SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

S. D. CHATTERJI
S. RAMASWAMY

Mesures gaussiennes et mesures produits

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 16 (1982), p. 570-580
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__570_0>

MESURES GAUSSIENNES ET MESURES PRODUITS.

S.D. Chatterji et S. Ramaswamy.

§1. Introduction.

Les considérations de cette note ont comme origine la question élémentaire suivante : soit γ une mesure gaussienne non-singulière dans $\mathbb{R}^\infty = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots$; est-il vrai qu'il existe toujours une mesure de probabilité produit $\nu = \nu_1 \otimes \nu_2 \otimes \ldots$ sur $\mathbb{R}^\infty$ qui est équivalente à γ (en symboles, $\nu \sim \gamma$) ? Si c'était ainsi, alors l'application d'un théorème bien connu de Kakutani sur l'équivalence ($\sim$) et l'orthogonalité ($\perp$) de deux mesures produits sur $\mathbb{R}^\infty$, nous donnerait immédiatement le théorème de Feldman-Hajék sur la dichotomie des mesures gaussiennes sur $\mathbb{R}^\infty$ (et donc, en général; cf. [3] pour ces théorèmes) c.à.d. le fait que si γ_1, γ_2 sont deux mesures gaussiennes quelconques sur $\mathbb{R}^\infty$ alors ou bien $\gamma_1 \sim \gamma_2$ ou $\gamma_1 \perp \gamma_2$.

Malheureusement, nous constatons ici qu'il existe des mesures gaussiennes non singulières γ dans $\mathbb{R}^\infty$ qui sont orthogonales à toute mesure produit ν; les exemples de tels γ sont même très faciles à construire. D'autre part, nous donnons un exemple d'une mesure produit ν qui est orthogonale à toute mesure gaussienne produit (et vraisemblablement orthogonale à toute mesure gaussienne, produit ou non — ce que nous pensons pouvoir vérifier bientôt). Nous montrons aussi que si une mesure gaussienne γ dans $\mathbb{R}^\infty$ est orthogonale à la mesure (gaussienne) produit formée des mesures marginales unidimensionnelles correspondantes alors γ est orthogonale à toute autre mesure gaussienne produit; nous ne savons pas si une telle mesure gaussienne γ est orthogonale à toute mesure produit, gaussienne ou non ayant les marginales équivalentes à celles de γ. Néanmoins, nous savons (grâce à un exemple communiqué par M. V. Losert de l'Univ. de Vienne) qu'il existe des mesures μ (non-gaussienne), orthogonale à la mesure produit formée par ses mesures marginales unidimensionnelles mais équivalente à une autre mesure produit ayant les marginales équivalentes à celles de μ.

Plusieurs problèmes touchant aux questions d'équivalence et d'orthogonalité des mesures produits et gaussiennes restent ouvertes. Certains sont formulés explicitement (comme au-dessus) et certains autres se présenteront naturellement aux lecteurs à cause de la nature très incomplète de nos résultats. Une autre question plus importante qui reste posée et qui était, à l'origine, notre point de départ est celle-ci : si μ_1 et μ_2 sont deux mesures de probabilité stables et symétriques dans $\mathbb{R}^\infty$, est-il vrai qu'il y a une dichotomie: ou bien $\mu_1 \sim \mu_2$ ou $\mu_1 \perp \mu_2$?

§2. <u>Les résultats.</u>

Toutes les mesures dans $\mathbb{R}^\infty$ ou $\mathbb{R}^n$ seront définies sur les tribus boréliennes respectives. Si $x = (x_j) \in \mathbb{R}^\infty$, posons $\pi_n(x) = x_n$ et $\pi^{(n)}(x) = (x_1, \ldots, x_n)$; alors $\pi_n : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ et $\pi^{(n)} : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^n$. Une mesure μ dans $\mathbb{R}^\infty$ s'appelle <u>non-singulière</u> si, pour tout n, <u>la mesure marginale</u> $\pi^{(n)}\mu$ dans $\mathbb{R}^n$ est équivalente à la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$; elle s'appelle <u>gaussienne</u> si, pour tout n, la mesure $\pi^{(n)}\mu$ est une mesure gaussienne dans $\mathbb{R}^n$. Les mesures $\mu_n = \pi_n\mu$ dans $\mathbb{R}$ s'appellent <u>les mesures marginales unidimensionnelles</u> de μ. Une mesure ν dans $\mathbb{R}^\infty$ du type $\nu_1 \otimes \nu_2 \otimes \ldots$ où chaque ν_j est une mesure dans $\mathbb{R}$, s'appelle une <u>mesure</u>

produit dans $\mathbb{R}^{\infty}$.

Proposition 1.

Il existe une mesure gaussienne non-singulière γ dans $\mathbb{R}^{\infty}$ qui est orthogonale à toute mesure de probabilité produit dans $\mathbb{R}^{\infty}$.

Démonstration :

Soit $\eta_o, \eta_1, \dots$ une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes, de loi gaussienne standardisée N(o,1), définies sur un espace de probabilité (Ω,Σ,P). Posons : $\xi_n = \eta_o + (1/n)\cdot\eta_n$, $n = 1,2,\dots$; soit γ la mesure de probabilité induite dans $\mathbb{R}^{\infty}$ par l'application ξ : $\Omega \to \mathbb{R}^{\infty}$, $\xi(\omega) = (\xi_n(\omega))$. Evidemment, γ est une mesure gaussienne non-singulière car les mesures marginales $\pi^{(n)}\gamma$ sont des lois de $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, ces dernières étant clairement gaussiennes et non-singulières; la non-singularité se vérifie immédiatement du fait qu'une relation $\sum_{i=1}^{n} c_i\xi_i = 0$ p.s. entrainerait $c_i = 0$, $1 \leq i \leq n$. Montrons que γ est orthogonale à toute mesure de probabilité produit.

En effet, soit $\nu = \nu_1 \otimes \nu_2 \otimes \dots$ une mesure de probabilité produit dans $\mathbb{R}^{\infty}$ et $E \subset \mathbb{R}^{\infty}$ l'ensemble de tous les $x = (x_n)$ t.q. $\lim_n x_n$ existe et est un nombre fini. Comme E est un ensemble appartenant à la tribu asymptotique $\mathcal{T}$ de $\mathbb{R}^{\infty}$ (c.à.d. $\mathcal{T} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ où $\mathcal{F}_n$ est la tribu dans $\mathbb{R}^{\infty}$ engendrée par toutes les fonctions π_k, $k \geq n$) la loi de tout ou rien (de Kolmogorov) donne que $\nu(E) = 0$ ou 1. D'autre part, comme $\lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \eta_o(\omega)$ (P) p.s., on a que $\gamma(E) = 1$. Ainsi, si $\nu(E) = 0$ alors $\nu \perp \gamma$; si, par contre, $\nu(E) = 1$, posons $f(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$ pour $x \in E$ et $= \infty$ autrement.

Il est clair que $f : \mathbb{R}^\infty \to \overline{\mathbb{R}}$ est $\mathcal{T}$ mesurable; donc par la même loi de tout ou rien, f est, ν p.s., une constante c.à.d. il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ t.q. si $F = \{x : f(x) = \alpha\}$ alors $\nu(F) = 1$. Mais, $\gamma(F) = P\{\omega : \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \alpha\}$

$$= P\{\omega : \eta_0(\omega) = \alpha\} = 0$$

d'où l'on a encore que $\nu \perp \gamma$. C.Q.F.D.

Remarques :

(i) L'orthogonalité de la mesure gaussienne γ ci-dessus par rapport aux mesures de probabilité produits était facile à obtenir à cause du fait que la tribu asymptotique $\mathcal{T}$ n'était pas triviale pour γ. Il doit être possible de construire des mesures γ comme dans la prop. 1 ayant la propriété que $\mathcal{T}$ soit γ-triviale aussi.

(ii) Si dans la prop. 1, l'on n'exige pas que la mesure gaussienne γ soit non-singulière, alors la construction de γ devient encore plus banale. En effet, il suffit de prendre γ comme la mesure induite par une suite de variables aléatoires $(\xi_1, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots)$ où les $(\xi_n)_{n\geq 1}$ sont réparties selon une loi gaussienne quelconque. On utilisera le lemme élémentaire suivant pour ce raisonnement : si m est une mesure de probabilité non-atomique dans $\mathbb{R}^2$, concentrée sur le diagonal $D = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, alors $m \perp m_1 \otimes m_2$ pour deux mesures de probabilités quelconques m_1, m_2 dans $\mathbb{R}$.

Proposition 2.

Soit γ une mesure gaussienne quelconque dans $\mathbb{R}^\infty$ t.q.

$\gamma \perp \gamma' = \gamma_1 \otimes \gamma_2 \otimes \ldots$ où $\gamma_n = \pi_n \gamma$ est la n-ième mesure marginale unidimensionnelle de γ. Alors γ est orthogonale à toute mesure gaussienne produit.

Démonstration :

Nous simplifions le problème en utilisant le lemme suivant qui ramène la mesure γ à un sous-espace hilbertien de $\mathbb{R}^\infty$. Ce lemme nous était communiqué par M. R.L. Karandikar de Indian Statistical Institute, Calcutta.

Lemme 1.

Soit m une mesure de probabilité quelconque dans $\mathbb{R}^\infty$ t.q. $\alpha_n = \int \pi_n^2\, dm < \infty$ pour tout $n = 1,2,\ldots$ (où $\pi_n(x) = x_n$ si $x = (x_j)$). Alors, si $I = \{j : \alpha_j = 0\}$ et $E = \{x = (x_j) : x_j = 0$ pour $j \in I$ et $\sum_{j \notin I} x_j^2 / (\alpha_j \cdot 2^j) < \infty\}$, l'on a $m(E) = 1$.

La démonstration du lemme est immédiate à partir du fait que

$$\int \sum_{j \notin I} \pi_j^2 / (\alpha_j\, 2^j)\, dm = \sum_{j \notin I} 2^{-j} < \infty .$$

Comme E possède une structure hilbertienne naturelle (et évidente), les lemmes 1 et 2 qui suivent achèveront la démonstration de la proposition 2.

Introduisons d'abord les notations suivantes : soit H un espace hilbertien séparable (sur le corps $\mathbb{R}$) et $(e_n)_{n\geq 1}$ une base orthonormale dans H. Soit G l'ensemble des mesures gaussiennes dans H; chaque mesure $\gamma \in G$ est caractérisée par un vecteur $a \in H$ (la moyenne) et un opérateur positif nucléaire A dans $L(H)$ (l'opérateur de covariance). Nous écrirons, $\gamma = N(a,A)$. Si $\gamma_1 = N(a_1,A_1)$ et $\gamma_2 = N(a_2,A_2)$ alors il est bien connu que $\gamma_1 \sim \gamma_2$ si et seulement si $(a_1 - a_2) \in \mathrm{Im}A_2^{\frac{1}{2}}$ (ou $\mathrm{Im}A_1^{\frac{1}{2}}$) et s'il existe un opérateur symétrique inversible T dans $L(H)$ t.q. T-I est de type Hilbert-Schmidt et $A_1^{\frac{1}{2}}\, T\, A_1^{\frac{1}{2}} = A_2$. (Pour ces faits concernant les mesures gaussiennes dans H, on peut consulter l'ouvrage [4] de Skorohod (1974), p. 14-18, p. 85-95). Par G_e nous notons les mesures $\gamma = N(a,A)$ t.q. A soit diagonalisé par les éléments de la base $e = (e_n)$ c.à.d. $Ae_n = c_n e_n$, $c_n \in \mathbb{R}$; une telle mesure gaussienne γ est caractérisée par le fait que les variables aléatoires ξ_n, définies sur l'espace de probabilité (H,γ) par $\xi_n(x) = \langle x|e_n\rangle$, sont stochastiquement indépendantes.

Avec ces notations, nous avons le lemme suivant :

<u>Lemme 2.</u>

Soit $\gamma = N(a,A)$ une mesure gaussienne dans l'espace hilbertien séparable H de base orthonormale (e_n). Supposons que $Ae_n \neq 0$, $n \geq 1$. Pour qu'il existe une mesure gaussienne $\nu \in G_e$ t.q. $\gamma \sim \nu$, il est nécessaire que

$$\sum_{i\neq j} \frac{|\langle Ae_i \mid e_j\rangle|^2}{\langle Ae_i \mid e_i\rangle \langle Ae_j \mid e_j\rangle} < \infty \qquad \ldots (1)$$

Aussi, si $\gamma \sim \nu$ pour un $\nu \in \mathcal{G}_e$ alors $\gamma \sim \gamma' \in \mathcal{G}_e$ où $\gamma' = N(a,A')$ avec

$$A' e_i = \langle A e_i \mid e_i \rangle \cdot e_i , \quad i \geq 1.$$

Démonstration du lemme 2 :

Soit $\gamma \sim \nu \in \mathcal{G}_e$ et $\nu = N(a_1, A_1)$; par hypothèse, $A_1 e_i = \lambda_i e_i$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum_i \lambda_i < \infty$. Comme $\gamma \sim \nu$, il existe un opérateur symétrique inversible $T \in \mathcal{L}(H)$ t.q. $A_1^{\frac{1}{2}} T A_1^{\frac{1}{2}} = A$ et $(T-I)$ est de type Hilbert-Schmidt. On en déduit sans peine que $\ker(A) = \ker(A_1)$ d'où $\lambda_i > 0$, $i \geq 1$; aussi,

$$\begin{aligned} \langle A e_i \mid e_j \rangle &= \langle A_1^{\frac{1}{2}} T A_1^{\frac{1}{2}} e_i \mid e_j \rangle \\ &= \sqrt{\lambda_i \lambda_j} \langle T e_i \mid e_j \rangle \end{aligned}$$

donne

$$\begin{aligned} T e_i &= \sum_j \langle T e_i \mid e_j \rangle e_j \\ &= \sum_j \frac{\langle A e_i \mid e_j \rangle}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} e_j \end{aligned}$$

Comme $\sum_i \| (T-I) e_i \|^2 < \infty$, on aura

$$\sum_{i \neq j} \frac{| \langle A e_i \mid e_j \rangle^2}{\lambda_i \lambda_j} < \infty \qquad \ldots (2)$$

et

$$\sum_i \left| \frac{\langle A e_i \mid e_i \rangle}{\lambda_i} - 1 \right|^2 < \infty \qquad \ldots (3)$$

La relation (3) dit exactement que $\nu \sim \gamma'$ (cf. [3], p. 174) ce qui démontre la dernière partie de l'affirmation du lemme 2. Donc $\gamma \sim \gamma'$; en remplaçant ν par γ' dans le raisonnement conduisant à (2) (et, donc, en remplaçant λ_i par $\langle Ae_i | e_i \rangle$ dans ce dernier), on obtient (1). C.Q.F.D.

Conclusion de la démonstration de la proposition 2 :

Soit γ une mesure gaussienne dans $\mathbb{R}^\infty$ ayant la propriété que $\gamma \perp \gamma' = \gamma_1 \otimes \gamma_2 \otimes \ldots$ avec $\gamma_n = \pi_n \gamma$. Les deux mesures gaussiennes sont portées par l'espace hilbertien E du lemme 1. Si ν est une mesure gaussienne produit sur $\mathbb{R}^\infty$ alors ou bien $\nu(E) = 0$ et donc $\gamma \perp \nu$ ou bien $\nu(E) = 1$; dans ce dernier cas, si l'on prend la base orthonormale $(e_n)_{n \notin I}$ (cf. définition de E dans le lemme 1) où e_n est le vecteur $c_n \cdot (0, \ldots, 1, 0, \ldots)$, 1 à la n-ième place, (et $c_n \in \mathbb{R}$ t.q. $\| e_n \| = 1$), l'on serait exactement dans la situation envisagée par le lemme 2. Donc, si $\gamma \sim \nu$ alors $\gamma \sim \gamma'$, une contradiction. Par le théorème de dichotomie de Feldman-Hajék, on conclut que $\gamma \perp \nu$.

C.Q.F.D.

Nous ne savons pas si une mesure gaussienne γ comme dans la proposition 2 est aussi orthogonale à toute mesure produit $\nu = \nu_1 \otimes \nu_2 \otimes \ldots$ telle que $\nu_n \sim \gamma_n$. Ceci n'est certainement pas vrai si γ n'est pas gaussienne comme montre l'exemple suivant dû à M. V. Losert :

Exemple :

Pour simplifier, on va considérer les mesures dans $X = \{0,1\}^\infty$; prenons $\lambda = \otimes \lambda_n$ avec $\lambda_n(\{0\}) = \lambda_n(\{1\}) = \frac{1}{2}$ et $\mu = f \cdot \lambda$, $f > 0$ p.p. (λ),

$\int f d\lambda = 1$. Alors $\mu \sim \lambda$; nous allons voir que si f est choisie adéquatement alors $\mu \perp \underset{n}{\otimes} \mu_n$ où $\mu_n = \pi_n \mu$. En effet, si $q_n = \mu_n(\{0\}) = \int_{\{x:\pi_n(x)=0\}} f d\lambda$,

il suffit d'avoir $\sum_n (q_n - \frac{1}{2})^2 = \infty$ pour que $\lambda \perp \underset{n}{\otimes} \mu_n$; c'est un corollaire d'un théorème de Kakutani déjà mentionné et souvent redécouvert (cf. par ex. [1] et [3]). Aussi, $\lambda_n \sim \mu_n$ dès que $0 < q_n < 1$; on aura alors $\mu \perp \underset{n}{\otimes} \mu_n$ mais $\mu \sim \underset{n}{\otimes} \lambda_n$ avec $\lambda_n \sim \mu_n$.

Pour la construction de f, posons

$$A_1 = \{ x : \pi_1(x) = 1 \},$$

$$A_n = \{ x : \pi_n(x) = 1,\ \pi_j(x) = 0,\ 1 \leqslant j < n \}$$

$$f = \sum_n \alpha_n \cdot 1_{A_n}, \quad \alpha_n = c \cdot 2^n \cdot n^{-3/2}, c \cdot \sum_n n^{-3/2} = 1.$$

Comme les A_n sont disjoints et $\lambda(\bigcup_n A_n) = 1$, on a que $f > 0$ p.p. (λ); aussi $\int f\, d\lambda = 1$. De plus,

$$\begin{aligned}
q_k &= \sum_n \alpha_n \cdot \int_{\{x:\pi_k(x)=0\}} 1_{A_n}\, d\lambda \\
&= \sum_{n=1}^{k-1} \alpha_n \cdot (\tfrac{1}{2}) \cdot 2^{-n} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \alpha_n \cdot 2^{-n} \\
&= (\tfrac{1}{2})\ c \cdot \sum_{n=1}^{k-1} n^{-3/2} + c \cdot \sum_{n=k+1}^{\infty} n^{-3/2} \\
&= (c/2) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2} + (c/2) \sum_{n=k+1}^{\infty} n^{-3/2} - (c/2) k^{-3/2} \\
&\sim (\tfrac{1}{2}) + c k^{-\frac{1}{2}} - (c/2)\, k^{-3/2}
\end{aligned}$$

d'où $$\sum_k (q_k - \tfrac{1}{2})^2 = \infty.$$

Proposition 3.

Il existe une mesure de probabilité $\nu = m \otimes m \otimes \ldots$ où m est une mesure de probabilité dans $\mathbb{R}$ de la forme $m(dx) = p(x)dx$, $p(x)>0$, $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$, telle que ν est orthogonal à toute mesure gaussienne produit.

Démonstration :

Pour une mesure μ quelconque dans $\mathbb{R}^{\infty}$, posons $E(\mu) = \{x \in \mathbb{R}^{\infty} : \mu \sim \mu_x\}$ où $\mu_x(A) = \mu(A-x)$. Il est clair que $E(\mu)$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}^{\infty}$ et que si $\mu \sim \nu$ alors $E(\mu) = E(\nu)$.

Dans [2], l'on trouve une mesure de probabilité ν du type demandé telle que $E(\nu) = \ell^1$. Mais, si $\gamma = \otimes\gamma_n$, $\gamma_n = N(\alpha_n, \sigma_n^2)$ alors l'on sait que $E(\gamma) = \{x=(x_n) : \sum_n |x_n/\sigma_n|^2 < \infty\}$ (on peut supposer que $\sigma_n^2>0$; autrement, $\nu \perp \gamma$ trivialement; pour $E(\gamma)$ cf [3] p. 174). Un raisonnement élémentaire montre que ce dernier ensemble ne peut jamais être égal à ℓ^1. Donc ν n'est pas équivalente à γ; mais comme il s'agit des mesures de probabilité produits, le théorème de Kakutani mentionné déjà donne que $\nu \perp \gamma$. C.Q.F.D.

Références.

[1] Chatterji, S.D. Certain induced measures and fractional dimensions of their "support". Z.W. 3 (1964), 184-192.

[2] Chatterji, S.D. et Mandrekar, V. Quasi-invariance of measures under translations. Math. Zeit. 154 (1977), 19-29.

[3] Chatterji, S.D. et Mandrekar V. Equivalence and singularity of Gaussian measures and applications. Probabilistic analysis and related topics, vol. 1 (Ed. A.T. Bharucha-Reid) Academic Press, N.Y. (1978), 169-197.

[4] Skorohod, A.V. Integration in Hilbert space. Springer-Verlag, Berlin (1974).

Département de Mathématiques
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
61, av. de Cour
1007 Lausanne
Suisse

Tata Institute of Fundamental Research
School of Maths.
Colaba, Bombay (400005)
Inde