

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CHING SUNG CHOU

## **Une remarque sur l'approximation des solutions d'e.d.s**

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 16 (1982), p. 409-411

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1982\\_\\_16\\_\\_409\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__409_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UNE REMARQUE SUR L'APPROXIMATION  
DES SOLUTIONS D'E.D.S.

par CHOU Ching - Sung

Considérons une équation différentielle stochastique vectorielle du type suivant :

$$(1) \quad Y_{it} = y_i + \sum_j \int_0^t a_{ij}(X_{s-}, Y_{s-}) dX_{js} \quad \begin{matrix} i=1,2,\dots,n \\ j=1,2,\dots,p \end{matrix}$$

où les  $X_j$  sont des semimartingales données, et où les coefficients  $a_{ij}(x,y)$  sont des fonctions uniformément lipschitziennes en  $y$ , et par exemple continues en  $(x,y)$ . Construisons la suite de ses approximations par la méthode des différences finies, au moyen des subdivisions dyadiques :

$$(2) \quad \begin{aligned} \overset{n}{Y}_{it} &= y_i + \sum_j a_{ij}(X_0, y)(X_{j,t} - X_{j,0}) \quad \text{pour } 0 < t \leq 2^{-n} \\ \overset{n}{Y}_{it} &= \overset{n}{Y}_{i,2^{-n}} + \sum_j a_{ij}(X_{2^{-n}}, \overset{n}{Y}_{2^{-n}})(X_{j,t} - X_{j,2^{-n}}) \\ &\quad \text{pour } 0 < t \leq 2 \cdot 2^{-n} \\ \overset{n}{Y}_{it} &= \overset{n}{Y}_{i,k2^{-n}} + \sum_j a_{ij}(X_{k2^{-n}}, \overset{n}{Y}_{k2^{-n}})(X_{j,t} - X_{j,k2^{-n}}) \\ &\quad \text{pour } k2^{-n} < t \leq (k+1)2^{-n} . \end{aligned}$$

M. Emery a démontré que le processus  $(\overset{n}{Y}_t)$  converge vers  $(Y_t)$  au sens u.c.p. (convergence uniforme sur les compacts en probabilité). C'est à dire que pour tout  $t$  fixé et tout  $i$ ,  $(Y - \overset{n}{Y})_t^*$  converge en probabilité vers 0.

M. Meyer a posé le problème suivant : au lieu de (1) considérons l'équation différentielle avec un terme supplémentaire de crochets :

$$(3) \quad Y_{it} = (1) + \sum_{j,k} \int_0^t b_{ijk}(X_{s-}, Y_{s-}) d[X_j, X_k]_s$$

où les fonctions  $b_{ijk}$  sont aussi lipschitziennes. Cette équation est encore du type (1), mais avec un plus grand nombre de semimartingales directrices. Au lieu de construire les processus  $\overset{n}{Y}_t$ , qui exigent que l'on connaisse les crochets, on considère l'approximation suivante, qui contient seulement les processus  $X_{it}$  eux mêmes :

$$(4) \quad \begin{aligned} \overset{n}{Z}_{it} &= y_i + \sum_j a_{ij}(X_0, y)(X_{jt} - X_{j0}) \\ &\quad + \sum_{j,k} b_{ijk}(X_0, y)(X_{jt} - X_{j0})(X_{kt} - X_{k0}) \\ &\quad \text{pour } 0 < t \leq 2^{-n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{it}^n &= Z_{i,p2^{-n}}^n + \sum_j a_{ij}(X_{p2^{-n}}, Z_{p2^{-n}}^n)(X_j, t - X_j, p2^{-n}) \\ &\quad + \sum_{jk} b_{ijk}(X_{p2^{-n}}, Z_{p2^{-n}}^n)(X_j, t - X_j, p2^{-n})(X_k, t - X_k, p2^{-n}) \\ &\quad \text{pour } p2^{-n} < t \leq (p+1)2^{-n} \end{aligned}$$

Le problème posé par M. Meyer est alors : est ce que  $Z$  converge aussi vers la solution  $Y$  de (3) au sens u.c.p.? Nous allons montrer que c'est bien le cas.

La méthode consiste à considérer l'équation du type (3) comme une équation du type (1), mais avec les semimartingales directrices  $X_{it}$  et  $X_{jt} X_{kt}$  au lieu des crochets, grâce à la formule

$$d[X_j, X_k] = d(X_j X_k) - X_j dX_k - X_k dX_j$$

L'équation (3) s'écrit donc

$$(5) \quad Y_{it} = y_i + \sum_j \int_0^t c_{ij}(X_{s-}, Y_{s-}) dX_{js} \\ + \sum_{jk} \int_0^t b_{ijk}(X_{s-}, Y_{s-}) d(X_{js} X_{ks})$$

avec  $c_{i\ell}(x, y) = a_{i\ell}(x, y) + \sum_j b_{ij\ell}(x, y)x_j + \sum_k b_{i\ell k}(x, y)x_k$

Si on considère l'approximation du type (2) pour l'équation (5) - pour la simplicité nous écrivons seulement le premier terme, pour  $t \leq 2^{-n}$

$$y_i + \sum_{\ell} c_{i\ell}(X_0, y)(X_{\ell t} - X_{\ell 0}) + \sum_{jk} b_{ijk}(X_0, y)(X_{jt} X_{kt} - X_{j0} X_{k0})$$

on retrouve exactement  $Z_{it}^n$ . Cependant, il y a une petite difficulté pour appliquer le théorème d'Emery à l'équation (5), car les coefficients  $c_{i\ell}(x, y)$  ne sont pas lipschitziens.

On peut résoudre cette difficulté de la manière suivante : supposons d'abord que chaque coordonnée  $X_{it}$  soit une semimartingale bornée en valeur absolue par une constante  $K$ . Soit  $x_j^! = x_j$  si  $|x_j| \leq K$ ,  $K$  si  $x_j > K$ ,  $-K$  si  $x_j < -K$ . Soit aussi

$$c_{i\ell}^!(x, y) = a_{i\ell}(x, y) + \sum_j b_{ij\ell}(x, y)x_j^! + \sum_k b_{i\ell k}(x, y)x_k^!$$

Alors on peut appliquer le théorème d'Emery à l'équation (5') obtenue en remplaçant les fonctions  $c_{i\ell}$  par les fonctions lipschitziennes  $c_{i\ell}^!$ . Mais comme les  $X_{it}$  sont bornés par  $K$ , l'équation (5) et l'équation (5') ont mêmes solutions et mêmes approximations, et la réponse à la question de M. Meyer est positive.

Pour le cas général, on introduit le temps d'arrêt

$$T = T_K = \inf\{ t : \sup_i |X_{it}| > K \}$$

La semimartingale  $X^{\mathbb{T}-}$  est alors bornée par  $K$  pour chaque coordonnée, et on peut lui appliquer le résultat précédent. Cela entraîne que

$$(\bar{Z}-Y)_t^* \rightarrow 0 \text{ en probabilité sur l'ensemble } \{t < T\}$$

Mais si  $K$  est grand, l'ensemble  $\{t \geq T\}$  a une probabilité très petite, donc en fait on a encore convergence u.c.p..

#### REFERENCES

- [1]. EMERY (M.). Stabilité des solutions des équations différentielles stochastiques. Application aux intégrales multiplicatives stochastiques. Z.W. 41, 1978, p. 41-62.
- [2]. EMERY(M.). Equations différentielles stochastiques lipschitziennes. Etude de la stabilité. Sém. Prob. XIII, LN. 721, Springer 1979.

C.S. Chou  
 Mathematics Department  
 National Central University  
 Chung-Li, TAIWAN.