

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

DOMINIQUE BAKRY

## **Semimartingales à deux indices**

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 16 (1982), p. 355-369

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1982\\_\\_16\\_\\_355\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__355_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

SEMIMARTINGALES A DEUX INDICES

par Dominique Bakry

Le théorème de Dellacherie-Meyer-Mokobodzky [5, VIII 80] permet de caractériser les semimartingales comme les processus adaptés, continus à droite, tels que l'intégrale stochastique des processus prévisibles élémentaires se prolonge en une mesure sur la tribu prévisible à valeurs dans l'espace  $L^0$ . On s'intéresse ici à la situation des processus à deux indices, comme mesure à valeurs dans l'espace  $L^p$ ,  $p \geq 1$  : étant donné un espace de probabilité  $(\Omega, \mathbb{F}, P)$ , muni de deux filtrations  $(\mathbb{F}_s^1)$  et  $(\mathbb{F}_t^2)$  satisfaisant à la condition de commutation (F.4) de [4], on connaît quatre modèles de semimartingales à deux indices:

-Les processus à variation finie

-Les martingales de  $L^p$ ,  $p > 1$

-Certains processus d'un modèle mixte, de la forme  $E(A_t / \mathbb{F}_s^1)$ ,

étudiés par Wong et Zakai dans [7], où le processus  $A_t$  est à variation finie, adapté à la filtration  $\mathbb{F}_t^2$ , et satisfait en outre à certaines conditions assez restrictives

-Evidemment, le modèle symétrique obtenu en échangeant les rôles de  $s$  et  $t$ .

Nous étudions ci dessous les processus  $X_{s,t}$  adaptés qui déterminent des mesures sur la tribu prévisible à valeurs  $L^p$ . Sous l'hypothèse supplémentaire que, à  $s$  et  $t$  fixés,  $X_{s,t}$  soit une semimartingales par rapport aux filtrations  $\mathbb{F}_s^1$  et  $\mathbb{F}_t^2$  respectivement (nous disons alors que  $X$  est régulière), nous montrons que les semimartingales de  $L^p$  se décomposent en somme de quatre processus des types précédents, puis, dans le cas où  $X$  définit une mesure sur la tribu plus large des processus  $l$ -prévisibles, nous obtenons une décomposition plus simple, et nous étudions quelques exemples où l'hypothèse de régularité n'est pas toujours satisfaite.

Notations: nous suivons pour l'essentiel celles de [6]; tous nos processus sont indexés par  $[0,1]^2$ , sur lequel on définit l'ordre partiel:

$$(s,t) \leq (s',t') \text{ ssi } s \leq s' \text{ et } t \leq t'$$

La notation  $(s,t) < (s',t')$  signifie que l'inégalité stricte a lieu pour les deux composantes; si  $z$  et  $z'$  sont deux points de  $[0,1]^2$ , les notations  $]z,z']$ ,  $[z,z'$ , etc... se comprennent dès lors d'elles mêmes.

On se donne deux filtrations  $(\mathbb{F}_s^1)_{s \in [0,1]}$  et  $(\mathbb{F}_t^2)_{t \in [0,1]}$

vérifiant les conditions habituelles ainsi que la condition (F.4) : pour tout  $(s,t)$ , les espérances conditionnelles  $E(. / \mathbb{F}_t^1)$  et  $E(. / \mathbb{F}_t^2)$  commutent; nous notons alors  $\mathbb{F}_{s,t}$  la tribu  $\mathbb{F}_s^1 \cap \mathbb{F}_t^2$ .

On note  $\mathfrak{B}$  (resp.  $\mathfrak{B}^1, \mathfrak{B}^2$ ) l'ensemble des processus élémentaires prévisibles (resp. 1-prévisibles, 2-prévisibles) bornés par 1 en module, i.e. l'ensemble des processus  $H(\omega, s, t)$  qui s'écrivent

$$\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m h_{i,j}(\omega) 1_{]s_i, s_{i+1}]}(s) 1_{]t_j, t_{j+1}]}(t) \quad \text{où } (s_i)_{i=1}^{n+1} \text{ et } (t_j)_{j=1}^{m+1}$$
 sont deux subdivisions dyadiques de  $[0,1]$  et  $h_{i,j}$  des variables aléatoires bornées par 1 mesurables par rapport à  $\mathbb{F}_{s_i, t_j}^1$  (resp.  $\mathbb{F}_{s_i}^1, \mathbb{F}_{t_j}^2$ ). La tribu engendrée par  $\mathfrak{B}$  (resp.  $\mathfrak{B}^1, \mathfrak{B}^2$ ) est la tribu prévisible (resp. 1-prévisible, 2-prévisible); elle est notée  $\mathcal{P}$  (resp.  $\mathcal{P}^1, \mathcal{P}^2$ ).

Si  $H$  s'écrit  $h 1_{]s,s']} 1_{]t,t']}$ , on définit l'intégrale stochastique de  $H$  par rapport à  $X$  : c'est la variable aléatoire

$$H.X = h(X_{s',t} - X_{s,t} - X_{s,t} + X_{s,t}) \quad \text{et l'on note } H:X \text{ le processus } z \rightarrow H 1_{]0,z]} . X, z \in [0,1]^2.$$

Par linéarité, cette définition se prolonge au cas où  $H$  est un élément de  $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}^1, \mathfrak{B}^2$ . Rappelons qu'un processus à deux indices est dit croissant si  $1_{]z, z']} . X \geq 0$ , pour tout couple de points  $(z, z')$  de  $[0,1]^2$ , et à variation finie s'il est différence de deux processus croissants.

Enfin, une dernière remarque avant de commencer: à plusieurs endroits, on utilisera des constantes universelles  $c_p$  et  $C_p$ , qui ne dépendent que de  $p$ ; bien qu'elles puissent varier d'un bout à l'autre du texte, on ne les distinguera pas, et elles seront toujours notées de la même façon

### I. Définitions et premières propriétés

Définition: Soit  $p \geq 1$  ; on dira qu'un processus  $X$  est une semimartingale de  $L^p$  (resp. une 1-semimartingale, une 2-semimartingale) ssi :

-  $X$  est nul sur les axes:  $X_{0,t} = X_{s,0} = 0$  ;

-  $X$  est continu à droite en probabilité:  $\lim_{z' \rightarrow z, z' \geq z} X_{z'} = X_z$  (Prob.)

-  $X$  est adapté

-  $\|X\|_{S_p(\text{resp. } S_p^1, S_p^2)} = (\text{déf.}) \sup_{H \in \mathfrak{B}} (\text{resp. } \mathfrak{B}^1, \mathfrak{B}^2) \|H.X\|_{L^p} < \infty$

Nous appellerons  $S_p$  (resp.  $S_p^1, S_p^2$ ) l'espace vectoriel de ces processus; que nous munissons de la norme  $\| \cdot \|_{S_p}$  :

Proposition 1:  $S_p$  est un espace de Banach

Preuve: remarquons que  $\|X\|_{S_p} \geq \sup_{z \in [0,1]} \|X_z\|_p$  ; donc, si  $X^n$  est une suite de Cauchy dans  $S_p$ ,  $X_z^n$  converge dans  $L^p$ , uniformément en  $z \in [0,1]$  ; la limite est donc un processus  $X$ , nul sur les axes, continu à droite en probabilité, adapté. De plus, si  $H$  est un élément de  $\mathfrak{B}$ ,  $H.X^n$  converge vers  $H.X$  dans  $L^p$ , et donc  $X$  est un élément de  $S_p$ ,

Remarque: il en va bien évidemment de même pour  $S_p^1$  et  $S_p^2$ .

Suivant Bichteler [3], nous pouvons construire l'intégrale stochastique  $H.X$ , pour tous les processus prévisibles bornés  $H$ , de telle manière qu'elle vérifie le théorème de convergence dominée <sup>dans  $L^p$</sup> . Nous explicitons les premières étapes, qui nous seront utiles par la suite.

Lemme 2: Soit  $H_n$  une suite d'éléments de  $\mathfrak{B}$ , à supports disjoints; il existe une constante universelle  $C_p$ , telle que  $\|[\sum_n (H_n.X)^2]^{\frac{1}{2}}\|_p \leq C_p \|X\|_{S_p}$

Preuve: elle repose sur le lemme classique de Khintchine: si  $r_i(w)$  est une suite de Rademacher (v.a.i. prenant les valeurs 1 et -1 avec probabilité  $\frac{1}{2}$ ) sur un espace de probabilité  $(W, \underline{W}, \mu)$ , il existe deux constantes universelles  $c_p$  et  $C_p$

telles que, pour toute suite de nombres réels  $(a_i)$ , on ait:

$$c_p (\sum_i a_i^2)^{\frac{1}{2}} \leq \|\sum_i a_i r_i(w)\|_{L^p(\mu)} \leq C_p (\sum_i a_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

Considérons alors, sur un espace  $(W, \underline{W}, \mu)$  auxiliaire, une suite de Rademacher  $r_i$ . Pour tout  $w$  dans  $W$ ,  $\sum_i r_i(w) H_i$  est un élément de  $\mathfrak{B}$ , et donc,

$$\|\sum_i r_i(w) H_i.X\|_p \leq \|X\|_{S_p}; \text{ intégrons par rapport à } \mu, \text{ intervertissons}$$

l'ordre de sommation, et appliquons l'inégalité précédente: on obtient le résultat.

Corollaire 3: Sous les hypothèses précédentes,  $H_n: X \rightarrow 0$  ( $S_p$ )

Preuve: si tel n'est pas le cas, il existe une suite extraite  $H_{n_k}$  et des éléments  $K_{n_k}$  de  $\mathfrak{B}$  tels que  $\|H_{n_k} K_{n_k} \cdot X\|_p > \varepsilon > 0$ . Appliquons le lemme précédent à la suite  $R_k = H_{n_k} K_{n_k}$ ;

$$\sum_k (R_k \cdot X)^2 < \infty \text{ (p.s.)}, \text{ d'où } R_k \cdot X \rightarrow 0 \text{ (p.s.)};$$

d'autre part,  $|R_k \cdot X| \leq [\sum_k (R_k \cdot X)^2]^{1/2}$ , et donc le théorème de convergence dominée s'applique.

Corollaire 4: si  $A_n$  est une suite décroissante d'ensembles prévisibles élémentaires,  $1_{A_n}: X$  converge dans  $S_p$

Preuve: puisque  $S_p$  est complet, si  $1_{A_n}: X$  ne converge pas dans  $S_p$ , il existe une sous suite  $A_{n_k}$  telle que  $\|1_{A_{n_{2k+1}}} - 1_{A_{n_{2k}}}: X\|_{S_p} > \varepsilon > 0$ ,

ce qui contredit le résultat précédent.

Théorème 5: si  $A_n$  est une suite décroissante d'ensembles prévisibles élémentaires d'intersection vide,  $1_{A_n}: X \rightarrow 0$  dans  $S_p$

Preuve: d'après le corollaire précédent, il suffit de montrer que  $\overbrace{(1_{A_n}: X)_z}^{\text{pour tout } z}$  converge vers 0 en probabilité. Or, pour tout  $\varepsilon > 0$ , et tout ensemble prévisible élémentaire  $A$ , il existe un ensemble prévisible élémentaire  $B$ , dont l'adhérence  $\bar{B}$  est incluse dans  $A$ , et qui vérifie:

$$\|1_{A-B}: X\|_{S_p} < \varepsilon$$

En effet, si  $A$  s'écrit  $H \times ]z, z']$ , prenons  $B_n = H \times ]z + (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}), z']$ ;  $1_{A-B_n}: X$  converge vers 0 en probabilité, et y converge donc dans  $S_p$  d'après le lemme précédent.

$\varepsilon > 0$  étant donné, choisissons maintenant pour tout  $n$  un ensemble  $B_n$  d'adhérence incluse dans  $A_n$ , de telle façon que  $\sum_n \|1_{A_n - B_n}: X\|_{S_p} < \varepsilon$ ; Si  $B'_n$  est l'intersection des  $n$  premiers  $B_i$ , on a alors:

$$\|1_{A_n - B'_n}: X\|_{S_p} < \varepsilon. \text{ Mais } B'_n \text{ est vide à partir d'un certain}$$

rang, et donc, pour tout  $z$ ,  $(1_{B_n} X)_z$  converge presque sûrement vers 0, d'où le résultat.

Corollaire 6: Soit  $X$  une semimartingale de  $S_1$ ; alors  $X$  s'écrit de manière unique  $X = M + A$ , où  $A$  est un processus à variation finie prévisible et  $M$  est une martingale faible, i.e.  $E(1_{]z, z']} M / \mathbb{F}_z) = 0$ , pour tout  $z < z'$ ;

on a, de plus:

$$\|M\|_{S_1} \leq 2 \|X\|_{S_1} \quad ; \quad E(\text{var}.A) \leq \|X\|_{S_1}$$

Où  $\text{var}.A$  désigne la variation totale de  $A : \int_{[0,1]^2} |dA|$

Preuve: l'application  $A \rightarrow E1_A.X$ , définie sur les ensembles prévisibles élémentaires, se prolonge, d'après ce qui précède, en une mesure sur la tribu prévisible, bornée par  $\|X\|_{S_1}$ ; d'après le théorème de projection duale prévisible [1], il existe un unique processus à variation finie prévisible  $A$ , tel que, pour tout ensemble prévisible élémentaire  $C$ , on ait:  $E1_C.X = E \int_C 1_C dA$ ; on a alors  $E \text{var}.A \leq \|X\|_{S_1}$ , et  $M = X - A$  est une martingale faible.

Si  $X$  est un élément de  $S_p$  ( $p > 1$ ), le problème se pose de savoir si la décomposition précédente se fait dans  $S_p$ ; dans le cas général, nous ne savons pas répondre à cette question, mais, comme nous allons le voir ci-dessous, la réponse est positive dans deux cas particuliers importants: les semimartingales régulières et les 1-semimartingales.

## II. Semimartingales régulières

Définition: Un élément  $X$  de  $S_p$  est dit régulier si les processus  $s \rightarrow X_{s,1}$  et  $t \rightarrow X_{1,t}$  sont des semimartingales (à un indice) par rapport aux filtrations  $\mathbb{F}_s^1$  et  $\mathbb{F}_t^2$ , respectivement.

Remarquons tout d'abord que ce sont des semimartingales spéciales; en effet, considérons une subdivision dyadique de  $[0,1]$ :  $(0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1)$ , et appliquons le lemme 2 aux processus  $H_1(\omega, s, t) = 1_{]s_i, s_{i+1}]}(s)$ ,  $i=0, \dots, n-1$ ;

nous obtenons:  $\| [\Sigma_1(X_{s_{i+1},1} - X_{s_i,1})^2]^{\frac{1}{2}} \|_p \leq C_p \|X\|_{S_p}$ , et donc  $[X_{1,\cdot}]^{\frac{1}{2}}$  est dans  $L^p$ .

De même, pour tout  $t < 1$ , le processus  $s \rightarrow X_{s,t}$  est une semimartingale spéciale: en effet, considérons l'ensemble  $\mathfrak{B}_t$  des processus prévisibles élémentaires à un indice, dans la filtration  $\mathbb{F}_{\cdot,t}$ , et désignons par  $H.X_{\cdot,t}$  l'intégrale stochastique élémentaire à un indice: si  $H_n$  est une suite d'éléments de  $\mathfrak{B}_t$  qui converge uniformément vers 0,  $H_n.X_{\cdot,1}$  converge vers 0 en probabilité, tandis que  $H_n.(X_{\cdot,1} - X_{\cdot,t})$  converge vers 0 dans  $L^p$ , comme on peut le voir en appliquant la définition de  $S_p$  aux processus  $\bar{H}_n(\omega, s, u) = H_n(\omega, s)1_{]t,1]}(u)$ ;  $H_n.X_{\cdot,t}$  converge donc vers 0 en probabilité, ce qui suffit à montrer que c'est une semimartingale, en vertu du théorème de Dellacherie-Meyer-Mokobodski; cette semimartingale est spéciale pour les mêmes raisons que précédemment.

Soit alors  $M$  la partie martingale faible de  $X$ ;  $M_{\cdot,t}$  est aussi une semimartingale spéciale dans la filtration  $\mathbb{F}_{\cdot,t}$ , dont la décomposition canonique peut s'écrire:  $M_{\cdot,t} = M_{\cdot,t}^1 + X_{\cdot,t}^1$ .

Soit  $t_1 < t_2$ ; puisque  $M$  est une martingale faible,

$$E(M_{\cdot,t_2} - M_{\cdot,t_1} / \mathbb{F}_{\cdot,t_1}) \text{ est une martingale de la filtration } \mathbb{F}_{\cdot,t_1}; \text{ elle s'écrit}$$

$$E(M_{\cdot,t_2}^1 - M_{\cdot,t_1}^1 / \mathbb{F}_{\cdot,t_1}) + E(X_{\cdot,t_2}^1 - X_{\cdot,t_1}^1 / \mathbb{F}_{\cdot,t_1})$$

Le premier terme est une martingale, grâce à la propriété (F.4), donc le second aussi; or, c'est un processus à variation finie, continu à droite en probabilité: considérons sa version à trajectoires continues à droite; c'est un processus prévisible dans la filtration  $\mathbb{F}_{\cdot,t_1}$ : en effet, il s'écrit  $E(X_{\cdot,t_2}^1 / \mathbb{F}_{\cdot,t_1}) - X_{\cdot,t_1}^1$  et c'est une autre conséquence de (F.4) que d'avoir le premier terme prévisible dans la filtration  $\mathbb{F}_{\cdot,t_1}$ ; ce processus est donc nul, et l'on voit que le processus  $t \rightarrow X_{s,t}$  est une martingale dans la filtration  $\mathbb{F}_{s,t}$ , où encore dans la filtration  $\mathbb{F}_t^2$ , ce qui revient au même.

On peut faire le même travail sur le processus  $(s,t) \rightarrow M_{s,t}^1$ , en échangeant les rôles de  $s$  et de  $t$ , et l'on obtient une décomposition de  $X$  de la

forme:  $X = M + X^1 + X^2 + A$ , où, cette fois ci,  $M$  est une martingale à deux indices,  $A$  un processus prévisible à variation finie,  $X^1$  est

à variation finie prévisible par rapport à la première coordonnée, et une martingale par rapport à la seconde, et  $X^2$  a les propriétés symétriques de celles de  $X^1$  en échangeant les rôles des deux coordonnées; on a alors le résultat suivant:

**Théorème 7:** Dans la décomposition précédente, chacun des termes est dans  $S_p$  et y a une norme majorée par  $C_p \|X\|_{S_p}$

Preuve: tout d'abord, chacun des termes est nul sur les axes, adapté, et continu à droite en probabilité. Considérons alors un élément  $H$  de  $\mathfrak{B}$ , et posons

$H_s(\omega, u, t) = H(\omega, u, t)1_{u \leq s}$ ; le processus  $Y_s = H_s \cdot X$  est une semimartingale spéciale dans la filtration  $\mathbb{F}_s^1$ , dont la partie martingale  $N$  est  $H_s \cdot (M + X^2)$  et la partie à variation finie prévisible  $H_s \cdot (X^1 + A)$ .

Soit  $(s_i)_{i=1}^n$  une subdivision dyadique de  $[0, 1]$ : appliquons le lemme 2 aux processus  $(H_{s_{i+1}} - H_{s_i})_{i=1}^{n-1}$ ; nous obtenons:

$$\|[\sum_{i=1}^{n-1} (Y_{s_{i+1}} - Y_{s_i})^2]^{\frac{1}{2}}\|_p \leq C_p \|X\|_{S_p}$$

Nous en déduisons que  $\| [Y]_1^{\frac{1}{2}} \|_p \leq C_p \|X\|_{S_p}$ , d'où, en n'oubliant pas que la constante  $C_p$  peut varier de place en place:

$$\| [N]_1^{\frac{1}{2}} \|_p \leq C_p \|X\|_{S_p}, \text{ et donc: } \|H \cdot (M + X^2)\|_p \leq C_p \|X\|_{S_p}.$$

Par définition de  $S_p$ , cela signifie exactement que  $\|M + X^2\|_{S_p} \leq C_p \|X\|_{S_p}$ . Par différence, on obtient le même résultat pour  $X^1 + A$ ; échangeant les rôles des deux coordonnées, et appliquant ce résultat à la semimartingale  $M + X^2$ , on obtient finalement:  $\|M\|_{S_p} \leq C_p \|X\|_{S_p}$ , d'où, par différence  $\|X^2\|_{S_p} \leq C_p \|X\|_{S_p}$ ; Par symétrie, on obtient de même  $\|X^1\|_{S_p} \leq C_p \|X\|_{S_p}$ , et, finalement, le même résultat pour  $A$ .

**Remarque:** comme dans le cas  $p=1$ , il est aisé de caractériser les processus prévisibles à variation finie qui sont éléments de  $S_p$ : ce sont ceux dont la variation  $\int_{[0,1]^2} |dA|$  est dans  $L^p$ ; de même, nous pouvons caractériser les martingales de  $S_p$  au moyen d'une propriété qui ne dépend que de leurs trajectoires: étant donné deux subdivisions dyadiques de  $[0, 1]$ ,  $\underline{s} = (s_i)_{i=1}^n$  et  $\underline{t} = (t_j)_{j=1}^m$ , considérons le



quadrillage  $\underline{c} = \underline{s} \times \underline{t}$  : pour tout point  $z = (s_i, t_j)$  de  $\underline{c}$ , notons  $\bar{z}$  son successeur  $(s_{i+1}, t_{j+1})$ , s'il existe, et  $\underline{c}^\circ$  l'ensemble des points de  $\underline{c}$  ayant un successeur; enfin, notons  $S_{\underline{c}}(X) = [\sum_{\underline{c}^\circ} (1)_{z, \bar{z}} \cdot X]^2$  :

**Theorème 8:** Soit  $p \geq 1$ ; il existe des constantes universelles  $c_p$  et  $C_p$ , telles que pour toute martingale  $M$ , on ait:

$$(1) \quad c_p \sup_{\underline{c}} \|S_{\underline{c}}(M)\|_p \leq \|M\|_{S_p} \leq C_p \sup_{\underline{c}} \|S_{\underline{c}}(M)\|_p$$

Preuve: la première inégalité est une conséquence immédiate du lemme 2, et est valable pour toute semimartingale  $X$  de  $S_p$ . Pour montrer la seconde, considérons un élément  $H$  de  $\mathfrak{B}$ , constant en dehors du quadrillage  $\underline{c}$ ; on a alors:

$$S_{\underline{c}}(H:M) \leq S_{\underline{c}}(H), \text{ et il suffit donc de montrer que, pour toute martingale } M, \quad \|M_{1,1}\|_p \leq C_p \sup_{\underline{c}} \|S_{\underline{c}}(M)\|_p.$$

Dans le cas où  $p > 1$ , c'est un résultat bien connu, et on a en plus équivalence entre  $\|M_{1,1}\|_p$  et  $\sup_{\underline{c}} \|S_{\underline{c}}(M)\|_p$  [6, par exemple].

Dans le cas  $p=1$ , la méthode utilisée dans [6] conduit au résultat:

$$E|M_{1,1}| \leq C \sup_{\underline{s}} E[\sum_{\underline{s}} (M_{s_{i+1},1} - M_{s_i,1})^2]^{1/2}, \text{ où } \underline{s} \text{ parcourt l'ensemble des subdivi-}$$

sions dyadiques de  $[0,1]$ . Une telle subdivision étant fixée, considérons deux espaces probabilisés auxiliaires,  $(W, \underline{W}, \mu)$  et  $(W', \underline{W}', \mu')$ , avec deux suites de Rademacher  $r_i(w)$  et  $r'_i(w')$ ; en notant  $\hat{E}$  et  $\hat{E}'$  les espérances sur ces espaces, on a d'après le lemme de Khintchine:

$$E[\sum_{\underline{s}} (M_{s_{i+1},1} - M_{s_i,1})^2]^{1/2} \leq C \hat{E} E |\sum_{\underline{s}} r_i(w) (M_{s_{i+1},1} - M_{s_i,1})|$$

Fixons alors  $w$ , et considérons la martingale, dans la filtration  $\mathbb{F}_t^2$ ,  $Y_t^w = \sum_{\underline{s}} r_i(w) (M_{s_{i+1},t} - M_{s_i,t})$ ; on a, de nouveau:

$$E|Y_1^w| \leq C \liminf_n E[\sum_{\underline{s}_n} (Y_{t_{i+1}}^w - Y_{t_i}^w)^2]^{1/2}, \text{ où } \underline{s}_n = (\frac{i}{2^n})_{i=1}^{2^n-1}$$

On peut alors utiliser le lemme de Fatou, puis une nouvelle fois le lemme de Khintchine, pour obtenir:

$$\hat{E} E |Y_1^w| \leq C \sup_{\underline{s} \times \underline{t}} \hat{E}' \hat{E} E |\sum_{\underline{s} \times \underline{t}} r_i(w) r'_i(w') Z_{i,j}|$$

où  $Z_{i,j} = 1](s_i, t_j), (s_{i+1}, t_{j+1})] \cdot M$

Il reste à appliquer une nouvelle fois le lemme de Khintchine, en remarquant que  $r_i(w)r_j'(w')$  forment un nouveau système de Rademacher.

### III 1-semimartingales

Considérons un élément  $X$  de  $S_p^1$ ; c'est en particulier un élément de  $S_p$ , et il admet une décomposition  $X = M + A$ , où  $M$  est une martingale faible et  $A$  un processus prévisible à variation finie. Mais, si nous appliquons le corollaire 6 au cas où la filtration  $\mathbb{F}_s^2$  est constamment égale à  $\mathbb{F}_s^1$ , nous obtenons une décomposition  $X = M^1 + A^1$ , où  $M_{s,t}^1$  est une martingale en  $s$ , pour la filtration  $\mathbb{F}_s^1$ , et  $A^1$  un processus à variation finie 1-prévisible.

Théorème 9: Les processus  $M, A, M^1, A^1$  sont dans  $S_p^1$ , avec une norme majorée par

$$C_p \|X\|_{S_p^1}$$

Preuve: remarquons tout d'abord que les processus  $M^1$  et  $A^1$  sont adaptés; en effet, pour tout  $t$ ,  $X_{\cdot,t} = M_{\cdot,t}^1 + A_{\cdot,t}^1$  est la décomposition canonique de la semimartingale spéciale  $X_{\cdot,t}$ , dans la filtration  $\mathbb{F}_{\cdot,t}^1$ , donc, grâce à la propriété (F.4), c'est sa décomposition spéciale dans la filtration  $\mathbb{F}_{\cdot,t}$ ;  $M_{s,t}^1$  et  $A_{s,t}^1$  sont donc  $\mathbb{F}_{s,t}$  adaptés.

La démonstration du théorème 7 s'applique sans changements pour montrer que  $\|M^1\|_{S_p^1} \leq C_p \|X\|_{S_p^1}$  et  $\|A^1\|_{S_p^1} \leq C_p \|X\|_{S_p^1}$ .

Pour obtenir le résultat, il suffit donc de remarquer que:

$$\|A\|_{S_p^1} = \|A\|_{S_p^1} = \left\| \int |dA| \right\|_p \leq C_p \left\| \int |dA^1| \right\|_p = C_p \|A^1\|_{S_p^1},$$

la seule chose à démontrer étant l'inégalité du milieu.

Or, pour tout élément  $H$  de  $\mathcal{E}$ ,  $E(H.A) = E(H.A^1) = E(H.X)$ , donc, le processus  $A$  est la projection duale prévisible du processus  $A^1$ ;  $A^1$  étant lui-même 1-prévisible,  $A$  est en fait sa 2-projection duale prévisible [1]. Il suffit donc de remarquer que, si  $A$  est un processus à variation finie intégrable, et  $\bar{A}$  sa 2-projection duale prévisible, on a:

$$(2) \quad \left\| \int_{[0,1]^2} |d\bar{A}| \right\|_p \leq C_p \left\| \int_{[0,1]^2} |dA| \right\|_p.$$

On se ramène aussitôt au cas où  $A$  est croissant, nul sur les axes.  $\bar{A}_{1,\cdot}$  est alors la projection duale prévisible de  $A_{1,\cdot}$  dans la filtration  $\mathbb{F}_{\cdot}^2$ , et donc:

$$\|\bar{A}_{1,1}\|_p \leq C_p \|A_{1,1}\|_p, \text{ d'après les inégalités}$$

B.D.G. [S, VI, 100], ce qui est le résultat cherché.

Remarque: l'inégalité (2) est également valable lorsque  $\bar{A}$  est la 1-projection duale prévisible de  $A$ , et donc aussi si c'est sa projection duale prévisible; il en va de même pour les projections duales optionnelles.

Nous allons étudier maintenant quelques exemples de 1-semimartingales, qui sont des 1-martingales (i.e.  $X_{\cdot,t}$  est une martingale par rapport à la filtration  $\mathbb{F}_{\cdot}^1$ ). Nous pouvons alors supposer que  $\mathbb{F}_t^2 = \mathbb{F}_t^1$ , et nous notons alors  $\mathbb{F}_s^1 = \mathbb{F}_s$ .

1) Etudions d'abord le cas où  $A_{s,t} = E(A_t / \mathbb{F}_s)$ ,  $A_t$  étant un processus à variation finie.

Nous avons donné dans [2] un exemple de processus croissant  $A_t$ ,  $A_0=0$ ,  $A_1=1$ , et tel que  $A_{s,t}$  ne soit pas un élément de  $S_1$  (ni même de l'espace  $S_0$ , analogue de  $S_1$  pour la convergence en probabilité).

Notons, pour tout processus  $(Y_s)_{0 \leq s \leq 1}$   $Y^* = \sup_s |Y_s|$ , et pour toute subdivision  $\underline{t} = (t_i)_{i=0}^n$ :

$$\text{var}_{\underline{t}}^*(A) = \sum_{i=0}^{n-1} (A_{\cdot, t_{i+1}} - A_{\cdot, t_i})^* \quad \text{et} \quad \text{var}^*(A) = \sup_{\underline{t}} \text{var}_{\underline{t}}^*(A) \quad ;$$

Théorème 10: Pour tout  $p \geq 1$ ,  $\|A\|_{S_p} \leq C_p \|\text{var}^*(A)\|_p$

Nous nous appuyerons sur le lemme suivant:

Lemme 11: Il existe deux constantes universelles  $c_p$  et  $C_p$  telles que, pour toute famille  $(Y^i)_{i=1}^n$  de martingales, on ait:

$$(3) \quad c_p \|\Sigma_i (Y^i)^*\|_p \leq \|\Sigma_i [Y^i \cdot J_1^{\frac{1}{2}}]\|_p \leq C_p \|\Sigma_i (Y^i)^*\|_p$$

Preuve: montrons la première partie de l'inégalité; en notant  $Y_S^{i*} = \sup_{u \leq S} |Y_S^i|$ ; on a, pour tout temps d'arrêt  $T$ :  $E(Y_1^{i*} - Y_T^{i*} / \mathbb{F}_T) \leq 4E([Y_1^i]_1^{\frac{1}{2}} / \mathbb{F}_T)$  [5, VII 91]

En sommant, on obtient, en posant  $Z_S = \sum_i Y_S^{i*}$ ,  $X = \sum_i [Y_1^i]_1^{\frac{1}{2}}$ :

$E(Z_1 - Z_T / \mathbb{F}_T) \leq 4E(X / \mathbb{F}_T)$ , et, grâce au lemme de Garcia-Neveu [5, VI 99],  $\|Z_1\|_p \leq 4p \|X\|_p$ , ce qui est l'inégalité cherchée.

L'autre sens se traite de la même façon.

Preuve du théorème 10: soit  $\underline{t} = (t_i)_{i=1}^n$  une subdivision de  $[0,1]$ , et  $(H_i)_{i=1}^{n-1}$  des processus prévisibles bornés par 1, à un indice; posons  $Y_S^i = A_{S, t_{i+1}} - A_{S, t_i}$ , pour  $i=0, \dots, n-1$ , et  $\int H_S^i dY_S^i = H^i \cdot Y^i$ ; on a:  $[H^i \cdot Y^i]_1 \leq [Y^i]_1$ , et donc:

$$\|\sum_i H_i \cdot Y^i\|_p \leq \|\sum_i (H_i \cdot Y^i)^*\|_p \leq \frac{1}{c_p} \|\sum_i [Y^i]_1^{\frac{1}{2}}\|_p \leq \frac{C}{c_p} \|\sum_i (Y^i)^*\|_p$$

et la dernière quantité, par définition, est majorée par  $\frac{C}{c_p} \|\text{var}^*(A)\|_p$ .

Remarque: l'inégalité inverse n'a certainement pas lieu, comme le montre l'existence d'éléments de  $S_p$  de la forme  $E(X_t / \mathbb{F}_S)$ , où  $X_t$  n'est pas à variation finie: nous en verront des exemples plus bas.

Un exemple intéressant de la situation du théorème précédent est le cas des semimartingales étudié par Wong et Zakai:  $A_{s,t} = E(A_t / \mathbb{F}_s)$ , où  $A_t$  s'écrit  $A_t = \int_0^t Y_t d\mu(t)$ , où  $\mu$  est une mesure déterministe sur  $[0,1]$ , positive de masse 1, pour fixer les idées; dans ce cas:

$$(4) \quad \|\text{var}^*(A)\|_p \leq \frac{C}{p} \left\| \int_0^1 [Y_{\cdot, t}]_1^{\frac{1}{2}} d\mu(t) \right\|_p, \text{ où } Y_{s,t} \text{ désigne la}$$

martingale  $E(Y_t / \mathbb{F}_s)$

Pour le voir, nous aurons besoin d'un lemme:

Lemme 12: Soit  $Y_t$ ,  $t \in [0,1]$ , un processus mesurable intégrable, et  $Y_{s,t}$  la martingale  $E(Y_t / \mathbb{F}_s)$ ; supposons que  $E \int_0^1 [Y_{\cdot, t}]_1^{\frac{1}{2}} d\mu(t) < \infty$ ; on a alors:

$$(5) \quad \left[ \int_0^1 Y_{\cdot, t} d\mu(t) \right]_1^{\frac{1}{2}} \leq \int_0^1 [Y_{\cdot, t}]_1^{\frac{1}{2}} d\mu(t) \text{ p.s.}$$

Preuve: supposons d'abord  $Y$  borné; dans le cas il est étagé i.e. il s'écrit  $\sum_{i=1}^n Y^{i-1} 1_{]t_i, t_{i+1}[}(t)$ , ce n'est rien d'autre que l'inégalité de Kunita-Watanabé. Si  $Y$  est un processus mesurable quelconque, il existe une suite  $Y^n$  de processus étagés, tels que  $E \int [Y_{.,t} - Y^n_{.,t}]^2 d\mu(t) \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ): cela peut se voir en utilisant le théorème des classes monotones, en remarquant que, si  $Y^n$  converge vers  $Y$ , uniformément où en croissant, alors, pour tout  $t$ ,  $Y^n_{.,t}$  converge vers  $Y_{.,t}$  dans  $\mathbb{H}_1$ , et donc  $E \int_0^1 [Y_{.,t} - Y^n_{.,t}]^2 d\mu(t)$  converge vers 0, en utilisant le théorème de convergence dominée.

Soit alors,  $Y$  borné étant donné, une suite  $Y^n$  de processus étagés tels que  $\int [Y_{.,t} - Y^n_{.,t}]^2 d\mu(t)$  converge vers 0 p.s. et dans  $L^1$ .

$\int_0^1 Y^n_{.,t} d\mu(t)$  est une suite de Cauchy dans  $\mathbb{H}_1$ , et converge dans  $L^1$  vers  $\int_0^1 Y_{.,t} d\mu(t)$ ; quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que

$[\int_0^1 Y^n_{.,t} d\mu(t)]^{\frac{1}{2}}$  converge p.s. vers  $[\int_0^1 Y_{.,t} d\mu(t)]^{\frac{1}{2}}$ , ce qui nous donne le résultat.

On passe du cas borné au cas général par troncation.

On peut maintenant prouver (4): il suffit de montrer que, pour toute subdivision dyadique  $\underline{t}$  de  $[0,1]$ , on a:  $\|\text{var}_{\underline{t}}^*(A)\|_p \leq C_p \|\int_0^1 [Y_{.,t}]^2 d\mu(t)\|_p$

Si  $\underline{t} = (t_i)_{i=1}^n$ , posons  $Z^i = A_{.,t_{i+1}} - A_{.,t_i}$ ; d'après (3), on a:

$$\|\text{var}_{\underline{t}}(A)\|_p \leq C_p \|\sum_i [Z^i]_1^2\|_p \quad . \text{ Or,}$$

$[Z^i]_1^2 = [\int_{t_i}^{t_{i+1}} Y_{.,t} d\mu(t)]^2$  et, d'après (5), cette dernière quantité est inférieure où égale à  $\int_{t_i}^{t_{i+1}} [Y_{.,t}]^2 d\mu(t)$ , d'où le résultat.

2) Supposons que toutes les martingales  $X_{.,t}$  ( $t$  dyadique) appartiennent à l'espace stable engendré par une même martingale  $Y$  de  $\mathbb{H}_1$ .

Dans ce cas,  $X_{s,t}$  s'écrit  $\int_0^s H_{u,t} dY_s$  ; si  $X$  est dans  $S_p$ ,

$d[Y]_s dP$  -presque partout,  $t \rightarrow H_{s,t}$  est à variation finie sur les dyadiques, et on a, en désignant par  $\text{var}(H_{s,\cdot})$  cette variation:

$$(6) \quad c_p \|X\|_{S_p} \leq \left\| \int_0^1 \text{var}(H_{s,\cdot})^2 d[Y]_s \right\|_p^{\frac{1}{2}} \leq c_p \|X\|_{S_p}$$

Preuve: remarquons que, pour tout élément  $K$  de  $\mathfrak{E}$ ,

$$K.X = \int_0^1 \left\{ \int_0^1 K(\omega, s, t) H_{s,dt} \right\} dY_s, \text{ l'intégrale entre}$$

parenthèses étant une intégrale élémentaire par rapport à  $H_{s,\cdot}$  ; les deux membres

de cette égalité sont parfaitement définis lorsque  $H(\omega, s, t) = \Sigma_1 H_s^i(\omega) 1_{]t_i, t_{i+1}[}(t)$

$\underline{t} = (t_i)_{i=1}^n$  étant une subdivision dyadique de  $[0, 1]$ ,  $(H^i)_{i=0}^{n-1}$  étant des processus prévisibles quelconques bornés par 1, et il est clair qu'alors, les deux membres

restent égaux; écrivons la pour  $H_s^i = k_s \text{signe}(H_{s,t_{i+1}} - H_{s,t_i})$ , où  $k_s$  est un

processus prévisibles quelconque; si nous notons  $\text{var}_{\underline{t}}(H_{s,\cdot}) = \Sigma_{\underline{t}} |H_{s,t_{i+1}} - H_{s,t_i}|$ ,

nous obtenons:  $\left\| \int_0^1 k_s \text{var}_{\underline{t}}(H_{s,\cdot}) dY_s \right\|_p \leq \|X\|_{S_p}$  ; ceci étant valable

pour tout  $k$  prévisibles borné, nous avons [6, VII 104] :

$$\left\| \int_0^1 \text{var}_{\underline{t}}(H_{s,\cdot}) dY_s \right\|_p^{\frac{1}{2}} \leq c_p \|X\|_{S_p} \quad ; \text{ on en déduit la}$$

seconde partie de (6), et la première se démontre de la même manière.

Remarque 1: dans le cas  $p=2$ , la démonstration précédente montre que l'on peut

prendre  $c_p = C_p = 1$ .

Remarque 2: en général, dans les semimartingales du type précédent,  $X_{1,\cdot}$  n'est pas à variation finie, comme le montre l'exemple suivant:

$(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{F}_s, P)$  est un espace vérifiant les conditions habituelles, sur lequel existe un mouvement Brownien  $B_s$  ;  $X_{s,t} = \int_0^s 1_{0 \leq B_u \leq t} dB_u$  est, pour tout  $p$ , un élément de  $S_p$  d'après l'étude précédente, mais

$$X_{1,t} = B_1^+ A t + \frac{1}{2} (L_1^t - L_1^0)$$

où  $L_s^t$  est le temps local en  $t$  du mouvement Brownien, et donc n'est pas à variation finie.

3) Enfin, dans le cas  $p=2$ , il y a une classe de semimartingales particulièrement importante: ce sont les martingales à accroissements fortement orthogonaux: pour tout  $t_1 \leq t_2$ ,  $\langle X_{\cdot, t_2} - X_{\cdot, t_1}, X_{\cdot, t_1} \rangle = 0$ . Alors,

$$\|X\|_{\mathcal{F}_2}^2 = EX_{1,1}^2 = E\langle X_{\cdot, 1} \rangle_1 .$$

En effet, dans ce cas,  $(s, t) \rightarrow \langle X_{\cdot, t} \rangle_s$  est un processus croissant (à deux indices), et, si l'on note  $\langle X \rangle_{s, t}$  sa version continue à droite (qui est prévisible), on a, pour tout processus prévisible  $H$ , élémentaire ou non,

borné:

$$E(H \cdot X)^2 = E \int_{[0,1]^2} H^2 d\langle X \rangle$$

C'est la situation du processus de Wiener à deux indices  $W_{s, t}$  lorsque  $\mathcal{F}_s$  est la tribu engendrée par  $(W_{u, v})_{u \leq s, v \leq 1}$ , où, plus généralement, pour toutes les martingales fortes au sens de [4].

Références:

- [1] Bakry, D.: Théorèmes de section et de projection pour les processus à deux indices; ZW 55, 1981, 55-71.
- [2] Bakry, D.: Une remarque sur les semimartingales à deux indices; Sém. Prob. XV, 1981, L.N. 850, 671-672.
- [3] Bichteler, K.: Stochastic integration and  $L^p$ -theory of semimartingales; à paraître dans Ann. Prob..
- [4] Cairoli, R.; Walsh, J.B.: Stochastic integrals in the plane; Acta Math. 134, 1975, 111-183.
- [5] Dellacherie, C.; Meyer, P.A.: Probabilités et potentiel, vol. 2; Paris, Hermann, 1980.
- [6] Meyer, P.A.; Théorie élémentaire des processus à deux indices; Processus aléatoires à deux indices, Colloque E.N.S.T.-C.N.E.T. 1980, L.N. 863, 1-39.
- [7] Wong, E.; Zakai, M.: Weak martingales and stochastic integrals in the plane, ZW 29, 1974, 109-122.