SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

RAJAE ABOULAÏCH
CHRISTOPHE STRICKER

Sur un théorème de Talagrand

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 17 (1983), p. 306-310
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1983__17__306_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR UN THEOREME DE TALAGRAND

par ABOULAÏCH Rajae et STRICKER Christophe

Nous nous proposons de donner quelques conséquences d'un remarquable théorème de Talagrand [6] concernant les mesures à valeurs dans l'espace vectoriel topologique des variables aléatoires p.s. finies, muni de la topologie de la convergence en probabilité.

Soit (Ω, F, P) un espace probabilisé complet muni d'une filtration $(F_t)_{t\geq 0}$ vérifiant les conditions habituelles. Cette note est essentiellement consacrée au résultat suivant qui, dans le cas déterministe où Ω n'a qu'un seul point, se confond avec le théorème de Vitali-Hahn-Saks pour les mesures de Radon sur $\mathbb{R}^+$:

THEOREME 1 : Soit (X^n) une suite de semimartingales jusqu'à l'infini. On suppose que pour tout ensemble prévisible A, la suite $(1_A . X^n)_\infty = \int_0^\infty 1_A \, dX^n$ converge en probabilité vers une variable aléatoire J(A). Il existe alors une semimartingale jusqu'à l'infini X telle que, pour tout ensemble prévisible A, la suite $(1_A . X^n)_\infty$ converge en probabilité vers $(1_A . X)_\infty$.

Compte tenu du théorème de Talagrand, on pourrait donner une démonstration directe et rapide de ce théorème grâce aux travaux de Bichteler [1] et Drewnowski [2]. Toutefois nous préférons utiliser des outils plus familiers aux lecteurs de ce séminaire et par souci de complétude nous détaillerons les différentes étapes de la démonstration. Pour démontrer que J est une mesure, nous aurons besoin d'un lemme auxiliaire analogue au lemme 1 d'Emery [3]. Il existe une loi Q équivalente à P telle que toutes les semimartingales X^n appartiennent à l'espace normé $\mathcal{M} \oplus \mathcal{A}$: autrement dit, pour la loi Q, X^n est spéciale de décomposition canonique $X^n = M^n + A^n$, M^n appartenant à l'espace vectoriel $\mathcal{M}$ des martingales de carré intégrable muni de la norme $\|M^n\|^2_{\mathcal{M}} = E[M^n, M^n]_\infty$, A^n appartenant à l'espace vectoriel $\mathcal{A}$ des processus à variation intégrable muni de la norme $\|A^n\|_{\mathcal{A}} = E[\int_0^\infty |dA^n|]$. $\widetilde{\mathcal{P}}$ désigne la tribu quotient de la tribu prévisible $\mathcal{P}$ par la relation d'équivalence : $A \sim B$ si et seulement si pour tout n, $1_A \cdot X^n = 1_B \cdot X^n$.

On pose :

$$\|X^n\| = \|M^n\|_{\mathcal{M}} + \|A^n\|_{\mathcal{A}},$$

$$d(A,B) = \sum_n \frac{\|(1_A - 1_B) \cdot X^n\|}{2^n(1 + \|X^n\|)} \qquad \text{pour tout } A, B \in \widetilde{\mathcal{P}},$$

$$J^n(A) = (1_A \cdot X^n)_\infty \qquad \text{pour tout } A \in \widetilde{\mathcal{P}},$$

$$J(A) = \lim_{n\to\infty} J^n(A), \quad \text{la limite étant prise en probabilité.}$$

On désigne par L^0 l'espace vectoriel topologique des variables aléatoires p.s. finies, muni de la topologie de la convergence en probabilité avec la quasinorme $\|U\|_{L^0} = E[1 \wedge |U|]$.

LEMME 1. <u>d est une distance sur $\widetilde{\mathcal{P}}$ pour laquelle $\widetilde{\mathcal{P}}$ est complet. Les applications J^n de $\widetilde{\mathcal{P}}$ dans L^0 sont continues pour tout n et J est aussi continue.</u>

<u>Démonstration</u>. d est évidemment une distance sur $\widetilde{\mathcal{P}}$. Si (B_n) est une suite de

Cauchy pour d, c'est aussi une suite de Cauchy dans

$$L^2\left(\mathcal{P}, \sum_n \frac{d[M^n, M^n]dQ}{2^n\left(1 + \|X^n\|\right)}\right) \cap L^1\left(\mathcal{P}, \sum_n \frac{|dA^n|\, dQ}{2^n\left(1 + \|X^n\|\right)}\right).$$

Donc $\left(1_{B_n}\right)$ converge dans $L^2(\ldots) \cap L^1(\ldots)$ vers l'indicatrice d'un ensemble prévisible B. Par conséquent $\left(B_n\right)$ converge aussi vers B dans $\tilde{\mathcal{P}}$. Les applications J^n sont lipschitziennes, donc continues. Il en résulte que J admet aussi un point de continuité. Comme J est additive, on vérifie aisément que J est continue partout.

Nous abordons maintenant la deuxième étape de notre démonstration du théorème 1.

LEMME 2. J est une mesure sur $\left(\mathbb{R}^+ \times \Omega, \mathcal{P}\right)$ à valeurs dans L^o.

<u>Démonstration</u>. J est évidemment une mesure additive. D'après le lemme 1 si $\left(A_k\right)$ est une suite d'ensembles prévisibles de limite A, $J\left(A_k\right)$ tend vers $J(A)$ dans L^o. Donc J est aussi σ-additive.

Enonçons maintenant le théorème de Talagrand [6] :

THEOREME 2 : Soit μ une mesure sur un espace mesurable $(E, \mathfrak{T})$ à valeurs dans L^o. Alors μ est bornée. De plus il existe une loi Q' équivalente à P, de densité bornée, telle que μ soit une mesure à valeurs dans $L^2(Q')$.

Pour tout t, on pose $X_t = J\left([0, t]\right)$. Ceci définit à modification près un processus adapté X tel que, pour tout ensemble prévisible élémentaire H, $J(H) = \int_o^\infty 1_H \, dX$. D'après le théorème 2, $\sup_H E^{Q'}[J(H)]^2$ est fini, si bien que X est une quasimartingale continue à droite en probabilité d'après le lemme 1. Or la démonstration du théorème 1.5. de [5] montre qu'une quasimartingale continue à droite en probabilité admet une version continue à droite. Ainsi après le choix de la bonne version, X est une semimartingale et l'égalité $J(H) = \int_0^\infty 1_H \, dX$ a lieu pour tout ensemble prévisible élémentaire H. Par classe monotone, on obtient l'égalité $J(H) = \int_0^\infty 1_H \, dX$ pour tout ensemble prévisible H et le théorème 1 est démontré.

REMARQUES.

1) Si on suppose que les semimartingales (X^n) appartiennent à $\mathcal{S}^1$ et si on remplace dans les hypothèses du théorème 1 la convergence dans L^0 par la convergence dans L^1, on peut montrer que $(H.X^n)_\infty$ converge dans L^1 vers $(H.X)_\infty$ pour tout processus prévisible borné H. A-t-on dans le cas L^0 un résultat analogue ?

2) Le théorème de Talagrand permet aussi d'améliorer un peu la caractérisation des semimartingales donnée par Métivier, Pellaumail, Bichteler et Dellacherie (voir par exemple : Probabilités et Potentiel de C. Dellacherie et P.A. Meyer, chapitre V à VIII) : Soit X un processus continu à droite et adapté. Alors X est une semimartingale jusqu'à l'infini si et seulement s'il existe une mesure m sur $(\mathbb{R}^+ \times \Omega, \mathcal{P})$ à valeurs dans L^0 telle que pour tout couple (u,v) avec $0 \leq u < v$ et tout $A \in F_u$, $m(A \times]u,v]) = 1_A(X_v - X_u)$.

REFERENCES

[1] BICHTELER K. :
On sequences of measures.
Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 80, 5, pp. 839-844, 1974.

[2] DREWNOWSKI L. :
Topological Rings of Sets, continuous Set Functions, Integration I.
Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences. Série des Sciences math., vol. XX, n°4, 1972.

[3] EMERY M. :
Un théorème de Vitali - Hahn - Saks pour les semimartingales.
Z. W. 51, 95-100, 1980.

[4] STRICKER C. :
Quelques remarques sur la topologie des semimartingales. Applications aux intégrales stochastiques.
Séminaire de Probabilités XV, Lecture Notes in M. 850, 490-520, 1981.

[5] STRICKER C. :
Mesure de Föllmer en théorie des quasimartingales.
Séminaire de Probabilités IX, Lecture Notes in M. 465, 409-419, 1975.

[6] TALAGRAND M. :
Les mesures vectorielles à valeurs dans L^0 sont bornées.
A paraître.