Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Dominique Bakry

Semimartingales à deux indices

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 16 (1982), p. 355-369
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__355_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Université de Strasbourg 1980/81

SEMIMARTINGALES A DEUX INDICES

par Dominique Bakry

Le théorème de Dellacherie-Meyer-Mokobodzky [5,VIII 80] permet de caractériser les semimartingales comme les processus adaptés, continus à droite, tels que l'intégrale stochastique des processus prévisibles élémentaires se prolonge en une mesure sur la tribu prévisible à valeurs dans l'espace L^o. On s'intéresse ici à la situation des processus à deux indices, comme mesure à valeurs dans l'espace L^p , $p\geq 1$: étant donné un espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{F}, P)$, muni de deux filtrations $(\mathbb{F}^1_s)$ et $(\mathbb{F}^2_t)$ satisfaisant à la condition de commutation (F.4) de [4], on connait quatre modèles de semimartingales à deux indices:

-Les processus à variation finie

-Les martingales de L^p , $p>1$

-Certains processus d'un modèle mixte, de la forme $E(A_t/\mathbb{F}^1_s)$, étudiés par Wong et Zakai dans [7], où le processus A_t est à variation finie, adapté à la filtration $\mathbb{F}^2_t$, et satisfait en outre à certaines conditions assez restrictives

-Evidemment, le modèle symétrique obtenu en échangeant les rôles de s et t .

Nous étudions ci dessous les processus $X_{s,t}$ adaptés qui déterminent des mesures sur la tribu prévisible à valeurs L^p . Sous l'hypothèse supplémentaire que, à s et t fixés, $X_{s,t}$ soit une semimartingales par rapport aux filtrations $\mathbb{F}^1_s$ et $\mathbb{F}^2_t$ respectivement (nous disons alors que X est régulière), nous montrons que les semimartingales de L^p se décomposent en somme de quatre processus des types précédents, puis, dans le cas où X définit une mesure sur la tribu plus large des processus 1-prévisibles, nous obtenons une décomposition plus simple, et nous étudions quelques exemples où l'hypothèse de régularité n'est pas toujours satisfaite.

<u>Notations</u>: nous suivons pour l'essentiel celles de [6]; tous nos processus sont indexés par $[0,1]^2$, sur lequel on définit l'ordre partiel:

$$(s,t) \leq (s',t') \quad \text{ssi} \quad s \leq s' \quad \text{et} \quad t \leq t'$$

La notation $(s,t) < (s',t')$ signifie que l'inégalité stricte a lieu pour les deux composantes; si z et z' sont deux points de $[0,1]^2$, les notations $]z,z']$, $[z,z']$, etc... se comprennent dès lors d'elles mêmes.

On se donne deux filtrations $(\mathbb{F}^1_S)_{s\in[0,1]}$ et $(\mathbb{F}^2_t)_{t\in[0,1]}$ vérifiant les conditions habituelles ainsi que la condition (F.4) : pour tout (s,t), les espérances conditionnelles $E(./\mathbb{F}^1_t)$ et $E(./\mathbb{F}^2_t)$ commutent; nous notons alors $\mathbb{F}_{s,t}$ la tribu $\mathbb{F}^1_s \cap \mathbb{F}^2_t$.

On note $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{E}^1$, $\mathcal{E}^2$) l'ensemble des processus élémentaires prévisibles (resp. 1-prévisibles, 2-prévisibles) bornés par 1 en module, i.e. l'ensemble des processus $H(\omega,s,t)$ qui s'écrivent

$$\Sigma^n_{i=1}\Sigma^m_{j=1} h_{i,j}(\omega)1_{]s_i,s_{i+1}]}(s)\, 1_{]t_j,t_{j+1}]}(t) \qquad \text{où } (s_i)^{n+1}_{i=1} \text{ et}$$

$(t_j)^{m+1}_{j=1}$ sont deux subdivisions dyadiques de $[0,1]$ et $h_{i,j}$ des variables aléatoires bornées bornées par 1 mesurables par rapport à $\mathbb{F}_{s_i,t_j}$ (resp. $\mathbb{F}^1_{s_i}$, $\mathbb{F}^2_{t_j}$) . La tribu engendrée par $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{E}^1$, $\mathcal{E}^2$) est la tribu prévisible (resp. 1-prévisible, 2-prévisible); elle est notée $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{P}^1$, $\mathcal{P}^2$).

Si H s'écrit $h1_{]s,s']}1_{]t,t']}$, on définit l'intégrale stochastique de H par rapport à X : c'est la variable aléatoire

$$H.X = h(X_{s',t'}-X_{s',t}-X_{s,t'}+X_{s,t}) \quad \text{et l'on note } H{:}X \text{ le}$$

processus $z \longrightarrow H1_{]0,z]}.X$, $z\in[0,1]^2$.

Par linéarité, cette définition se prolonge au cas où H est un élément de $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^1$, $\mathcal{E}^2$. Rappelons qu'un processus à deux indices est dit croissant si $1_{]z,\, z']}.X \geq 0$, pour tout couple de points (z,z') de $[0,1]^2$, et à variation finie s'il est différence de deux processus croissants.

Enfin, une dernière remarque avant de commencer: à plusieurs endroits, on utilisera des constantes universelles c_p et C_p , qui ne dépendent que de p; bien qu'elles puissent varier d'un bout à l'autre du texte, on ne les distinguera pas, et elles seront toujours notées de la même façon

I. Définitions et premières propriétés

Définition: Soit $p \geq 1$; on dira qu'un processus X est une semimartingale de L^p (resp. une 1-semimartingale, une 2-semimartingale) ssi:

-X est nul sur les axes: $X_{0,t} = X_{s,0} = 0$;

-X est continu à droite en probabilité: $\lim_{z' \to z, z' \geq z} X_{z'} = X_z$ (Prob.)

-X est adapté

$- \|X\|_{S_p (\text{resp.} S^1_p, S^2_p)} = (\text{déf.}) \sup_{H \in \mathfrak{B} (\text{resp} \mathfrak{B}^1, \mathfrak{B}^2)} \|H.X\|_{L^p} < \infty$

Nous appellerons S_p (resp. S^1_p , S^2_p) l'espace vectoriel de ces processus, que nous munissons de la norme $\| \ \|_{S_p}$:

Proposition 1: S_p est un espace de Banach

Preuve: remarquons que $\|X\|_{S_p} \geq \sup_{z \in [0,1]^2} \|X_z\|_p$; donc, si X^n est une suite de Cauchy dans S_p , X^n_z converge dans L^p , uniformément en $z \in [0,1]^2$; la limite est donc un processus X , nul sur les axes, continu à droite en probabilité, adapté. De plus, si H est un élément de $\mathfrak{B}$, $H.X^n$ converge vers $H.X$ dans L^p , et donc X est un élément de S_p .

Remarque: il en va bien évidement de même pour S^1_p et S^2_p .

Suivant Bichteler [3], nous pouvons construire l'intégrale stochastique $H.X$, pour tous les processus prévisibles bornés H , de telle manière qu'elle vérifie le théorème de convergence dominée dans L^p. Nous explicitons les premières étapes, qui nous seront utiles par la suite.

Lemme 2: Soit H_n une suite d'éléments de $\mathfrak{B}$, à supports disjoints; il existe une constante universelle C_p , telle que $\|[\Sigma_n (H_n.X)^2]^{\frac{1}{2}}\|_p \leq C_p \|X\|_{S_p}$

Preuve: elle repose sur le lemme classique de Khintchine: si $r_i(w)$ est une suite de Rademacher (v.a.i. prenant les valeurs 1 et -1 avec probabilité $\frac{1}{2}$) sur un espace de probabilité $(W, \underline{\underline{W}}, \mu)$, il existe deux constantes universelles c_p et C_p telles que, pour toute suite de nombres réels (a_i) , on ait:

$$c_p (\Sigma_i a_i^2)^{\frac{1}{2}} \leq \|\Sigma_i a_i r_i(w)\|_{L^p(\mu)} \leq C_p (\Sigma_i a_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

Considérons alors, sur un espace $(W, \underline{\underline{W}}, \mu)$ auxiliaire, une suite de Rademacher r_i Pour tout w dans W , $\Sigma_i r_i(w) H_i$ est un élément de $\mathfrak{B}$, et donc,

$\| \Sigma_i r_i(w) H_i .X\|_p \leq \|X\|_{S_p}$; intégrons par rapport à μ , intervertissons l'ordre de sommation, et appliquons l'inégalité précédente: on obtient le résultat.

Corollaire 3: Sous les hypothèses précédentes, $H_n : X \to 0 \ (S_p)$

Preuve: si tel n'est pas le cas, il existe une suite extraite H_{n_k} et des éléments K_{n_k} de $\mathfrak{B}$ tels que $\|H_{n_k} K_{n_k} . X\|_p > \varepsilon > 0$. Appliquons le lemme précédent à la suite $R_k = H_{n_k} K_{n_k}$;

$$\Sigma_k (R_k . X)^2 < \infty \text{ (p.s.), d'où } R_k . X \to 0 \text{ (p.s.) ;}$$

d'autre part, $|R_k . X| \leq [\Sigma (R_k . X)^2]^{\frac{1}{2}}$, et donc le théorème de convergence dominée s'applique.

Corollaire 4: si A_n est une suite décroissante d'ensembles prévisibles élémentaires, $1_{A_n} : X$ converge dans S_p

Preuve: puisque S_p est complet, si $1_{A_n} : X$ ne converge pas dans S_p, il existe une sous suite A_{n_k} telle que $\|1_{A_{n_{2k+1}} - A_{n_{2k}}} : X\|_{S_p} > \varepsilon > 0$,

ce qui contredit le résultat précédent.

Théorème 5: si A_n est une suite décroissante d'ensembles prévisibles élémentaires d'intersection vide, $1_{A_n} : X \to 0$ dans S_p

Preuve: d'après le corollaire précédent, il suffit de montrer que $\overbrace{(1_{A_n} : X)_z}^{\text{pour tout } z}$ converge vers 0 en probabilité. Or, pour tout $\varepsilon > 0$, et tout ensemble prévisible élémentaire A, il existe un ensemble prévisible élémentaire B, dont l'adhérence $\bar{B}$ est incluse dans A, et qui vérifie:

$$\|1_{A-B} : X\|_{S_p} < \varepsilon$$

En effet, si A s'écrit $H \times]z, z']$, prenons $B_n = H \times]z + (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}), z']$; $1_{A-B_n} : X$ converge vers 0 en probabilité, et y converge donc dans S_p d'après le lemme précédent.

$\varepsilon > 0$ étant donné, choisissons maintenant pour tout n un ensemble B_n d'adhérence incluse dans A_n, de telle façon que $\Sigma_n \|1_{A_n - B_n} : X\|_{S_p} < \varepsilon$; Si B'_n est l'intersection des n premiers B_i, on a alors:

$\|1_{A_n - B'_n} : X\|_{S_p} < \varepsilon$. Mais B'_n est vide à partir d'un certain rang, et donc, pour tout z, $(1_{B'_n}:X)_z$ converge presque sûrement vers 0 , d'où le résultat.

Corollaire 6: Soit X une semimartingale de S_1 ; alors X s'écrit de manière unique $X = M + A$, où A est un processus à variation finie prévisible et M est une martingale faible, i.e. $E(1_{]z,z']}.M/\mathbb{F}_z) = 0$, pour tout $z < z'$;

on a, de plus:

$$\|M\|_{S_1} \leq 2\,\|X\|_{S_1} \quad ; \quad E(\mathrm{var}.A) \leq \|X\|_{S_1}$$

Où var.A désigne la variation totale de A : $\int_{[0,1]^2} |dA|$

Preuve: l'application $A \longrightarrow E1_A.X$, définie sur les ensembles prévisibles élémentaires, se prolonge, d'après ce qui précède, en une mesure sur la tribu prévisible, bornée par $\|X\|_{S_1}$; d'après le théorème de projection duale prévisible [1], il existe un unique processus à variation finie prévisible A , tel que, pour tout ensemble prévisible élémentaire C , on ait: $E1_C.X = E\int 1_C dA$; on a alors $E\mathrm{var}.A \leq \|X\|_{S_1}$, et $M = X-A$ est une martingale faible.

Si X est un élément de S_p $(p > 1)$, le problème se pose de savoir si la décomposition précédente se fait dans S_p ; dans le cas général, nous ne savons pas répondre à cette question, mais, comme nous allons le voir ci-dessous, la réponse est positive dans deux cas particuliers importants: les semimartingales régulières et les 1-semimartingales.

II. Semimartingales régulières

Définition: Un élément X de S_p est dit régulier si les processus $s \longrightarrow X_{s,1}$ et $t \longrightarrow X_{1,t}$ sont des semimartingales (à un indice) par rapport aux filtrations $\mathbb{F}^1_s$ et $\mathbb{F}^2_t$, respectivement.

Remarquons tout d'abord que ce sont des semimartingales spéciales; en effet, considérons une subdivision dyadique de $[0,1]$: $(0=s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1)$, et appliquons le lemme 2 aux processus $H_i(\omega,s,t) = 1_{]s_i,s_{i=1}]}(s)$, $i=0,\dots,n-1$;

nous obtenons: $\| [\Sigma_i (X_{s_{i+1},1} - X_{s_i,1})^2]^{\frac{1}{2}} \|_p \leq C_p \; \|X\|_{S_p}$,et donc $[X_{1,.}]^{\frac{1}{2}}$ est dans L^p .

De même, pour tout $t < 1$, le processus $s \longrightarrow X_{s,t}$ est une semimartingale spéciale: en effet, considérons l'ensemble $\mathfrak{B}_t$ des processus prévisibles élémentaires à un indice, dans la filtration $\mathbb{F}_{\cdot,t}$, et désignons par $H.X_{\cdot,t}$ l'intégrale stochastique élémentaire à un indice: si H_n est une suite d'éléments de $\mathfrak{B}_t$ qui converge uniformément vers 0 , $H_n.X_{\cdot,1}$ converge vers 0 en probabilité, tandis que $H_n.(X_{\cdot,1}-X_{\cdot,t})$ converge vers 0 dans L^p , comme on peut le voir en appliquant la définition de S_p aux processus $\bar{H}_n(\omega,s,u) = H_n(\omega,s)1_{]t,1]}(u)$; $H_n.X_{\cdot,t}$ converge donc vers 0 en probabilité, ce qui suffit à montrer que c'est une semimartingale, en vertu du théorème de Dellacherie-Meyer-Mokobodski; cette semimartingale est spéciale pour les mêmes raisons que précédemment.

Soit alors M la partie martingale faible de X ; $M_{\cdot,t}$ est aussi une semimartingale spéciale dans la filtration $\mathbb{F}_{\cdot,t}$, dont la décomposition canonique peut s'écrire: $M_{\cdot,t} = M^1_{\cdot,t} + X^1_{\cdot,t}$.

Soit $t_1 < t_2$; puisque M est une martingale faible, $E(M_{\cdot,t_2} - M_{\cdot,t_1} / \mathbb{F}_{\cdot,t_1})$ est une martingale de la filtration $\mathbb{F}_{\cdot,t_1}$; elle s'écrit

$$E(M^1_{\cdot,t_2} - M^1_{\cdot,t_1} / \mathbb{F}_{\cdot,t_1}) + E(X^1_{\cdot,t_2} - X^1_{\cdot,t_1} / \mathbb{F}_{\cdot,t_1})$$

Le premier terme est une martingale, grâce à la propriété (F.4), donc le second aussi; or, c'est un processus à variation finie, continu à droite en probabilité: considérons sa version à trajectoires continues à droite; c'est un processus prévisible dans la filtration $\mathbb{F}_{\cdot,t_1}$: en effet, il s'écrit $E(X^1_{\cdot,t_2} / \mathbb{F}_{\cdot,t_1}) - X^1_{\cdot,t_1}$ et c'est une autre conséquence de (F.4) que d'avoir le premier terme prévisible dans la filtration $\mathbb{F}_{\cdot,t_1}$; ce processus est donc nul, et l'on voit que le processus $t \longrightarrow X_{s,t}$ est une martingale dans la filtration $\mathbb{F}_{s,t}$, où encore dans la filtration $\mathbb{F}^2_t$, ce qui revient au même.

On peut faire le même travail sur le processus $(s,t) \longrightarrow M^1_{s,t}$, en échangeant les rôles de s et de t , et l'on obtient une décomposition de X de la forme: $X = M + X^1 + X^2 + A$, où, cette fois ci, M est une martingale à deux indices, A un processus prévisible à variation finie, X^1 est à variation finie prévisible par rapport à la première coordonnée, et une martingale par rapport à la seconde, et X^2 a les propriétés symétriques de celles de X^1 en échangeant les rôles des deux coordonnées; on a alors le résultat suivant:

<u>Théorème 7</u>: Dans la décomposition précédente, chacun des termes est dans S_p et y a une norme majorée par $C_p \|X\|_{S_p}$

Preuve: tout d'abord, chacun des termes est nul sur les axes, adapté, et continu à droite en probabilité. Considérons alors un élément H de $\mathfrak{B}$, et posons

$H_s(\omega,u,t) = H(\omega,u,t)1_{u\leq s}$; le processus $Y_s = H_s.X$ est une semimartingale spéciale dans la filtration $\mathbb{F}^1_s$, dont la partie martingale N est $H_s.(M+X^2)$ et la partie à variation finie prévisible $H_s.(X^1+A)$.

Soit $(s_i)_{i=1}^n$ une subdivision dyadique de $[0,1]$: appliquons le lemme 2 aux processus $(H_{s_{i+1}}-H_{s_i})_{i=1}^{n-1}$; nous obtenons:

$$\|[\Sigma_{i=1}^{n-1}(Y_{s_{i+1}}-Y_{s_i})^2]^{\frac{1}{2}}\|_p \leq C_p \|X\|_{S_p}$$

Nous en déduisons que $\|[Y]_1^{\frac{1}{2}}\|_p \leq C_p \|X\|_{S_p}$, d'où, en n'oubliant pas que la constante C_p peut varier de place en place:

$$\|[N]^{\frac{1}{2}}\|_p \leq C_p \|X\|_{S_p} \quad \text{, et donc:} \quad \|H.(M+X^2)\|_p \leq C_p \|X\|_{S_p} .$$

Par définition de S_p, cela signifie exactement que $\|M+X^2\|_{S_p} \leq C_p \|X\|_{S_p}$.
Par différence, on obtient le même résultat pour X^1+A ; échangeant les rôles des deux coordonnées, et appliquant ce résultat à la semimartingale $M+X^2$, on obtient finalement: $\|M\|_{S_p} \leq C_p \|X\|_{S_p}$, d'où, par différence $\|X^2\|_{S_p} \leq C_p \|X\|_{S_p}$;
Par symétrie, on obtient de même $\|X^1\|_{S_p} \leq C_p \|X\|_{S_p}$, et, finalement, le même résultat pour A.

<u>Remarque</u>: comme dans le cas $p=1$, il est aisé de caractériser les processus prévisibles à variation finie qui sont éléments de S_p : ce sont ceux dont la variation $\int_{[0,1]^2}|dA|$ est dans L^p; de même, nous pouvons caractériser les martingales de S_p au moyen d'une propriété qui ne dépend que de leurs trajectoires: étant donné deux subdivisions dyadiques de $[0,1]$, $\underline{s} = (s_i)_{i=1}^n$ et $\underline{t} = (t_j)_{j=1}^m$, considérons le

quadrillage $\underline{\underline{c}} = \underline{\underline{s}}\times\underline{\underline{t}}$: pour tout point $z=(s_i,t_j)$ de $\underline{\underline{c}}$, notons $\bar{z}$ son successeur (s_{i+1},t_{j+1}) , s'il existe, et $\underline{\underline{c}}^o$ l'ensemble des points de $\underline{\underline{c}}$ ayant un successeur; enfin, notons $S_{\underline{\underline{c}}}(X) = [\Sigma_{\underline{\underline{c}}^o}(1_{]z,\bar{z}]}.X)^2]^{\frac{1}{2}}$:

Theorème 8: Soit $p\geq 1$; il existe des constantes universelles c_p et C_p , telles que pour toute martingale M , on ait:

$$(1) \qquad c_p \sup_{\underline{\underline{c}}} \|S_{\underline{\underline{c}}}(M)\|_p \leq \|M\|_{S_p} \leq C_p \sup_{\underline{\underline{c}}} \|S_{\underline{\underline{c}}}(M)\|_p$$

Preuve: la première inégalité est une conséquence immédiate du lemme 2, et est valable pour toute semimartingale X de S_p . Pour montrer la seconde, considérons un élément H de $\mathfrak{B}$, constant en dehors du quadrillage $\underline{\underline{c}}$; on a alors:

$S_{\underline{\underline{c}}}(H:M) \leq S_{\underline{\underline{c}}}(M)$, et il suffit donc de montrer que, pour toute martingale M , $\|M_{1,1}\|_p \leq C_p \sup_{\underline{\underline{c}}} \|S_{\underline{\underline{c}}}(M)\|_p$.

Dans le cas où $p>1$, c'est un résultat bien connu, et on a en plus équivalence entre $\|M_{1,1}\|_p$ et $\sup_{\underline{\underline{c}}} \|S_{\underline{\underline{c}}}(M)\|_p$ [6, par exemple].

Dans le cas $p=1$, la méthode utilisée dans [6] conduit au résultat: $E|M_{1,1}| \leq C \sup_{\underline{\underline{s}}} E[\Sigma_{\underline{\underline{s}}}(M_{s_{i+1},1}-M_{s_i,1})^2]^{\frac{1}{2}}$, où $\underline{\underline{s}}$ parcourt l'ensemble des subdivisions dyadiques de $[0,1]$. Une telle subdivision étant fixée, considérons deux espaces probabilisés auxiliaires, $(W,\underline{\underline{W}},\mu)$ et $(W',\underline{\underline{W}}',\mu')$, avec deux suites de Rademacher $r_i(w)$ et $r_i'(w')$; en notant $\hat{E}$ et $\hat{E}'$ les espérances sur ces espaces, on a d'après le lemme de Khintchine:

$$E[\Sigma_{\underline{\underline{s}}}(M_{s_{i+1},1}-M_{s_i,1})^2]^{\frac{1}{2}} \leq C\, \hat{E}E|\Sigma_{\underline{\underline{s}}} r_i(w)(M_{s_{i+1},1}-M_{s_i,1})|$$

Fixons alors w , et considérons la martingale, dans la filtration $\mathbb{F}_t^2$, $Y_t^w = \Sigma_{\underline{\underline{s}}} r_i(w)(M_{s_{i+1},t}-M_{s_i,t})$; on a, de nouveau:

$$E|Y_1^w| \leq C \liminf_n E[\Sigma_{\underline{\underline{t}}_n}(Y^w_{t_{i+1}}-Y^w_{t_i})^2]^{\frac{1}{2}} \qquad , \text{ où } \underline{\underline{t}}_n = (\tfrac{i}{2^n})_{i=1}^{2^n-1}$$

On peut alors utiliser le lemme de Fatou, puis une nouvelle fois le lemme de khintchine, pour obtenir:

$$\hat{E}\,E\,|Y_1^w| \leq C \sup_{\underline{\underline{s}}\times\underline{\underline{t}}} \hat{E}'\hat{E}\,E|\Sigma_{\underline{\underline{s}}\times\underline{\underline{t}}} r_i(w)r_i'(w')Z_{i,j}|$$

où $Z_{i,j} = 1_{](s_i,t_j),(s_{i+1},t_{j+1})]}.M$

Il reste à appliquer une nouvelle fois le lemme de Khintchine, en remarquant que $r_i(w)r'_j(w')$ forment un nouveau système de Rademacher.

III 1-semimartingales

Considérons un élément X de S_p^1 ; c'est en particulier un élément de S_p , et il admet une décomposition $X = M + A$, où M est une martingale faible et A un processus prévisible à variation finie. Mais, si nous appliquons le corollaire 6 au cas où la filtration $\mathbb{F}^2_\bullet$ est constamment égale à $\mathbb{F}^1_1$,nous obtenons une décomposition $X = M^1 + A^1$, où $M_{s,t}$ est une martingale en s , pour la filtration $\mathbb{F}^1_s$, et A^1 un processus à variation finie 1-prévisible.

<u>Théorème 9</u>: Les processus M, A, M^1, A^1 sont dans S^1_p, avec une norme majorée par
$$c_p \|X\|_{S^1_p}$$

Preuve: remarquons tout d'abord que les processus M^1et A^1 sont adaptés; en effet, pour tout t , $X_{\bullet,t} = M^1_{\bullet,t} + A^1_{\bullet,t}$ est la décomposition canonique de la semimartingale spéciale $X_{\bullet,t}$, dans la filtration $\mathbb{F}^1_\bullet$, donc, grâce à la propriété (F.4), c'est sa décomposition spéciale dans la filtration $\mathbb{F}_{\bullet,t}$; $M^1_{s,t}$ et $A^1_{s,t}$ sont donc $\mathbb{F}_{s,t}$ adaptés.

La démonstration du théorème 7 s'applique sans changements pour montrer que $\|M^1\|_{S^1_p} \leq c_p \|X\|_{S^1_p}$ et $\|A^1\|_{S^1_p} \leq c_p \|X\|_{S^1_p}$.

Pour obtenir le résultat, il suffit donc de remarquer que:
$$\|A\|_{S^1_p} = \|A\|_{S^1_p} = \|\int |dA|\,\|_p \leq c_p \|\int |dA^1|\,\|_p = c_p \|A^1\|_{S^1_p} \quad ,$$
la seule chose à démontrer étant l'inégalité du milieu.

Or, pour tout élément H de $\mathcal{E}$, $E(H.A) = E(H.A^1) = E(H.X)$, donc, le processus A est la projection duale prévisible du processus A^1 ; A^1 étant lui même 1-prévisible, A est en fait sa 2-projection duale prévisible [1]. Il suffit donc de remarquer que, si A est un processus à variation finie intégrable, et $\bar{A}$ sa 2-projection duale prévisible, on a:

$$(2) \qquad \|\int_{[0,1]^2} |d\bar{A}|\,\|_p \leq c_p \|\int_{[0,1]^2} |dA|\,\|_p \quad .$$

On se ramène aussitôt au cas où A est croissant, nul sur les axes. $\bar{A}_{1,\cdot}$ est alors la projection duale prévisible de $A_{1,\cdot}$ dans la filtration $\mathbb{F}^2_\cdot$, et donc:

$\|\bar{A}_{1,1}\|_p \leq C_p \|A_{1,1}\|_p$, d,après les inégalités B.D.G. [5, VI, 100], ce qui est le résultat cherché.

Remarque: l'inégalité (2) est également valable lorsque $\bar{A}$ est la 1-projection duale prévisible de A, et donc aussi si c'est sa projection duale prévisible; il en va de même pour les projections duales optionnelles.

Nous allons étudier maintenant quelques exemples de 1-semimartingales, qui sont des 1-martingales (i.e. $X_{\cdot,t}$ est une martingale par rapport à la filtration $\mathbb{F}^1_\cdot$). Nous pouvons alors supposer que $\mathbb{F}^2_t = \mathbb{F}^1_1$, et nous notons alors $\mathbb{F}^1_s = \mathbb{F}_s$.

1)Etudions d'abord le cas où $A_{s,t} = E(A_t/\mathbb{F}_s)$, A_t étant un processus à variation finie.

Nous avons donné dans [2] un exemple de processus croissant A_t, $A_0=0$, $A_1=1$, et tel que $A_{s,t}$ ne soit pas un élément de S_1 (ni même de l'espace S_0, analogue de S_1 pour la convergence en probabilité).

Notons, pour tout processus $(Y_s)_{0\leq s\leq 1}$ $Y^* = \sup_s |Y_s|$, et pour toute subdivision $\underline{t} = (t_i)_{i=0}^n$:

$$\operatorname{var}^*_{\underline{t}}(A) = \Sigma_{\underline{t}}(A_{\cdot,t_{i+1}} - A_{\cdot,t_i})^* \quad \text{et} \quad \operatorname{var}^*(A) = \sup_{\underline{t}} \operatorname{var}^*_{\underline{t}}(A) \quad ;$$

Théorème 10: Pour tout $p\geq 1$, $\|A\|_{S_p} \leq C_p \|\operatorname{var}^*(A)\|_p$

Nous nous appuierons sur le lemme suivant:

Lemme 11: Il existe deux constantes universelles c_p et C_p telles que, pour toute famille $(Y^i)_{i=1}^n$ de martingales, on ait:

$$(3) \qquad c_p \|\Sigma_i (Y^i_\cdot)^*\|_p \leq \|\Sigma_i [Y^i_\cdot]^{\frac{1}{2}}_1\|_p \leq C_p \|\Sigma_i (Y^i_\cdot)^*\|_p$$

Preuve: montrons la première partie de l'inégalité; en notant $Y_s^{i*} = \sup_{u\leq s} |Y_s^i|$; on a, pour tout temps d'arrêt T : $E(Y_1^{i*} - Y_{T-}^{i*}/ \mathbb{F}_T) \leq 4E([Y^i_\cdot]_1^{\frac{1}{2}}/ \mathbb{F}_T)$ [5, VII 91]

En sommant, on obtient, en posant $Z_s = \Sigma_i Y_s^{i*}$, $X = \Sigma_i [Y^i]_1^{\frac{1}{2}}$:

$E(Z_1 - Z_{T-}/ \mathbb{F}_T) \leq 4E(X/ \mathbb{F}_T)$, et, grâce au lemme de Garsia-Neveu [5,VI 99], $\|Z_1\|_p \leq 4p \|X\|_p$, ce qui est l'inégalité cherchée.

L'autre sens se traite de la même façon.

Preuve du théorème 10: soit $\underline{t} = (t_i)_{i=1}^n$ une subdivision de $[0,1]$, et $(H_i)_{i=1}^{n-1}$ des processus prévisibles bornés par 1, à un indice; posons $Y_s^i = A_{s,t_{i+1}} - A_{s,t_i}$, pour $i=0, \ldots, n-1$, et $\int H_s^i dY_s^i = H^i . Y^i$; on a: $[H^i . Y^i]_1 \leq [Y^i]_1$, et donc:

$$\|\Sigma_i H_i . Y^i\|_p \leq \|\Sigma_i (H_i . Y^i)^*\|_p \leq \frac{1}{c_p} \|\Sigma_i [Y^i]_1^{\frac{1}{2}}\|_p \leq \frac{C_p}{c_p} \|\Sigma_i (Y^i_\cdot)^*\|_p$$

et la dernière quantité, par définition, est majorée par $\frac{C_p}{c_p} \|\mathrm{var}^*(A)\|_p$.

<u>Remarque</u>: l'inégalité inverse n'a certainement pas lieu, comme le montre l'existence d'éléments de S_p de la forme $E(X_t/ \mathbb{F}_s)$, où X_t n'est pas à variation finie: nous en verront des exemples plus bas.

Un exemple intéressant de la situation du théorème précédent est le cas des semimartingales étudié par Wong et Zakai: $A_{s,t} = E(A_t/ \mathbb{F}_s)$, où A_t s'écrit $A_t = \int_0^t Y_t d\mu(t)$, où μ est une mesure déterministe sur $[0,1]$, positive de masse 1 , pour fixer les idées; dans ce cas:

(4) $$\|\mathrm{var}^*(A)\|_p \leq C_p \|\int_0^1 [Y_{\cdot,t}]_1^{\frac{1}{2}} d\mu(t)\|_p$$, où $Y_{s,t}$ désigne la martingale $E(Y_t/ \mathbb{F}_s)$

Pour le voir, nous aurons besoin d'un lemme:

<u>Lemme 12</u>: Soit Y_t , $t\in[0,1]$, un processus mesurable intégrable, et $Y_{s,t}$ la martingale $E(Y_t/ \mathbb{F}_s)$; supposons que $E\int_0^1 [Y_{\cdot,t}]^{\frac{1}{2}} d\mu(t) < \infty$; on a alors:

(5) $$[\int_0^1 Y_{\cdot,t} d\mu(t)]^{\frac{1}{2}} \leq \int_0^1 [Y_{\cdot,t}]^{\frac{1}{2}} d\mu(t) \quad \text{p.s.}$$

Preuve: supposons d'abord Y borné; dans le cas il est étagé i.e. il s'écrit $\Sigma_{i=1}^n Y^i 1_{]t_i,t_{i+1}]}(t)$, ce n'est rien d'autre que l'inégalité de Kunita-Watanabé. Si Y est un processus mesurable quelconque, il existe une suite Y^n de processus étagés, tels que $E\int[Y_{\cdot,t}-Y^n_{\cdot,t}]^{\frac{1}{2}}d\mu(t) \longrightarrow 0 \ (n \longrightarrow \infty)$: cela peut se voir en utilisant le théorème des classes monotones, en remarquant que, si Y^n converge vers Y , uniformément où en croissant, alors, pour tout t , $Y^n_{\cdot,t}$ converge vers $Y_{\cdot,t}$ dans $\mathbb{H}_1$, et donc $E\int_0^1[Y_{\cdot,t}-Y^n_{\cdot,t}]^{\frac{1}{2}}d\mu(t)$ converge vers 0 , en utilisant le théorème de convergence dominée.

Soit alors, Y borné étant donné, une suite Y^n de processus étagés tels que $\int[Y_{\cdot,t}-Y^n_{\cdot,t}]^{\frac{1}{2}}d\mu(t)$ converge vers 0 p.s. et dans L^1 . $\int_0^1 Y^n_{\cdot,t}d\mu(t)$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{H}_1$, et converge dans L^1 vers $\int_0^1 Y_{\cdot,t}d\mu(t)$; quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $[\int_0^1 Y^n_{\cdot,t}d\mu(t)]^{\frac{1}{2}}$ converge p.s. vers $[\int_0^1 Y_{\cdot,t}d\mu(t)]^{\frac{1}{2}}$, ce qui nous donne le résultat.

On passe du cas borné au cas général par troncation.

On peut maintenant prouver (4): il suffit de montrer que, pour toute subdivision dyadique $\underline{t}$ de $[0,1]$, on a: $\|\mathrm{var}^*_{\underline{t}}(A)\|_p \leq C_p \|\int_0^1[Y_{\cdot,t}]^{\frac{1}{2}}d\mu(t)\|_p$

Si $\underline{t} = (t_i)_{i=1}^n$, posons $Z^i = A_{\cdot,t_{i+1}} - A_{\cdot,t_i}$; d'après (3), on a:

$$\|\mathrm{var}_{\underline{t}}(A)\|_p \leq C_p \|\Sigma_i [Z^i]_1^{\frac{1}{2}}\|_p \quad . \text{ Or,}$$

$[Z^i]_1^{\frac{1}{2}} = [\int_{t_i}^{t_{i+1}} Y_{\cdot,t}d\mu(t)]^{\frac{1}{2}}$ et, d'après (5), cette dernière quantité est inférieure où égale à $\int_{t_i}^{t_{i+1}}[Y_{\cdot,t}]^{\frac{1}{2}}d\mu(t)$, d'où le résultat.

2)Supposons que toutes les martingales $X_{\cdot,t}$ (t dyadique) appartiennent à l'espace stable engendré par une même martingale Y de $\mathbb{H}_1$.

Dans ce cas, $X_{s,t}$ s'écrit $\int_0^s H_{u,t}dY_s$; si X est dans S_p , $d[Y]_s dP$ -presque partout, $t \longrightarrow H_{s,t}$ est à variation finie sur les dyadiques, et on a, en dézignant par $\mathrm{var}(H_{s,.})$ cette variation:

$$(6) \qquad c_p \|X\|_{S_p} \leq \|\{\int_0^1 \mathrm{var}(H_{s,.})^2 d[Y]_s\}^{\frac{1}{2}}\|_p \leq C_p \|X\|_{S_p}$$

Preuve: remarquons que, pour tout élément K de $\mathfrak{S}$,

$$K.X = \int_0^1 \{\int_0^1 K(\omega,s,t)H_{s,dt}\}dY_s$$, l'intégrale entre parenthèses étant une intégrale élémentaire par rapport à $H_{s,.}$; les deux membres de cette égalité sont parfaitement définis lorsque $H(\omega,s,t) = \Sigma_i H_s^i(\omega)1_{]t_i,t_{i+1}]}(t)$ $\underline{\underline{t}} = (t_i)_{i=1}^n$ étant une subdivision dyadique de $[0,1]$, $(H^i)_{i=0}^{n-1}$ étant des processus prévisibles quelquonques bornés par 1, et il est clair qu'alors, les deux membres restent égaux; écrivons la pour $H_s^i = k_s \mathrm{signe}(H_{s,t_{i+1}} - H_{s,t_i})$, où k_s est un processus prévisible quelquonque; si nous notons $\mathrm{var}_{\underline{\underline{t}}}(H_{s,.}) = \Sigma_{\underline{\underline{t}}} |H_{s,t_{i+1}} - H_{s,t_i}|$, nous obtenons: $\|\int_0^1 k_s \mathrm{var}_{\underline{\underline{t}}}(H_{s,.})dY_s\|_p \leq \|X\|_{S_p}$; ceci étant valable pour tout k prévisible borné, nous avons [6, VII 104] :

$$\| [\int_0^1 \mathrm{var}_{\underline{\underline{t}}}(H_{s,.})dY_s]^{\frac{1}{2}}\|_p \leq C_p \|X\|_{S_p}$$; on en déduit la seconde partie de (6), et la première se démontre de la même manière.

<u>Remarque 1</u>: dans le cas $p=2$, la démonstration précédente montre que l'on peut prendre $c_p = C_p = 1$.

<u>Remarque 2</u>: en général, dans les semimartingales du type précédent, $X_{1,.}$ n'est pas à variation finie, comme le montre l'exemple suivant:

$(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{F}_s, P)$ est un espace vérifiant les conditions habituelles, sur lequel existe un mouvement Brownien B_s ; $X_{s,t} = \int_0^s 1_{0 \leq B_u \leq t} dB_u$ est, pour tout p, un élément de S_p d'après l'étude précédente, mais

$$X_{1,t} = B_1^+ \wedge t + \tfrac{1}{2}(L_1^t - L_1^0)$$

où L_s^t est le temps local en t du mouvement Brownien, et donc n'est pas à variation finie.

3) Enfin, dans le cas $p=2$, il y a une classe de semimartingales particulièrement importante: ce sont les martingales à accroissements fortement orthogonaux:pour tout $t \leq t_1 \leq t_2$, $<X_{\cdot,t}, X_{\cdot,t_2} - X_{\cdot,t_1}> = 0$. Alors,

$$\|X\|_{S_2}^2 = EX_{1,1}^2 = E<X_{\cdot,1}>_1 \quad .$$

En effet, dans ce cas, $(s,t) \dashrightarrow <X_{\cdot,t}>_s$ est un processus croissant (à deux indices), et, sil'on note $<X>_{s,t}$ sa version continue à droite (qui est prévisible), on a, pour tout processus prévisible H , élémentaire ou non, borné:

$$E(H.X)^2 = E\int_{[0,1]^2} H^2 d<X>$$

C'est la situation du processus de Wiener à deux indices $W_{s,t}$ lorsque $\mathbb{F}_s$ est la tribu engendrée par $(W_{u,v})_{u \leq s, v \leq 1}$, où, plus généralement, pour toutes les martingales fortes au sens de [4].

Références:

[1] Bakry, D.: Théorèmes de section et de projection pour les processus à deux indices; ZW 55, 1981, 55-71.

[2] Bakry, D.: Une remarque sur les semimartingales à deux indices; Sém. Prob. XV, 1981, L.N. 850, 671-672.

[3] Bichteler, K.: Stochastic integration and L^p-theory of semimartingales; à paraitre dans Ann. Prob..

[4] Cairoli, R.; Walsh, J.B.: Stochastic integrals in the plane; Acta Math. 134, 1975, 111-183.

[5] Dellacherie, C.; Meyer, P.A.: Probabilités et potentiel, vol. 2; Paris, Hermann, 1980.

[6] Meyer, P.A.; Théorie élémentaire des processus à deux indices; Processus aléatoires à deux indices, Colloque E.N.S.T.-C.N.E.T. 1980, L.N. 863, 1-39.

[7] Wong, E.; Zakai, M.: Weak martingales and stochastic integrals in the plane, ZW 29, 1974, 109-122.