Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Jia-An Yan

Sur un théorème de Kazamaki-Sekiguchi

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 17 (1983), p. 121-122

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1983__17__121_0>

SUR UN THEOREME DE KAZAMAKI-SEKIGUCHI

par J.A. YAN

Tout récemment, N. Kazamaki et T. Sekiguchi ont établi dans [1] un résultat très remarquable sur les martingales continues de BMO. Malheureusement, leur démonstration est assez compliquée. Cette note a pour but d'en donner une démonstration simplifiée .

Voici l'énoncé de Kazamaki-Sekiguchi :

THEOREME 1. Si (M_t) est une martingale continue appartenant à BMO, alors il existe un $\alpha\neq 1$ tel que

(1) $$\sup_{T\in\tau_b} E[\exp\{\alpha M_T + (\tfrac{1}{2}-\alpha)\langle M,M\rangle_T\}] < \infty ,$$

τ_b désignant l'ensemble des temps d'arrêt bornés.

Le point de départ de cette note est la remarque suivante : la condition (1) est en fait équivalente à

(1') $$E[\exp\{\alpha M_\infty + (\tfrac{1}{2}-\alpha)\langle M,M\rangle_\infty\}] < \infty .$$

Posons en effet

$$L_t = \exp\{\alpha M_t + (\tfrac{1}{2}-\alpha)\langle M,M\rangle_t\} , \quad A_t = \exp\{\frac{(1-\alpha)^2}{2}\langle M,M\rangle_t\}$$

On a
$$L_t = \mathcal{E}(\alpha M)_t A_t$$

Comme $\alpha M \in$ BMO, un résultat de Kazamaki nous affirme que $\mathcal{E}(\alpha M)$ est une martingale positive uniformément intégrable. Donc pour tout temps d'arrêt T

$$E[L_T] = E[\mathcal{E}(\alpha M)_T A_T] = E[\mathcal{E}(\alpha M)_\infty A_T] \leqq E[\mathcal{E}(\alpha M)_\infty A_\infty] = E[L_\infty]$$

On en déduit sans peine, grâce au lemme de Fatou

$$\sup_{T\in\tau_b} E[L_T] = E[L_\infty]$$

et donc (1)<=>(1').

Démontrons maintenant une forme un peu plus précise du théorème 1 :

THEOREME 2. Si (M_t) est une martingale continue appartenant à BMO, il existe $\delta>0$ tel que, pour tout $\alpha\in[1-\delta,1+\delta]$, on ait

(2) $$E[\exp\{\alpha M_\infty + (\tfrac{1}{2}-\alpha)\langle M,M\rangle_\infty\}] < \infty .$$

En effet, soit Q la loi de probabilité de densité $\mathcal{E}(M)_\infty$. D'après un résultat de Kazamaki-Sekiguchi [2], le processus

$$N = M - \langle M,M\rangle$$

est une martingale sous la loi Q, appartenant à BMO. L'inégalité de John-Nirenberg nous dit alors qu'il existe $\delta>0$ tel que

$$E_Q[\ e^{\delta N^*}\ ] < \infty$$

Par conséquent, si l'on prend β tel que $|\beta|\leqq\delta$, on a

$$E_Q[\ \exp(\beta N_\infty)\ ] = E_Q[\ \exp(\beta(\ M_\infty - \langle M,M\rangle_\infty)\ ] < \infty$$

d'où immédiatement (2) avec $\alpha=1+\beta$.

REMARQUE. La condition (1) est une condition suffisante d'intégrabilité de la martingale locale exponentielle $\mathcal{E}(M)$ (critères du type de Novikov). Le résultat que nous venons d'établir s'énonce donc : toute martin gale $M\in BMO$ satisfait à un critère du type de Novikov. Mais notre démonstration repose sur le théorème de Kazamaki, suivant lequel $\mathcal{E}(\alpha M)$ est uniformément intégrable pour tout α, et ne constitue donc pas une nouvelle démonstration de ce dernier résultat.

Toutefois, cet inconvénient n'est pas grave, car Kazamaki et Sekiguchi en donnent dans [1] une démonstration très courte (dans le cas continu).

REFERENCES

[1]. N. Kazamaki et T. Sekiguchi. Uniform integrability of continuous exponential martingales. A paraître, Tôhoku Math. J..

[2]. -------------------------- . On the transformation of some classes of martingales by a change of law. Tôhoku Math. J. 31, 1979, p. 261-279

YAN Jia-An
Institut de Mathématiques Appliquées
Academia Sinica
Beijing , Chine

en 1981/82 : Institut für Angewandte Mathematik
der Universität Heidelberg, R.F.A.

Note. La démonstration s'applique aussi aux martingales discontinues $M\in BMO$, telles que $\Delta M\geqq -1+\gamma$ ($\gamma>0$). Il faut utiliser au lieu de N ci-dessus le processus suivant qui d'après Kazamaki (ZW 46, 1979, p. 343-349) est une martingale de BMO sous la loi Q :

$$N_t = M_t - \int_0^t \frac{1}{\mathcal{E}(M)_s} d[M,\mathcal{E}(M)]_s = M_t - \langle M^c,M^c\rangle_t + \Sigma_{s\leqq t} \frac{\Delta M_s}{1+\Delta M_s} .$$

Yan Jia-An
Institute of Applied Mathematics
Academia Sinica, Beijing (Chine)