SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PIERRE VALLOIS

Le problème de Skorokhod sur $\mathbb{R}$: une approche avec le temps local

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 17 (1983), p. 227-239

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1983__17__227_0>

LE PROBLEME DE SKOROKHOD SUR $\mathbb{R}$:

UNE APPROCHE AVEC LE TEMPS LOCAL

Pierre VALLOIS

1.- INTRODUCTION

$(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ désigne, dans tout ce travail, un mouvement brownien sur $\mathbb{R}$, issu de 0, $(L_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ son temps local en 0, $S_t \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{s\le t} X_s$, et μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. Lorsque μ vérifie $\int |x|\, d\mu(x) < +\infty$ et $\int x\, d\mu(x) = 0$, Azéma et Yor ont introduit ([1],[2]) le temps d'arrêt $T_\mu \overset{\text{def}}{=} \inf (t \mid S_t \ge \Psi_\mu(X_t)) = \inf \{t \mid \Phi_\mu(S_t) \ge X_t\}$, où Ψ_μ est la fonction "barycentre" de μ et Φ_μ son inverse continue à droite, et ont montré que X_{T_μ} a pour loi μ ; si de plus $\int |x|^2 d\mu(x) < +\infty$, alors $E(T_\mu) = E(X^2_{T_\mu}) = \int x^2 d\mu(x)$.

Jeulin et Yor ([3]) ont étudié les temps d'arrêt $T^{h,k} \overset{\text{def}}{=} \inf \{t \mid X_t^+ h(L_t) + X_t^- k(L_t) = 1\}$, ce qui, compte tenu de l'équivalence en loi des processus $(S_t - X_t, S_t)$ et $(|X_t|, L_t)$ généralise l'étude faite par Azéma et Yor.

La construction d'Azéma-Yor est très asymétrique : les grandes valeurs de (S_t) y jouent un rôle privilégié. L'objet de notre travail est de donner, dans le cadre de [3], une construction plus symétrique pour laquelle le résultat suivant sera vrai : lorsque $\mu(\{0\}) > 0$, S_T est intégrable si et seulement si :

$$\int_0^\infty \frac{\rho^-(x) - \rho^+(x)}{x}]\, 1_{\{\rho^-(x) > \rho^+(x)\}} dx < +\infty, \text{ et } \int |x|\, d\mu(x) < +\infty \text{ (avec}$$

$$\rho^+(x) = \int_{[0,x]} t\, d\mu(t) \text{ et } \rho^-(x) = -\int_{[-x,0]} t\, d\mu(t),\ x > 0).$$

2.- RAPPELS DES RESULTATS DE L'ARTICLE DE JEULIN et YOR

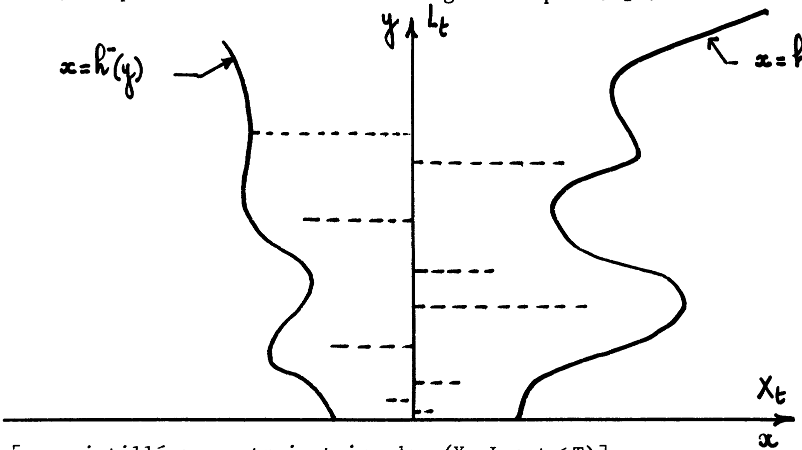
a) Soient h^+ et h^- deux fonctions boréliennes de $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ sur $[0,\delta[$ et nulles sur $[\delta, +\infty[$, $0 \le \delta \le +\infty$ et vérifiant :

$$(2.1) \qquad \forall\, x,\ 0 \le x < \delta,\quad \int_0^x \left(\frac{1}{h^+} + \frac{1}{h^-}\right)(u)\, du < +\infty ,$$

$$(2.2) \qquad \int_0^\infty \left(\frac{1}{h^+} + \frac{1}{h^-}\right)(u)\, du = +\infty \qquad \text{(avec la convention } \frac{1}{0} = +\infty).$$

On note $T_x \overset{\text{def}}{=} \inf\{t \mid L_t = x\}$ pour $x \ge 0$, et $T = T_\delta \wedge (\inf\{t > 0\ ;\ X_t^+ = h^+(L_t)$ ou $X_t^- = h^-(L_t)\})$ (avec la convention $\inf(\emptyset) = +\infty$).

b) On peut donner une traduction géométrique de T :



[en pointillé : une trajectoire de $(X_t, L_t;\ t \le T)$]

c) La loi de X_T est donnée :

$$(2.3) \quad E(f(X_T)) = f(0) \exp -\frac{1}{2}\int_0^\delta \left(\frac{1}{h^+}+\frac{1}{h^-}\right)(t)\,dt \;+$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^\delta dx \left\{\frac{f(h^+(x))}{h^+(x)} + \frac{f(-h^-(x))}{h^-(x)}\right\} \exp -\frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{h^+}+\frac{1}{h^-}\right)(u)\,du$$

pour toute fonction f borélienne, positive.

On dispose aussi de la loi du couple (X_T, T) :

$$(2.4) \quad E[f(X_T) \exp -\frac{p^2}{2} T] = f(0) \exp -\frac{1}{2}\int_0^\delta p(\coth(ph^+(x)) + \coth(ph^-(x))dx$$

$$+ \frac{p}{2}\int_0^\delta dx\left[\left\{\frac{f(h^+(x))}{sh(ph^+(x))} + \frac{f(-h^-(x))}{sh(ph^-(x))}\right\} \exp -\frac{p}{2}\int_0^x (\coth(ph^+(s) + \coth(ph^-(s))ds\right]$$

pour toute fonction f borélienne positive et tout réel p.

3.- RESOLUTION DU PROBLEME DE SKOROKHOD

a) Soit μ^+ la restriction de μ à $\mathbb{R}_+$. Si X_T a pour loi μ et si l'on fait les hypothèses simplificatrices suivantes : $\mu(0) = 0$, h^+ continue à droite et strictement croissante, en notant $\tilde{h}^+$ l'inverse continue à droite de h^+ et en prenant f fonction borélienne de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, d'après (2.3), il existe $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que : $\int f(x)\, d\mu^+(x) = \int \frac{f(h^+(x))}{h^+(x)} \phi(x)\, dx =$
$= \int \frac{f(x)}{x} \phi(\tilde{h}^+(x))\, d\tilde{h}^+(x)$; on en déduit que $\tilde{h}^+$ vérifie l'équation $d\tilde{h}^+(x) = \phi(\tilde{h}^+(x))\, d\, [\int_{[o,x]} t\, d\mu^+(t)]$, ce qui met en évidence $\tilde{h}^+$ (et non h^+) et suggère de poser $\tilde{h}^+(x) = F(\int_{[o,x]} t\, d\mu(t))$.

NOTATIONS :

- $\rho^+(t) = \int_{[o,t]} u\, d\mu(u)$; $\rho^-(t) = - \int_{[-t,o]} u\, d\mu(u)$; $a_o = \rho^+(+\infty) \vee \rho^-(+\infty)$
- si f est une fonction croissante et continue à droite, on note $\widetilde{f}$ son inverse continue à droite.

THEOREME 3.1 : Il existe δ, $0 \le \delta \le +\infty$ et une fonction F définie sur $[0,+\infty]$ à valeurs dans $[0,+\infty]$, finie sur $[0,\delta[$, tels que si l'on pose $\tilde{h}^+ = \tilde{\rho}^+ \circ \tilde{F}$ et $h^- = \tilde{\rho}^- \circ \tilde{F}$ sur $[0,\delta[$, $h^+ = h^- \equiv 0$ sur $[\delta,+\infty[$ et $T \overset{\text{def}}{=} T_\delta \wedge (\inf \{t>0 \mid X_t^+ = h^+(L_t)$ ou $X_t^- = h^-(L_t)\})$, alors X_T a pour loi μ.

Démonstration : On remarque que $\int_o^{\rho^+(\infty)} \frac{dt}{\tilde{\rho}^+(t)} = \mu(\mathbb{R}_+^*)$ et $\int_o^{\rho^-(\infty)} \frac{dt}{\tilde{\rho}^-(t)} = \mu(\mathbb{R}_-^*)$; on peut alors définir la fonction λ :

$$(3.2) \quad \begin{cases} \lambda(t) = 1 - \int_o^t \left(\frac{1}{\tilde{\rho}^+(s)} + \frac{1}{\tilde{\rho}^-(s)}\right) ds & \text{pour } 0 \le t < a_o \\ \lambda(t) = \mu(\{0\}) & \text{pour } a_o \le t < +\infty \end{cases}$$

λ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Notons F la fonction définie sur $[0,+\infty]$ dans $[0,+\infty]$ par :

$$F(x) = \begin{cases} \int_o^x \frac{2\,du}{\lambda(u)} & \text{pour } x \in [0,a_o[\\ +\infty & \text{pour } x \in [a_o,+\infty] \text{ si } \mu(\{0\}) = 0 \\ \int_o^{a_o} \frac{2\,du}{\lambda(u)} < +\infty & \text{pour } x \in [a_o,+\infty] \text{ si } \mu(\{0\}) > 0 \end{cases}$$

F est croissante sur $[0,+\infty]$, strictement croissante, continue et dérivable sur $[0,a_o[$.

On introduit les deux fonctions H^+ et H^- définies par :

(3.3) $\quad H^+(x) = F(\rho^+(x))$ et $H^-(x) = F(\rho^-(x))$ pour tout x de $\mathbb{R}_+$.

Nous pouvons à présent définir les deux fonctions h^+ et h^- :

(3.4) $\quad$ * si $\mu(\{0\}) = 0$, on note $h^+ = \tilde{H}^+$ et $h^- = \tilde{H}^-$, et on prend $\delta = +\infty$.

* si $\mu(\{0\}) > 0$, on pose $\delta = F(a_o) < +\infty$, $h^+ = \tilde{H}^+$ et $h^- = \tilde{H}^-$ sur $[0,\delta[$, et $h^+ = h^- \equiv 0$ sur $[\delta,+\infty[$.

Pour montrer que X_T a pour loi μ, nous procédons en quatre lemmes. Le premier permet de simplifier les expressions de h^+ et h^- :

<u>LEMME (3.5)</u> : <u>Pour tout</u> x <u>de</u> $\mathbb{R}_+$, <u>on a</u> : $h^+(x) = \tilde{\rho}^+(\tilde{F}(x))$ <u>et</u> $h^-(x) = \tilde{\rho}^-(\tilde{F}(x))$

<u>Démonstration</u> : Il suffit bien sûr d'établir la première formule. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

1) si $x < H^+(+\infty) = F(\rho^+(\infty)) \leq F(a_o)$, alors $x < F(a_o)$, et donc $x = F(\tilde{F}(x))$.
Mais, $h^+(x) = \tilde{H}^+(x) = \inf \{t \mid H^+(t) > x\} = \inf \{t \mid F(\rho^+(t)) > F(\tilde{F}(x))\} =$

$$= \inf \{t \mid \rho^+(t) > \tilde{F}(x)\} ,$$

d'où $h^+(x) = \tilde{\rho}^+(\tilde{F}(x))$.

2) si $x \geq H^+(+\infty)$, alors $\tilde{F}(x) \geq \rho^+(+\infty)$, et donc $\tilde{\rho}^+(\tilde{F}(x) = +\infty = \tilde{H}^+(x) = h^+(x)$.

Le lemme (3.5) permet de montrer le résultat intermédiaire suivant :

<u>LEMME (3.6)</u> : <u>Si</u> x <u>est un réel positif</u>, $x < F(a_o)$, <u>on pose</u>
$\beta(x) = \int_o^x \left(\frac{1}{h^+(t)} + \frac{1}{h^-(t)}\right) dt$, <u>alors</u> $\beta(x) = -2 \log[\lambda(\tilde{F}(x))]$.

Grâce à ce résultat, les fonctions h^+ et h^- vérifient les deux conditions (2.1) et (2.2) nécessaires pour la définition de T :

<u>LEMME (3.7)</u> : <u>Pour tout</u> x <u>de</u> $\mathbb{R}_+$, $x < \delta$, <u>on a</u> $\int_o^x \left(\frac{1}{h^+} + \frac{1}{h^-}\right)(u)du < +\infty$ <u>et</u> $\int_o^\infty \left(\frac{1}{h^+} + \frac{1}{h^-}\right)(u)\, du = +\infty$.

Enfin, on a le :

<u>LEMME (3.8)</u> : <u>Si</u> f <u>est borélienne positive</u>, <u>on a</u> $E(f(X_T)) = \int f(x)\, d\mu(x)$.

Démonstration : Notons $I_1 = \frac{1}{2}\int_o^\delta \frac{f(h^+(t))}{h^+(t)} \exp - \frac{\beta(t)}{2} dt$ et

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_o^\delta \frac{f(-h^-(t))}{h^-(t)} \exp - \frac{\beta(t)}{2} dt$$

en utilisant successivement les lemmes (3.5), (3.6) et la définition de F :

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_o^{\rho^+(\infty)} \frac{f(\tilde{\rho}(t))}{\tilde{\rho}(t)} \lambda(t)\, dF(t) = \int_o^{\rho^+(\infty)} \frac{f(\tilde{\rho}(t))}{\tilde{\rho}(t)} dt = \int_{]o,+\infty[} f(t)\, d\mu(t)$$

On obtient de même $I_2 = \int_{]-\infty,o[} f(t)\, d\mu(t)$, mais d'après (3.6), $\mu(\{0\})$ est donnée par $\mu(\{0\}) = \exp - \frac{1}{2}\int_o^\delta (\frac{1}{h^+} + \frac{1}{h^-})(t)dt$.

QUELQUES EXEMPLES

Exemple 1 : $\mu(dx) = \frac{1}{2\alpha} 1_{[-\alpha,\alpha]}(x)\, dx$, $\alpha > 0$; alors, $H^+(x) = H^-(x) = -x-\alpha\log(1-\frac{x}{\alpha})$ (dans [1], les formules obtenues pour cette loi sont plus simples).

Exemple 2: $\mu(dx) = \alpha\delta_a + (1-\alpha)\,\delta_b$; $0 \le \alpha \le 1$, a et b réels, $a \le b$. On distingue :

1) $a = b$; alors, $T = \inf\{t \mid X_t = a\}$;

2) $0 \le a < b$; $0 < \alpha < 1$.

Si $0 < a < b$ et si $c = -2a\log(1-\alpha)$, alors sur $[0,T_c[$, $T = \inf\{t \mid X_t = a\}$ et sur $[T_c,+\infty[$, $T = \inf\{t \mid X_t = b\}$.

Si $a = 0 < b$ et $c = -2b\log\alpha$, alors $T = \inf\{t \mid X_t = b\} \wedge T_c$.

3) $a < 0 < b$; $0 < \alpha < 1$

$$\text{en notant } c = \begin{cases} \frac{2ab}{b-a}\log\left(\frac{\alpha a + (1-\alpha)b}{a}\right) & \text{si } \alpha a + (1-\alpha)b = \int x\, d\mu(x) \le 0 \\ \frac{2ab}{b-a}\log\left(\frac{\alpha a + (1-\alpha)b}{b}\right) & \text{si } \int x\, d\mu(x) \ge 0 . \end{cases}$$

Si $\int x\, d\mu(x) \le 0$, alors, sur $[0,T_c[$, $T = \inf\{t \mid X_t = a \text{ ou } X_t = b\}$ et sur $[T_c,+\infty[$, $T = \inf\{t \mid X_t = a\}$; si $\int x\, d\mu(x) > 0$, il suffit de changer a en b et b en a.

Exemple 3 : $\mu(dx) = A[1_{\{x\ge a\}}\frac{dx}{x^2} + 1_{\{x\le -b\}}\frac{dx}{x^2}]$ avec $a > 0$, $b > 0$ et A réel vérifiant $A(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) = 1$. Alors

$$h^+(x) = a(1 + \frac{x}{2A}) \quad \text{et} \quad h^-(x) = b(1 + \frac{x}{2A}) .$$

Exemple 4 : $\mu(dx) = \frac{1}{a^2} \exp - \frac{2|x|}{a^2} dx$, alors $h^+(x) = h^-(x) = a\sqrt{x}$.

4.- QUELQUES QUESTIONS D'INTEGRABILITE

Rappelons que μ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$, et T le temps d'arrêt défini par le théorème (3.1).

a) Uniforme intégrabilité de $(X_{t\wedge T})_{t\in \mathbb{R}_+}$

On se propose ici de donner une condition nécessaire et suffisante portant sur μ pour que $(X_{t\wedge T})_{t\in \mathbb{R}_+}$ soit uniformément intégrable. Lorsque la loi μ est symétrique et ne charge pas 0, la condition cherchée est très simple à établir ; nous obtenons :

PROPOSITION (4.1) : Si μ est une loi symétrique : $\forall\, x \in \mathbb{R}_+$, $\mu[0,x] = \mu[-x,0]$ et $\mu(\{0\}) = 0$; alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $(X_{t\wedge T})_{t\in \mathbb{R}_+}$ appartient à H^1 ;

(ii) $(X_{t\wedge T})_{t\in \mathbb{R}_+}$ est uniformément intégrable ;

(iii) $\int |x|\, d\mu(x) < +\infty$.

Démonstration : Il suffit bien sûr de prouver iii) $\Longrightarrow$ ii). Mais si $\int |x|\, d\mu(x) < +\infty$, μ étant symétrique, on a $\rho^+(\infty) = \rho^-(\infty)$ et $h^+ = h^-$; de plus, $\mu(\{0\}) = 0$, donc $\forall\, s$, $s \leq T$, $|X_s| \leq h^+(L_s) \leq h^+(L_T) = |X_T|$; X_T admettant pour loi μ et $\int |x|\, d\mu(x) < +\infty$, alors i) est réalisé.

Si μ n'est pas symétrique, on procède par approximation ; d'après la définition de T, on a le :

LEMME (4.2) : Si μ est une mesure à support compact vérifiant $\int x\, d\mu(x) = 0$, alors $(X_{t\wedge T})_{t\in \mathbb{R}_+}$ est une martingale bornée.

Remarque (4.3) Si μ vérifie $\int |x|\, d\mu(x) < +\infty$ et $\int x\, d\mu(x) = 0$, et μ n'est pas à support compact, par exemple sur $\mathbb{R}_+$, alors pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe ε_n, réel positif tel que $\rho^-(\varepsilon_{n-}) \leq \rho^+(n) \leq \rho^-(\varepsilon_n)$.

Définissons à présent une suite de mesures μ_n qui approxime μ :

<u>LEMME (4.4) : Soit μ vérifiant $\int |x|\, d\mu(x) < +\infty$ et $\int x\, d\mu(x) = 0$. Si μ est à support compact, on pose $\mu_n = \mu$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$, sinon on peut supposer par exemple que $\mu_{|\mathbb{R}_+}$ n'est pas à support compact. On définit K_n^+ et K_n^- par :</u>

$$K_n^+(x) = h^+(x) \quad \text{et} \quad K_n^-(x) = h^-(x) \quad \text{pour} \quad x \in [0, H^+(n-)[\ ,\ K_n^+(x) = K_n^-(x) = 0$$

<u>pour</u> $x \in [H^+(n-), +\infty[$; <u>on note</u> $\delta_n = H^+(n-)$ <u>(les fonctions</u> h^+, h^-, H^+ <u>étant relatives à</u> μ). <u>Alors</u> :

1°. <u>les fonctions K_n^+ et K_n^- et le réel δ_n vérifient les conditions (2.1) et (2.2). On note T_n le temps d'arrêt défini par $T_n = \inf(T, T_{\delta_n})$ (il est associé à K_n^+ et K_n^-) et μ_n la loi de X_{T_n}.</u>

2°. $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ <u>est une suite croissante de temps d'arrêt qui converge vers</u> T.

3°. <u>pour tout n de $\mathbb{N}^*$, μ_n est à support compact et</u> $\int x\, d\mu_n(x) = 0$.

Grâce au lemme précédent, on a, à l'aide du principe de démonstration du théorème (3.4) de [1] :

<u>PROPOSITION (4.5)</u> : <u>La martingale $(X_{t\wedge T})_{t \in \mathbb{R}_+}$ est uniformément intégrable si et seulement si</u> : $\int |x|\, d\mu(x) < +\infty$ <u>et</u> $\int x\, d\mu(x) = 0$.

<u>PROPOSITION (4.6)</u> : <u>Si μ vérifie les conditions</u> $\int |x|\, d\mu(x) < +\infty$ <u>et</u> $\int x\, d\mu(x) = 0$, <u>alors</u> $E(X_T^2) = E(T)$.

<u>Démonstration</u> : Il suffit en effet de remarquer que, si f est borélienne, $f(0) = 0$, on a : $E(f(X_{T_n})) = E(f(X_T) 1_{\{L_T < \delta_n\}})$ où (T_n) est défini en (4.4), 1°), et donc :
$\lim_{n \to +\infty} E(f(X_{T_n})) = \lim_{n \to +\infty} \int f(x)\, d\mu_n(x) = \int f(x)\, d\mu(x)$.

b) <u>Appartenance de $(X_{t\wedge T})_{t \in \mathbb{R}_+}$ à H^1</u>

Soit S_t le processus défini par $S_t = \sup_{s \le t} X_s$. Afin de mettre en évidence le caractère symétrique de notre étude, donnons une condition nécessaire et suffisante portant sur μ pour que S_T soit intégrable :

<u>PROPOSITION (4.7)</u> : <u>Les assertions suivantes sont équivalentes</u> :

i) $E(S_T) < +\infty$;

ii) $\begin{cases} E(X_T^-) \le E(X_T^+) \ \underline{\text{et}}\ E[(X_T^+ \log^+(X_T)] < +\infty & \underline{\text{si}}\ \mu(\{0\}) > 0 \\ E(X_T^+) + \displaystyle\int_0^\infty [\frac{\rho^-(x) - \rho^+(x)}{x}]\, 1_{\{\rho^-(x) \le \rho^+(x)\}}\, dx < +\infty & \underline{\text{si}}\ \mu(\{0\}) = 0. \end{cases}$

Démonstration : D'après [3], si $R \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{s \mid s \le T,\ X_s = 0\}$, on remarque que : $S_T = X_T^+$ sur $\{X_T^+ > 0\}$, $S_T = S_R$ sur $\{X_T^+ < 0\}$ et $S_T = S_{T_\delta}$ sur $\{X_T^+ = 0\}$ et on peut alors expliciter la loi de S_T :

$$(4.8)\qquad E[f(S_T)] = \int_0^\infty f(x)\, d\mu(x) + \frac{1}{2}\int_0^\delta \frac{1}{h^-(u)}\, E\, f(S_{T_u})1_{\{T_u \le T\}}]du + E[f(S_{T_\delta})1_{\{T_\delta = T\}}],$$

pour toute fonction f borélienne de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

Introduisons les notations suivantes :

$$(4.9)\qquad \alpha(u,x) = P(S_{T_u} < x,\ T_u \le T) \quad \text{avec} \quad u \in \overline{\mathbb{R}}_+,\ u \le \delta,\ x \in \mathbb{R}_+$$

$$g_1(x) = \frac{1}{2}\int_0^\delta \frac{1}{h^-(u)}\,[\lambda(\widetilde{F}(u)) - \alpha(u,x)]\, dx$$

en appliquant la formule (4.8) avec $f = 1_{[x,+\infty[}$, puis le lemme (3.6), il vient :

$$(4.10)\quad P(S_T \ge x) = \mu[x,+\infty[+ g_1(x) + \mu(\{0\}) - \alpha(\delta,x)\ .$$

Remarque : Si $E(S_T) < +\infty$, alors $E(X_T^-) = \rho^-(\infty) \le E(X_T^+) = \rho^+(\infty) < +\infty$, si $E(S_T) < +\infty$. Sachant que $X_t^+ - \frac{1}{2} L_t$ est une martingale locale continue, et que de plus : $X_t^+ \le S_T$ pour tout $t \in [0,T]$, et $E(S_T) < +\infty$, il vient, en localisant :

$$E(X_T^+) = \frac{1}{2} E(L_T) \le E(S_T) < +\infty\ .$$

Mais en raisonnant cette fois avec $X_t^- - \frac{1}{2} L_t$, en localisant à nouveau, et en appliquant le lemme de Fatou, on obtient : $E(X_T^-) \le \frac{1}{2} E(L_T) = E(X_T^+)$.

On supposera dans la suite de la démonstration $\rho^-(\infty) \le \rho^+(\infty) < +\infty$.

Le lemme suivant nous donne l'expression de $\alpha(u,x)$:

LEMME (4.11) : Pour tout u, $u \in \overline{\mathbb{R}}_+$, $u \le \delta$, et tout x de $\mathbb{R}_+$, on a :

$$\alpha(u,x) = P(S_{T_u} < x,\ T_u \le T) = \exp - \frac{1}{2}\int_0^u \left(\frac{1}{h^+(t)\wedge x} + \frac{1}{h^-(t)}\right) dt$$

Démonstration : Soit $u \in [0,\delta]$; notons $h_1^+(t) = h^+(t) \wedge x$ et $h_1^-(t) = h^-(t)$ pour $t < u$ et $h_1^+(t) = h_1^-(t) = 0$ pour $t \geq u$. (les fonctions h^+ et h^- étant relatives à μ). On introduit le temps d'arrêt $T_1' = \inf\{t \mid t \geq 0,\ X_t^+ = h_1^+(L_T)$ ou $X_t^- = h_1^-(L_T)\} \wedge T_u$. Alors, $\{S_{T_u} < x\} \cap \{T_u \leq T\} = \{X_{T_1'} = 0\}$. Il suffit maintenant d'appliquer la formule (4.1) de [3] et (4.9).

On constate que pour $u \in [0,H^+(x) \wedge H^-(x)[$, on a : $h^-(u) \leq x$, $h^+(u) \leq x$ et $\alpha(u,x) = \lambda(\tilde{F}(u))$; en utilisant le lemme (3.5), on peut modifier g_1 :

$$(4.12) \qquad g_1(x) = \int_{\rho^+(x)}^{a_o} \frac{1}{\tilde{\rho}^-(t)} (1 - \exp - b(t,x))\, dt, \qquad \text{avec}$$

$$b(t,x) = 1_{\{t \geq \rho^+(x)\}} \int_{\rho^+(x)}^{t} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tilde{\rho}^+(s)}\right) \frac{ds}{\lambda(s)} .$$

Remarque (4.13) : Puisque $\rho^-(\infty) \leq \rho^+(\infty) < +\infty$, $\int_{\rho^+(x)}^{a_o} \frac{1}{\tilde{\rho}^+(t)} dt = \mu[x,+\infty[$ et $\int_{\rho^-(x)}^{a_o} \frac{1}{\tilde{\rho}^-(t)} dt = \mu]-\infty,x]$ sont intégrables par rapport à $(1_{\mathbb{R}_+} dx)$.

LEMME (4.14) : Soit ϕ la fonction définie par : $\phi(x) = \frac{a_o - \rho^+(x)}{x}$ si $\mu(\{0\}) > 0$, $\phi(x) = \frac{[\rho^-(x) - \rho^+(x)] \vee 0}{x}$ si $\mu(\{0\}) = 0$. Alors, il existe c, $0 < c \leq \frac{1}{2}$, tel que pour tout x, $x \geq 1$:

$$c\, \phi(x) - \frac{3}{2} P(|X_T| \geq x) \leq P(S_T \geq x) \leq \phi(x) + 2\, P(|X_T| \geq x)$$

Démonstration du lemme (4.14) : D'après (4.12), (4.13), et en notant $g_2(x) = \int_{\rho^+(x)}^{a_o} \left(\frac{1}{\tilde{\rho}^+(t)} + \frac{1}{\tilde{\rho}^-(t)}\right)(1 - \exp - b(t,x))\, dt$, on a :

$$(4.15) \qquad g_2(x) - \mu[x,+\infty[\;\leq g_1(x) \leq g_2(x) \;.$$

En intégrant g_2 par parties avec $\lambda'(t) = -\left(\frac{1}{\tilde{\rho}^+(t)} + \frac{1}{\tilde{\rho}^-(t)}\right)$ et en remarquant que $\lambda(a_o) \exp - b(a_o,x) = \alpha(\delta,x)$ et $\mu(\{0\}) = \lambda(a_o)$, il vient :

$$g_2(x) + \mu(\{0\}) - \alpha(\delta,x) = \int_{\rho^+(x)}^{a_o} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tilde{\rho}^+(t)}\right) \exp - b(t,x)\, dt.$$

Si l'on utilise (4.10), (4.15) et (4.13), on obtient les inégalités :

(4.16) $\quad g_3(x) - \mu[x,+\infty[\leq P(S_T \geq x) \leq g_3(x) + \mu[x,+\infty[$, avec :

(4.17) $\quad g_3(x) = \frac{1}{x}\int_{\rho^+(x)}^{a_o} \exp - b(t,x)\, dt$.

Nous distinguerons deux cas :

1°.- $\mu(\{0\}) > 0$

Mais $\lambda(t) \geq \mu(\{0\})$; pour $x \geq 1$ et $t \geq \rho^+(x)$, il suffit alors de remarquer :

$$b(t,x) \leq \int_{\rho^+(x)}^{t} \frac{1}{x}\cdot\frac{ds}{\lambda(s)} \leq \frac{1}{x\mu(\{0\})}(t - \rho^+(x)) \leq \frac{a_o}{\mu(\{0\})} < +\infty$$

2°.- $\mu(\{0\}) = 0$

Soit t, $t \geq \rho^+(x) \vee \rho^-(x)$, $\lambda_1(t) \overset{\text{def}}{=} \mu]-\infty,-x] + \int_t^{a_o} \frac{ds}{\tilde{\rho}^+(s)}$, on a successivement : $\lambda(t) \leq \lambda_1(t)$ et $b(t,x) \geq \int_{\rho^+(x)\vee\rho^-(x)}^{t} (\frac{1}{x} - \frac{1}{\tilde{\rho}^+(s)})\frac{ds}{\lambda_1(s)}$, on en déduit

$$\frac{1}{x}\int_{\rho^+(x)\vee\rho^-(x)}^{a_o} \exp - b(t,x)dt \leq \lambda_1(\rho^+(x)\vee\rho^-(x))[1 - \exp - \frac{1}{x}\int_{\rho^+(x)\vee\rho^-(x)}^{a_o}\frac{ds}{\lambda_1(s)}]$$

$$\leq \lambda_1(\rho^+(x) \vee \rho^-(x)) \;;$$

en utilisant de plus la remarque (4.13), il vient :

(4.18) $\quad g_4(x) \leq g_3(x) \leq g_4(x) + \mu]-\infty,-x] + \mu[x,+\infty[$, avec

(4.19) $\quad g_4(x) = 1_{\{\rho^+(x)<\rho^-(x)\}}\int_{\rho^+(x)}^{\rho^-(x)} \exp - b(t,x)\, dt$.

Mais la définition de g_4 prouve :

(4.20) $\quad g_4(x) \leq \frac{1}{x}\, 1_{\{\rho^+(x)<\rho^-(x)\}}(\rho^-(x) - \rho^+(x)) = \phi(x).$

Soit $t \in [\rho^+(x),\rho^-(x)]$, alors $\tilde{\rho}^-(t) \leq x$, $\lambda(t) \geq \lambda_2(t) \overset{\text{def}}{=} \lambda(\rho^-(x)) +$

$+ \int_t^{\rho^-(x)} (\frac{1}{x} + \frac{1}{\tilde{\rho}^+(s)})\, ds$ et $b(t,x) \leq \int_{\rho^+(x)}^{t} (\frac{1}{x} - \frac{1}{\tilde{\rho}^+(t)})\frac{dt}{\lambda_2(t)} = \frac{2}{x}\int_{\rho^+(x)}^{t}\frac{ds}{\lambda_2(s)}$

$- \log [\frac{\lambda_2(\rho^+(x))}{\lambda_2(t)}]$; en intégrant, on obtient :

$$(4.21)\quad \frac{1}{x}\int_{\rho^+(x)}^{\rho^-(x)} \exp - b(t,x)dt \geq \frac{\lambda_2(\rho^+(x))}{2}\,(1-\exp-\frac{2}{x}\int_{\rho^+(x)}^{\rho^-(x)}\frac{ds}{\lambda_2(s)}) \quad .$$

Mais $\log(\lambda_2(\rho^+(x))) - \log(\lambda_2(\rho^-(x))) - \frac{2}{x}\int_{\rho^+(x)}^{\rho^-(x)}\frac{ds}{\lambda_2(s)} = \int_{\rho^+(x)}^{\rho^-(x)}(\frac{1}{\tilde{\rho}^+(s)} - \frac{1}{x})\frac{ds}{\lambda_2(s)} \leq 0,$

donc :

$$(4.22)\quad \lambda_2(\rho^+(x))\exp-(\frac{2}{x}\int_{\rho^+(x)}^{\rho^-(x)}\frac{ds}{\lambda_2(s)}) \leq \lambda_2(\rho^-(x)) = \lambda(\rho^-(x)) \leq \mu[x,+\infty[+ \mu\,]-\infty,-x] \;.$$

En remarquant que $\lambda_2(\rho^+(x)) \geq \frac{1}{x}(\rho^-(x) - \rho^+(x)) = \phi(x)$, et en utilisant (4.22), (4.21) et (4.19), on montre $g_4(x) \geq \frac{1}{2}\,[\phi(x) - \mu(y \mid |y| \geq x)]$. Grâce à (4.18), (4.20) et (4.16), il vient :

$$\frac{1}{2}\,\phi(x) - \frac{3}{2}\,P(|X_T| \geq x) \leq P(S_T \geq x) \leq \phi(x) + 2\,P(|X_T| \geq x) \quad ,$$

ce qui achève les démonstrations du lemme (4.14), et de la proposition (4.7), en utilisant (4.14) et à nouveau (4.13).

L'énoncé suivant donne une caractérisation de l'appartenance à H^1 de $(X_{t\wedge T})_{t\in\mathbb{R}_+}$:

PROPOSITION (4.23) : La martingale $(X_{t\wedge T})_{t\in\mathbb{R}_+}$ appartient à H^1 si et seulement si :

- X_T appartient à L log L lorsque $P(X_T = 0) > 0$
- $E|X_T| + \int_0^\infty \frac{1}{x}\,|\,E[X_T, |X_T| \geq x]\,|\,dx < +\infty$ lorsque $P(X_T = 0) = 0$.

Remarque (4.24) : Lorsque $\mu(\{0\}) = 0$ et μ symétrique, en notant $X_T^* = \sup_{s\leq t}|X_s|$, on a l'égalité : $X_T^* = |X_T|$; il est ainsi clair que $(X_{t\wedge T})_{t\in\mathbb{R}_+}$ appartient à H^1 si et seulement si $\int |t|\,d\mu(t) < +\infty$.

5.- CALCUL DE LA LOI DU COUPLE (X_T,T) .

Etudions d'abord le cas symétrique.

PROPOSITION (5.1) : Si μ est une mesure de probabilité symétrique ($\mu[0,x] = \mu[-x,0]\ \forall\, x > 0$) sur $\mathbb{R}$, ne chargeant pas les points, on a :

$$E\,[f(X_T)\exp - \frac{p^2}{2} T] = \int_0^\infty \{(f(x) + f(-x))\,\frac{px}{sh(px)}\,\frac{1}{(1-2\mu[0,x])}$$

$$\exp - 2p \int_0^x \frac{u\coth pu}{1-2\mu[0,u]}\,d\mu(u)\}\,d\mu(x)\ ,$$

pour toute fonction f borélienne de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ et tout réel p, $p \neq 0$.

Pour l'étude du cas général, on utilisera le :

LEMME (5.2) : Si f_1 et g_1 sont deux fonctions boréliennes de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ que l'on prolonge à $\overline{\mathbb{R}}_+$ en posant $f_1(+\infty) = g_1(+\infty) = 0$, alors :

$$\int_0^{a_0} f_1(\tilde{\rho}^+(t))g_1(t)dt = \int_{\mathbb{R}_+^*} f_1(u)u\ g_1^+(u)\ d\mu(u) \quad \text{et}$$

$$\int_0^{a_0} f_1(\tilde{\rho}^-(t))g_1(t) = -\int_{\mathbb{R}_-^*} f_1(-u)u\ g_1^-(u)\ d\mu(u)$$

avec $g_1^+(t) = g_1(\rho^+(t))$ si $t \geq 0$ et $\mu(\{t\}) = 0$; $g_1^+(t) = \dfrac{1}{\Delta\rho^+(t)} \displaystyle\int_{\rho^+(t-)}^{\rho^+(t)} g_1(u)du$ si $t \geq 0$, $\mu(\{t\}) > 0$

$g_1^-(t) = g_1(\rho^-(-t))$ si $t \leq 0$ et $\mu(\{t\}) = 0$; $g_1^-(t) = \dfrac{1}{\Delta\rho^-(-t)} \displaystyle\int_{\rho^-((-t)-)}^{\rho^-(-t)} g_1(u)du$ si $t \leq 0$ et $\mu(\{t\}) > 0$.

On peut alors énoncer le résultat général :

PROPOSITION (5.3) : Notons $a_p(x) = \dfrac{1}{\lambda(x)} \exp[-p \displaystyle\int_0^x \{\coth(p\tilde{\rho}^+(t)) + \coth(p\tilde{\rho}^-(t))\}\,\frac{dt}{\lambda(t)}]$ où $p \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leq x$. Pour toute fonction borélienne positive de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, et tout réel p non nul, on a :

$$E[f(X_T)\exp(-\frac{p^2}{2} T)] = f(0)\exp\,[-p\int_0^{a_0}\{\coth(p\tilde{\rho}^+(t)) + \coth(p\tilde{\rho}^-(t))\}\,\frac{dt}{\lambda(t)}] +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^*} f(u)\,\frac{pu}{sh(pu)}\,\bar{a}_p(u)\ d\mu(u)$$

avec $\bar{a}_p(u) = a_p^+(u)$ si $u > 0$ et $\bar{a}_p(u) = a_p^-(u)$ si $u < 0$ et $\coth(p\infty) = 0$.

Dans le cas où μ est diffuse, on a le :

COROLLAIRE (5.4) : Si μ ne charge pas les points, on a :

$$E[f(X_T) \exp(-\frac{p^2}{2} T)] = \int_{\mathbb{R}} f(u) \frac{pu}{\operatorname{sh} pu} \bar{a}_p(u)\, d\mu(u) \quad ,$$

pour toute fonction f borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ et tout réel p, non nul, avec $\bar{a}_p(u) = a_p(\rho^+(u))$ si $u > 0$ et $\bar{a}_p(u) = a_p(\rho^-(-u))$ si $u < 0$, a_p étant la fonction définie en (5.3).

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. AZEMA et M. YOR : Une solution simple au problème de Skorokhod. Séminaire de probabilités XIII, Lecture Notes in Math.,721 Springer(1979).

[2] J. AZEMA et M. YOR : Le problème de Skorokhod : compléments à l'exposé précédent. Même référence.

[3] T. JEULIN et M. YOR : Sur les distributions de certaines fonctionnelles du mouvement brownien. Séminaire de probabilités XV, Lecture Notes, 850, Springer (1981).

Pierre VALLOIS

3, rue Victor Hugo

92700 COLOMBES.