Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Marc Olivier Gebuhrer

Sur les fonctions holomorphes à valeurs dans l'espace des martingales locales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 17 (1983), p. 123-124
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1983__17__123_0>

SUR LES FONCTIONS HOLOMORPHES A VALEURS DANS L'ESPACE DES MARTINGALES LOCALES

par M.O. GEBUHRER

Cette note est la rédaction de conversations avec M. Emery et P.A. Meyer. Elle a surtout pour but d'attirer l'attention sur un problème intéressant, que nous ne savons traiter que de manière très partielle.

Soit (sur un espace probabilisé satisfaisant aux conditions habituelles de la théorie des processus) (M_t) une martingale locale, continue et nulle en 0 . Posons pour λ complexe

$$(1) \qquad e_\lambda(x,t) = \exp(\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}t\,)$$

Alors le processus $e_\lambda(M_t, \langle M,M\rangle_t)$ est l'exponentielle de Doléans de λM , et il est bien connu que c'est une martingale locale. D'autre part, $e_\lambda(x,t)$ est holomorphe en λ

$$(2) \qquad e_\lambda(x,t) = \Sigma_n \frac{\lambda^n}{n!}\, h_n(x,t) \quad ; \quad h_n(x,t) = t^{n/2} H_n(x/\sqrt{t})$$

où H_n est le n-ième polynôme d'Hermite. Il est alors <u>formellement</u> évident que les processus $h_n(M_t, \langle M,M\rangle_t)$, étant les coefficients de Taylor à l'origine d'une martingale locale dépendant de manière holomorphe d'un paramètre, doivent eux mêmes être des martingales locales. Cette idée heuristique conduit à un résultat correct. En effet, les fonctions $e_\lambda(x,t)$, $h_n(x,t)$ sont des solutions de l'équation

$$(3) \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

et si $f(x,t)$ satisfait à (3), $f(M_t, \langle M,M\rangle_t)$ est une martingale locale d'après la formule d'Ito.

Mais il est naturel de chercher à justifier le raisonnement heuristique lui même.[1] Nous posons donc le problème suivant :

PROBLEME. Soit $(M_t(\lambda))$ une famille de processus complexes, indexée par un paramètre complexe λ ($|\lambda|<1$ par exemple). On suppose :

- pour tout λ , $(M_t(\lambda))$ est une semimartingale (martingale locale),
- pour presque tout ω , l'application $(t,\lambda) \mapsto M_t(\lambda,\omega)$ est holomorphe en λ pour t fixé, càdlàg. en t pour λ fixé.

Sous quelles conditions peut on affirmer que les coefficients de Taylor $C_t^k(\omega)$ de $M_t(\cdot,\omega)$ en 0 sont des semimartingales (martingales locales) ?

1. Naturellement, dans ce cas particulier, il suffit d'arrêter à $T_n = \inf\{t : |M_t| + \langle M,M\rangle_t \geq n\}$.

Toute la difficulté du problème tient au fait que la condition imposée est trajectorielle, et qu'on ignore si $M_t(.)$ est une semimartingale ou martingale locale à valeurs dans l'espace $\mathcal{H}$ des fonctions holomorphes dans le disque unité.

Nous ne savons résoudre ce problème que dans le cas suivant :

1) pour chaque λ , $(M_t(\lambda))$ est une martingale locale continue ,

2) pour presque tout ω , l'application $t \mapsto M_t(.)$ est continue à valeurs dans $\mathcal{H}$.

Alors la réponse est positive. On notera que la condition 2) est trajectorielle, et à peine plus forte que notre condition de départ : en effet, il est « pathologique » que des fonctions holomorphes convergent vers une fonction holomorphe pour la convergence simple, sans converger au sens de $\mathcal{H}$.

Voici la démonstration. Quitte à oublier un ensemble de mesure nulle (qui appartient à $\underline{\underline{F}}_0$), nous pouvons supposer que 2) a lieu pour tout ω . Pour tout t fixé, l'ensemble des fonctions holomorphes $M_s(.,\omega)$ ($s \leq t$) est compact dans $\mathcal{H}$, donc le processus

$$A_t(\omega) = \sup_{s \leq t,\ |\lambda| \leq r} |M_s(\lambda,\omega)| \qquad (r \text{ fixé} < 1)$$

est à valeurs finies. Comme il est croissant prévisible, il existe des temps d'arrêt $T_n \uparrow +\infty$ tels que

$$A_{T_n}(\omega) I_{\{T_n > 0\}} \leq n \quad .$$

Si l'on pose alors $M_t^n(\lambda) = M_{t \wedge T_n} I_{\{T_n > 0\}}$, nous avons là de vraies martingales bornées par n , et l'on vérifie immédiatement, par convergence dominée, que $\lambda \mapsto M_t^n(\lambda)$ est holomorphe à valeurs dans L^1 . D'autre part, le k-ième coefficient de Taylor $C_t^{k,n}(\omega)$ de $M_t^n(\lambda,\omega)$ à l'origine est donné par l'intégrale de Cauchy

$$C_t^{k,n}(\omega) = (2i\pi)^{-k} \int_{|\lambda|=r} dM_t^n(\lambda,\omega) \frac{d\lambda}{\lambda^k}$$

donc il est continu en t , et il est immédiat de vérifier la propriété de martingale. On conclut en remarquant que le coefficient de Taylor $C_t^k(\omega)$ correspondant à $M(\lambda)$ est tel que

$$C_t^{k,n} = C_{t \wedge T_n}^k I_{\{T_n > 0\}}$$

donc (C_t^k) est bien une martingale locale.

REMARQUE. Un résultat analogue peut être énoncé et démontré pour les fonctions de plusieurs variables complexes, sans difficultés nouvelles.