SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MAURIZIO PRATELLI

Majoration dans L^p du type Métivier-Pellaumail pour les semimartingales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 17 (1983), p. 125-131

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1983__17__125_0>

MAJORATIONS DANS L^p DU TYPE METIVIER-PELLAUMAIL POUR LES SEMIMARTINGALES.

PAR MAURIZIO PRATELLI.

Dans son cours à l'école d'été de Probabilités de Saint Flour (voir [3]), Kunita démontre des résultats de regularité des intégrales stochastiques $\int H_s(\omega,\lambda)dX_s(\omega)$ (X martingale continue) par rapport au paramètre λ par deux méthodes différentes : par application du lemme de Kolmogorov au "processus à deux indices" $(\lambda,t) \to \int_{]0,t]} H_s(\lambda)dX_s$ (mais cette méthode ne peut s'appliquer si X n'est pas continue), et en utilisant les espaces de Sobolev. L'outil essentiel de cette deuxième méthode est l'inégalité de Burkholder pour les martingales continues : on n'a aucune difficulté à étendre les résultats de Kunita à toutes les semimartingales si l'on dispose d'une inégalité qui puisse jouer le rôle de l'inégalité de Burkholder. L'objet de cette note est d'établir une telle inégalité: il s'agit d'une extension de l'inégalité, démontrée par Métivier et Pellaumail, qui caractérise les semimartingales.

En rédigeant cette note, je me suis aperçu que le livre tout récent de Métivier [5] contient le corollaire 1.3 ci-dessous (voir chapitre 8, exercice E.5) ; le résultat que je démontre toutefois est un peu plus général et sa démonstration une simple conséquence des méthodes de [4] : on remarquera qu'on peut montrer le résultat principal sans parler de semimartingales!

Il faut aussi signaler que Meyer [8] obtient des résultats de régularité par des méthodes assez différentes : les inégalités pour les intégrales stochastiques établies dans [2]. Je crois toutefois que la méthode du "processus de contrôle" garde de l'intérêt par sa simplicité.

1. UNE INEGALITE.

Soit $(\Omega,\underline{F},(\underline{F}_t),\mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré, vérifiant les conditions habituelles de [1] ; X est un processus adapté à trajectoires c.à.d.l.à.g. , et on écrit comme d'habitude $X_{t-} = \lim_{s\uparrow t} X_s$ et $\Delta_t X = X_t - X_{t-}$.

Je désigne par S(X) le processus croissant $S(X)_t = (\sum_{s\leq t} (\Delta_s X)^2)^{1/2}$; on remarquera que si M est une martingale purement discontinue on a $S(M)_t^2=[M]_t$, et que si X est une semimartingale on a $S(X)_t<+\infty$ p.s. pour tout t.

Je rappelle que Métivier et Pellaumail ont montré (voir [7] pag.129) que X est une semimartingale si et seulement s'il existe un processus croissant adapté A tel que pour tout processus prévisible élémentaire H et tout temps d'arrêt T on ait

$$(1.1)\qquad E[\sup_{0<s<T}(\int_{]0,s]}HdX)^2] \leq E[A_{T-}.\int_{]0,T[}H_s^2dA_s]$$

(on dit alors que A contrôle X) ; l'inégalité (1.1) s'étend alors évidemment à tous les processus prévisibles bornés. J'écris comme d'habitude $H.X=\int HdX$ et $X_t^*=\sup_{s\leq t}|X_s|$, et encore $H.X_t^*$ au lieu de $(H.X)_t^*$ (sans danger de confusion, car je n'intégrerai jamais par rapport au processus croissant X^*) : on peut aussi écrire plus simplement $(H.X_{T-}^*)^2$ au lieu de $\sup_{0<s<T}(\int_{]0,s]}HdX)^2$.

Dans toute la suite, F désigne une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}_+$, nulle en zéro, croissante, continue à droite, telle que $F(x)>0$ pour $x>0$; on dit que F est <u>modérée</u> (à croissance modérée) s'il existe une constante k telle que $F(2x)\leq k.F(x)$ pour tout $x>0$.

<u>THEOREME</u> 1.2 <u>Soit</u> X <u>une semimartingale contrôlée par</u> A, <u>et soit</u> $B_t=A_t+S(X)_t$: <u>pour toute fonction modérée</u> F <u>il existe une constante</u> c (<u>ne dépendant que de</u> F) <u>telle que l'on ait, pour tout processus prévisible borné</u> H

$$E[F(H.X_{T-}^*)] \leq c\ E[F(\ (B_{T-}.\int_{]0,T[}H_s^2dB_s)^{1/2})]\ .$$

<u>Démonstration</u> Soient a_t et b_t les deux processus croissants $a_t=H.X_t^*$ et $b_t=(B_t.\int_{]0,t]}H_s^2dB_s)^{1/2}$. Il suffit de montrer que pour tout couple R,T de temps d'arrêt avec $R\leq T$ on a $E[(a_{T-}-a_{R-})^2]\leq h.E[b_{T-}^2.I_{\{R<T\}}]$ (avec h constante convénable) et d'appliquer ensuite le lemme 1.1 de [4] (voir aussi les remarques aux pages 31 et 35) pour avoir le résultat.

Le processus $HI_{]R,+\infty[}$ est encore prévisible : si $t\geq R$ on a

$(H.X)_t-(H.X)_{R-}=(HI_{]R,+\infty[}.X)_t+H_R\Delta_R X$. On vérifie aisément l'inégalité suivante :

$H.X^*_{T-}-H.X^*_{R-} \leq HI_{]R,+\infty[}.X^*_{T-} + |H_R\Delta_R X|\ I_{\{R<T\}}$ et donc

$(H.X^*_{T-}-H.X^*_{R-})^2 \leq 2(HI_{]R,+\infty[}.X^*_{T-})^2 + 2\ H^2_R(\Delta_R X)^2 I_{\{R<T\}}.$

Pour le premier terme, on a

$E[(HI_{]R,+\infty[}.X^*_{T-})^2] \leq E[A_{T-}.\int_{]0,T[}(HI_{]R,+\infty[})^2 dA_r] = E[A_{T-}.\int_{]R,T[}H^2_r dA_r]$

$\leq E[(A_{T-}.\int_{]0,T[}H^2_r dA_r)I_{\{R<T\}}]$.

Pour le deuxième, on a

$H^2_R(\Delta_R X)^2 = H^2_R(S(X)_R+S(X)_{R-})(S(X)_R-S(X)_{R-}) \leq 2\ S(X)_R\ H^2_R(S(X)_R-S(X)_{R-})$

$\leq 2\ S(X)_R.\int_{]0,R]}H^2_s dS(X)_s$, et donc

$H^2_R(\Delta_R X)^2 I_{\{R<T\}} \leq 2(S(X)_{T-}.\int_{]0,T[}H^2_s dS(X)_s)I_{\{R<T\}}.$

On vérifie donc sans peine que

$E[(H.X^*_{T-}-H.X^*_{R-})^2] \leq 6\ E[(B_{T-}.\int_{]0,T[}H^2_s dB_s)I_{\{R<T\}}]$

ce qui achève la démonstration.

La majoration dans L^p proprement dite est le corollaire suivant :

<u>COROLLAIRE</u> 1.3 <u>Avec les notations du théorème précédent, on a pour tout</u> $p>2$

$E[(H.X^*_{T-})^p] \leq c_p\ E[B^{p-1}_{T-}.\int_{]0,T[}|H_s|^p dB_s].$

<u>Démonstration</u> En prenant $F(x)=x^p$, on a (compte tenant de l'inégalité de Holder) :

$E[(H.X^*_{T-})^p] \leq c_p\ E[(B_{T-}.\int_{]0,T[}H^2_s dB_s)^{p/2}] \leq c_p\ E[B^{p-1}_{T-}.\int_{]0,T[}|H_s|^p dB_s]$.

<u>REMARQUE</u> 1.4 L'inégalité du théorème 1.2 n'est pas vraie, en général, avec le processus croissant A_t au lieu de B_t (voir à cet effet l'exemple 2.2). Toutefois on a l'inégalité $E[F(H.X^*_{T-})] \leq c\ E[F(\ (A_{T-}.\int_{]0,T[}H^2_s dA_s)^{1/2})]$ dans les deux cas suivants :

a) $F(x) = G(x^2)$ avec G concave (il suffit pour cela de remarquer que l'inégalité (1.1) permet d'appliquer directement le lemme 1.3 de [4], qui donne aussi la constante c=2).

b) X est une semimartingale restreinte strictement contrôlée par A (voir [9] définition 1.1 et théorème 1.3) : dans ce cas H est plus généralement optionnel borné. On doit cette fois répéter la démonstration du théorème 1.2 avec $HI_{[R,+\infty[}$ au lieu de $HI_{]R,+\infty[}$.

2. QUELQUES CONSEQUENCES.

Soit M une martingale de carré intégrable, $M=M^c+M^d$ sa décomposition en une somme d'une martingale continue et d'une somme compensée de sauts, et $M^d=M^p+M^i$ où M^p est la somme compensée des sauts prévisibles et M^i des sauts totalement inaccessibles. Métivier et Pellaumail (voir [7] pag. 124) ont montré l'inégalité

$$E[(M^*_{T-})^2] \leq 4\ E[\ \langle M\rangle_{T-} + [M^p]_{T-}\ ].$$

Nous avons l'extension suivante :

<u>THEOREME</u> 2.1 <u>Pour toute</u> F <u>modérée, on a</u>

$$E[F(M^*_{T-})] \leq c\ E[F(\ (\langle M\rangle_{T-}+[M^d]_{T-})^{1/2})]$$

<u>avec</u> c <u>constante ne dépendante que de</u> F.

<u>Démonstration</u> Soit H prévisible borné : on a

$$E[(H.M^*_{T-})^2] \leq 4\ E[\ \langle(H.M)\rangle_{T-}+[(H.M)^p]_{T-}] = 4\ E[\int_{]0,T[}H^2_s d(\langle M\rangle_s+[M^p]_s)]$$

$$\leq 8\ E[A_{T-}.\int_{]0,T[}H^2_s dA_s] \qquad \text{avec } A_t=(\langle M\rangle_t+[M^p]_t)^{1/2}$$

(pour la dernière inégalité, on rappellera que $dA^2_t=(A_t+A_{t-})dA_t\leq 2A_t dA_t$). En remarquant que $S(M)^2_t=[M^d]_t=[M^p]_t+[M^i]_t$, on a $A_t+S(M)_t \leq 2(\langle M\rangle_t+[M^d]_t)^{1/2}$, et en prenant H=1 , la thèse du théorème 1.2 est précisément l'inégalité cherchée.

On montre dans l'exemple suivant que l'inégalité précédente n'est pas vraie en général avec $[M^p]_t$ au lieu de $[M^d]_t$; on considère à cet effet une martingale

M somme compensée de sauts totalement inaccessibles (donc $[M^p]_t=0$) et la fonction $F(x)=x^p$ avec $p>2$.

EXEMPLE 2.2 Soit $\Omega=]0,+\infty]$, $d\mathbb{P}(x)=e^{-x}dx$, $T(x)=x$ et $\underline{F}_t$ la plus petite filtration (completée et rendue continue à droite) pour laquelle T est un temps d'arrêt: $\underline{F}_t$ contient les boréliens de $]0,t]$ et l'atome $]t,+\infty[$, et T est totalement inaccessible. Soit A borélienne positive, telle que $\int_0^{+\infty}A(x)d\mathbb{P}(x)=\int_0^{+\infty}A(x)e^{-x}dx<+\infty$: considérons le processus croissant adapté $A_t(x)=A(x)I_{\{t\geq T\}}(x)=A(x)I_{]0,t]}(x)$, dont le compensateur prévisible est $\tilde{A}_t(x)=\int_0^{t\wedge x} A(y)dy$. En effet, puisque sur $]0,s]$ on a $A_t-A_s=\tilde{A}_t-\tilde{A}_s=0$, il suffit de vérifier que $\int_s^{+\infty}(A_t-A_s)e^{-x}dx=\int_s^{+\infty}(\tilde{A}_t-\tilde{A}_s)e^{-x}dx$. Le premier terme coincide avec $\int_s^t A(x)e^{-x}dx$ et le deuxième avec $\int_s^t(\int_s^x A(y)dy)e^{-x}dx + \int_t^{+\infty}(\int_s^t A(y)dy)e^{-x}dx$: l'égalité entre ces deux derniers est un simple exercice. Soit maintenant $M_t=A_t-\tilde{A}_t$: on a $[M]_t(x)=A^2(x)I_{]0,t]}(x)$ et $\langle M\rangle_t(x)=\int_0^{t\wedge x} A^2(y)dy$.

Si l'inégalité $E[(M^*_{T-})^p]\leq c_p.E[\langle M\rangle_{T-}^{p/2}]$ (p>2) était vraie, on aurait pour $T=+\infty$ $E[(M^*_\infty)^p]\leq c_p.E[\langle M\rangle_\infty^{p/2}]$ et aussi $E[\ [M]_\infty^{p/2}]\leq c'_p.E[\langle M\rangle_\infty^{p/2}]$ (on rappellera que $E[\ [M]_\infty^{p/2}]\leq d_p.E[(M^*_\infty)^p]$: inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, voir par example [4]). Mais $[M]_\infty(x)=A^2(x)$ et $\langle M\rangle_\infty(x)=\int_0^x A^2(y)dy$; on peut trouver facilement A telle que $\int_0^{+\infty} A^p(x)e^{-x}dx=+\infty$ et $\int_0^{+\infty} A^2(y)dy<+\infty$, et dans ce cas $E[\ [M]_\infty^{p/2}]=+\infty$ et $E[\langle M\rangle_\infty^{p/2}]<+\infty$.

REMARQUE 2.3 Je signale brièvement, sans entrer dans les détails, que l'inégalité du th. 2.1 peut s'appliquer à l'integrale stochastique par rapport aux mesures aléatoires-martingales (je suis de très près la présentation donnée dans [6] pag.111-119) : si on considère, à la pag. 117 de [6], une suite de temps d'arrêt à graphes disjoints qui porte tous les sauts du processus F^q (pas seulement les sauts prévisibles) on obtient une inégalité analogue à la (1.4.6) avec une fonction moderée quelconque F au lieu de $F(x)=x^2$.

Montrons maintenant, à titre d'exemple, la "traduction" pour les semimartingales générales du th.6.2 de [3].

Soit Λ un domaine borné de $\mathbb{R}^d$: je rappelle que l'espace de Sobolev $W_{p,m}(\Lambda)$ est le complété de $C^m(\Lambda)$ pour la norme $||f||^p_{p,m} = \Sigma_{|\alpha|\leq m} \int_\Lambda |D^\alpha f|^p d\lambda$.

Si $f \in W_{p,m}(\Lambda)$ et α est un multi-indice avec $|\alpha|\leq m$, il existe une fonction $f^\alpha \in L^p(\Lambda)$ et une suite f_n d'éléments de $C^m(\Lambda)$ telle que $f_n \to f$ et $D^\alpha f_n \to f^\alpha$ dans $L^p(\Lambda)$: on dit que f^α est la dérivée forte de f (qui est aussi dérivée faible, c'est-à-dire dérivée au sens des distributions) et on écrit, avec la notation des dérivées classiques, $f^\alpha = D^\alpha f$. Soit maintenant $H(\omega,s,\lambda)$ définie sur $\Omega\times]0,\infty[\times\Lambda$, mesurable pour la tribu $\underline{P}\times\underline{B}(\Lambda)$ ($\underline{P}$ tribu prévisible sur $\Omega\times]0,\infty[$, $\underline{B}(\Lambda)$ tribu de Borel sur Λ) ; supposons que, pour presque tout ω, pour tout s $H(\omega,s,.)$ soit un élément de $W_{p,m}(\Lambda)$ $(p\geq 2)$ et que $D^\alpha H$ soit encore mesurable pour la tribu $\underline{P}\times\underline{B}(\Lambda)$.

Soit X une semimartingale, B le processus croissant qui résulte du th.1.2 et supposons que $\int_{]0,t]} ||H||^p_{p,m}\, dB_s < +\infty$ p.s. pour tout t : <u>il existe une version</u> $L_t(\lambda)$ <u>de l'intégrale</u> $\int H(\lambda)dX$ <u>telle que, pour presque tout</u> ω, <u>pour tout</u> t $L_t(\lambda) \in W_{p,m}(\Lambda)$ <u>et telle que</u> $D^\alpha L_t = \int_{]0,t]} (D^\alpha H)dX$.

On peut supposer, par arrêt, que $E[B^{p-1}_\infty . \int_{]0,\infty[} ||H||^p_{p,m}\, dB_s] < +\infty$; la thèse est évidemment vraie pour un processus (prévisible élémentaire) de la forme $\sum_{i=1}^n H_i(\omega,\lambda) I_{]t_i,t_{i+1}]}(s)$. Pour un tel processus on a

$$E[\sup_{0<t<\infty} ||\int_{]0,t]} HdX||^p_{p,m}] = E[\sup_{0<t<\infty} \Sigma_{|\alpha|\leq m} \int_\Lambda d\lambda |\int_{]0,t]} (D^\alpha H)dX|^p]$$

$$\leq \Sigma_{|\alpha|\leq m} \int_\Lambda d\lambda\; E[\sup_{0<t<\infty} |\int_{]0,t]} (D^\alpha H)dX|^p]$$

$$\leq c_p . \Sigma_{|\alpha|\leq m} \int_\Lambda d\lambda\; E[B^{p-1}_\infty . \int_{]0,\infty[} |D^\alpha H|^p dB_s] = c_p . E[B^{p-1}_\infty . \int_{]0,\infty[} ||H||^p_{p,m}\, dB_s] .$$

Soit maintenant H^n une suite de processus prévisibles élémentaires telle que $\lim_{n\to\infty} E[B^{p-1}_\infty . \int_{]0,\infty[} ||H-H^n||^p_{p,m}\, dB_s] = 0$. En posant $L^n_t = \int H^n dX$, quitte à extraire une sous-suite, $L^n_t(\lambda)$ converge p.s. dans $D([0,\infty[,W_{p,m}(\Lambda))$ (espace des fonctions c.à.d.l.à.g. définies sur $[0,\infty[$ à valeurs dans $W_{p,m}(\Lambda)$, avec la norme uniforme) : soit L_t la limite, qui est évidemment une version de l'intégrale $\int HdX$.

Puisque $L_t^n \to L_t$ dans $L^p(\Omega,\underline{F}_t,\mathbf{P},W_{p,m}(\Lambda))$, on a $D^\alpha L_t^n \to D^\alpha L_t$ dans $L^p(\Omega,\underline{F}_t,\mathbf{P},L^p(\Lambda))$; mais aussi $\int_{]0,t]}(D^\alpha H^n)dX \to \int_{]0,t]}(D^\alpha H)dX$ dans $L^p(\Omega,\underline{F}_t,\mathbf{P},L^p(\Lambda))$ (remarquer que

$$E[\int_\Lambda d\lambda \,|\int_{]0,t]} D^\alpha(H^n-H)dX|^p] \leq c_p.\int_\Lambda d\lambda \; E[B_t^{p-1}.\int_{]0,t]}|D^\alpha(H^n-H)|^p dB_s]$$
$$\leq c_p.E[B_t^{p-1}.\int_{]0,t]} ||H^n-H||^p_{p,m} \; dB_s] \;).$$

L'égalité $D^\alpha L_t^n = \int(D^\alpha H^n)dX$ permet de conclure la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] DELLACHERIE C. MEYER P. A. Probabilités et potentiel. Chapitres V-VIII Hermann-Paris (1980)

[2] EMERY M. Stabilité des solutions des équations différentielles stochastiques; application aux intégrales multiplicatives stochastiques. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie v. G. 41 (1978) pag. 241-262

[3] KUNITA H. Stochastic differential equations and stochastic flows of diffeomorphisms. Cours à l'école d'été de Probabilités de Saint Flour 1982. A paraitre

[4] LENGLART E. LEPINGLE D. PRATELLI M. Présentation unifiée de certaines inégalités de la théorie des martingales. Séminaire de Probabilités XIV (pag. 26-48) Lecture Notes 784. Springer Verlag (1980)

[5] METIVIER M. Semimartingales. A course on stochastic processes. A paraitre.

[6] METIVIER M. Stability theorems for stochastic integral equations driven by Random measures and Semimartingales. Journal of Integral Equations 3 (1981) pag. 109-135

[7] METIVIER M. PELLAUMAIL J. Stochastic Integration. Academic Press (1980)

[8] MEYER P. A. Flot d'une équation differentielle stochastique. Séminaire de Probabilités XV (pag. 103-117) Lecture Notes 850. Springer Verlag (1981)

[9] PRATELLI M. La classe des semimartingales qui permettent d'intégrer les processus optionnels . Dans ce volume.

Maurizio PRATELLI
Istituto di Statistica
Via S. Francesco 122
35122 PADOVA Italie.