ est cad sur $\mathbb{T}$, alors elle admet une modification de la classe (R) : $\tilde{X}$ précédemment défini.

Démonstration: Par construction, $\forall\, t$, on a $\tilde{X}_t \leq X_t$ p.s. . D'autre part

$$E(\tilde{X}_t) = E(\lim |h(n)|^{-1} \int_0^{h(n)} E(X_{t+s} / \underline{\underline{F}}_t)\, ds\ )$$

$$= \lim \int_0^1 E(X_{t+s|h(n)|})\, ds = E(X_t)$$

D'où, finalement, $X_t = \tilde{X}_t$ p.s. .

3.7. Ce résultat se généralise de la manière suivante.

PROPOSITION 3.7 : Toute surmartingale bornée (resp. positive) X, telle que la fonction $t \to E(X_t)$ soit cad, admet une modification de la classe (R^2) (resp. de la classe (R^3)).

Démonstration: Dans le premier cas, on peut se ramener à considérer une surmartingale positive bornée par une constante K. Pour $\alpha \in \mathbb{T}^*$, on pose

$$\forall\, t : X_t^\alpha = e^{-\alpha . t}\, X_t \quad ;$$

X^α est encore une surmartingale positive, à décroissance rapide cette fois: elle admet une modification de la classe (R) d'après la Proposition 3.6 . En prenant une suite $(\alpha(n); n \in \mathbb{N})$ qui décroît vers 0, on a

$$\forall\, t : X_t = \lim_n \uparrow X_t^{\alpha(n)}$$

d'où le résultat. Dans le deuxième cas, on considère une suite $(X^n; n \in \mathbb{N})$ du type

$$\forall\, t : X_t^n = X_t \wedge n$$

et on est ramené au cas précédent.

REFERENCES :

(1) D. BAKRY : "Théorèmes de section et de projection pour les processus à deux indices" , Z. f. Wahr. 55, (1981), pp 55-71

(2) D. BAKRY : "Semimartingales à deux indices" , Sém. de Proba. XVI, Lect. Notes in Maths , Springer Verlag (1982)

(3) M.D. BRENNAN : "Planar Semimartingales" , J. Mult. Anal. 2 (1979), pp 465-486

(4) R. CAIROLI : "Décomposition de processus à indices doubles" , Sém. de Proba V, Lect. Notes in Maths 191, Springer Verlag (1971)

(5) C. DELLACHERIE - P.A. MEYER : "Probabilités et Potentiel" , Hermann (1975 & 1980)

(6) P.A. MEYER : "Probabilités et Potentiel" , Hermann (1966)

(7) P.A. MEYER : "Théorie élémentaire des processus à deux indices" , Colloque ENST-CNET, Lect. Notes in Maths 863, Springer Verlag (1981)

(8) A. MILLET - L. SUCHESTON : "On Regularity of multiparameter Amarts and Martingales" , Z. f. Wahr. 56, (1981), pp 21-45

(9) C. STRICKER - M. YOR : "Calcul stochastique dépendant d'un paramètre" , Z. f. Wahr. 45, (1978), pp 109-133

(10) J.B. WALSH : "Optional Increasing Paths" , Colloque ENST-CNET Lect. Notes in Maths 863, Springer Verlag (1981)

G. MAZZIOTTO
PAA / ATR / MTI
C. N. E. T.
38-40 rue du G. Leclerc
92131 - ISSY LES MOULINEAUX