

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

C. DELLACHERIE

Appendice à : « Intégral de capacités fortement sous-additives »

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 16 (1982), p. 29-40

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__29_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

APPENDICE A L'EXPOSE PRECEDENT
par C. Dellacherie

1. SOUS-MESURES PLUS OU MOINS MINCES

On se donne ici un espace mesurable "abstrait" $(E, \underline{E})$ et on appelle sous-mesure sur $(E, \underline{E})$ une application C de $\underline{E}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ nulle en $\emptyset$, croissante, montante et sous-additive. On trouvera dans [18] et [19] une méthode très intéressante pour construire des sous-mesures.

La variation M de la sous-mesure C est la plus petite mesure majorant C ; une extension immédiate de la proposition 1 de l'exposé montre que, si $(\underline{P}_i)$ est une famille "filtrante" de $\underline{E}$ -partitions finies de E engendrant la tribu $\underline{E}$, alors on a, pour tout $B \in \underline{E}$,

$$M(B) = \sup_i \sum_{A \in \underline{P}_i} C(A \cap B),$$

la famille $(\underline{P}_i)$ pouvant être choisie dénombrable si $\underline{E}$ est séparable.

La sous-mesure C est dite à variation bornée si M est une mesure bornée, séquentiellement continue si $B_n \rightarrow B$ implique $C(B_n) \rightarrow C(B)$, et mince (ou sans épaisseur) si, $\mathbb{D}$ désignant l'ensemble des familles d'éléments disjoints de $\underline{E}$, on a

$$\forall (B_i) \in \mathbb{D} \quad \{i : C(B_i) > 0\} \text{ est dénombrable.}$$

Nous voyons maintenant que, même sans "normalité" (cf la proposition 2 de l'exposé), il est possible de caractériser de manière similaire ces trois propriétés

PROPOSITION 1.- a) La sous-mesure C est à variation bornée ssi on a

$$\forall (B_i) \in \mathbb{D} \quad \sum_i C(B_i) \text{ est fini}$$

b) La sous-mesure C est séquentiellement continue ssi on a

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall (B_i) \in \mathbb{D} \quad \{i : C(B_i) > \varepsilon\} \text{ est fini}$$

DEMONSTRATION. La nécessité des conditions est triviale. Supposons la condition de a) vérifiée et soit $(A_i) \in \mathbb{D}$ maximale telle que l'on ait $0 < M(A_i) < \infty$ pour tout i : comme $\sum_i C(A_i)$ est fini, (A_i) est dénombrable (éventuellement vide) et on voit que $\sum_i M(A_i)$ est fini en approchant $M(A_i)$ à 2^{-i} près par une somme de valeurs de C prises sur une partition finie de A_i . Donc, quitte à se restreindre au complémentaire de $\bigcup_i A_i$, on peut supposer que M ne prend que les valeurs 0 et ∞ . Mais, dans ces

conditions, $C(B) > 0$ implique $M(B) = \infty$ et donc l'existence de B^1, B^2 dis-joints dans B tels que $C(B^1) > 0$ et $C(B^2) > 0$. On en déduit, si M prend la valeur ∞ , l'existence d'une suite décroissante (B_n) telle qu'on ait $C(B_n - B_{n+1}) > 0$ et donc $M(B_n - B_{n+1}) = \infty$ pour tout n . D'où, en approchant $M(B_n - B_{n+1})$ par une somme de valeurs de C prise sur une partition finie de $B_n - B_{n+1}$, on déduit l'existence de $(D_n) \in \mathcal{D}$ telle que $\sum_n C(D_n) = \infty$, ce qui contredit notre hypothèse. Supposons la condition de b) vérifiée; elle est équivalente, grâce à la sous-additivité, à la condition

(+) $\forall \varepsilon > 0 \forall B \in \mathcal{E} \forall (B_i) \in \mathcal{D} \{i: C(B \cup B_i) - C(B) > \varepsilon\}$ est fini

et, sans utiliser à nouveau la sous-additivité, nous allons montrer que (+) jointe à la montée de C implique la descente de C et donc finalement le résultat voulu. Fixons $B \in \mathcal{E}$, posons $D(H) = C(B \cup H) - C(B)$ pour tout $H \in \mathcal{E}$ et soit $B_n \downarrow B$: nous devons montrer que $D(H_n) \downarrow 0$ où $H_n = B_n - B$. Or, si on avait $\inf_n D(H_n) > \varepsilon > 0$, alors, comme D est montante, on pourrait trouver une sous-suite (n_k) telle qu'on ait $D(H_{n_k} - H_{n_{k+1}}) > \varepsilon$ pour tout k ce qui contredirait (+).

REMARQUES.- 1) Il est tentant de conjecturer que, comme pour a), il est possible de trouver pour b) une borne uniforme en $(B_i) \in \mathcal{D}$ (pour ε fixé). A notre connaissance, le problème est ouvert, et une réponse négative entraînerait une solution négative à un problème de Maharam cité plus loin.

2) La propriété de minceur implique aussi une propriété apparemment plus forte, utilisée d'ailleurs dans la démonstration de la proposition 2 de l'exposé: si C est mince, alors, pour toute famille $(B_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathcal{E}$, il existe une partie dénombrable J de I tel que l'ensemble $B_i - (\bigcup_{j \in J} B_j)$ soit C -négligeable pour tout $i \in I$. Il est remarqué dans [12] que la démonstration de cela n'utilise pas les propriétés de définition d'une sous-mesure.

3) Afin d'illustrer la richesse de la langue française, disons que $B \in \mathcal{E}$ est ténu (resp menu, mince) relativement à une sous-mesure C si la restriction de C à $(B, \mathcal{E}|_B)$ est à variation bornée (resp séquentiellement continue, mince). Nous avons vu au cours de l'exposé que, même dans une situation très régulière, une sous-mesure C non triviale peut être séquentiellement continue (resp mince) alors que tout ensemble ténu (resp menu) est C -négligeable.

2. CONTROLE D'UNE SOUS-MESURE PAR UNE AUTRE

Rappelons que, étant données deux sous-mesures C_1 et C_2 sur l'espace mesurable $(E, \mathcal{E})$, on dit que C_1 contrôle C_2 si $C_1(B) = 0$ implique $C_2(B) = 0$ et que le contrôle est continu si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $C_1(B) < \delta$ implique $C_2(B) < \varepsilon$.

En général, C_1 peut contrôler C_2 sans la contrôler continûment, même si C_2 est mince. Cependant, si C_2 est séquentiellement continue (en particulier, si C_2 est une mesure bornée), C_1 contrôle continûment C_2 dès qu'elle la contrôle (en effet, sinon, il existerait une suite (B_n) avec $C_1(B_n) < 2^{-n}$ et $C_2(B_n) > \varepsilon > 0$; posant $B = \limsup B_n$, on aurait alors $C_1(B) = 0$ et $C_2(B) \geq \varepsilon$).

Voici le lemme-clé pour l'étude du contrôle continu, que l'on comparera au lemme 4 de l'exposé

LEMME 1.- Soient C_1 et C_2 deux sous-mesures ; on suppose C_2 finie. Pour tout entier k , il existe $A \in \underline{E}$ tel que $C_2(A) \geq k C_1(A)$ et qu'on ait

$$[C_2(A \cup H) - C_2(A)] \leq k [C_1(A \cup H) - C_1(A)]$$

pour tout $H \in \underline{E}$.

DEMONSTRATION. Nous allons montrer que, pour k fixé, il existe $A \in \underline{E}$ vérifiant $C_2(A) \geq k C_1(A)$ (ce qui implique $C_1(A) < \infty$) et maximal au sens suivant : pour $H \in \underline{E}$, la relation $C_2(A \cup H) \geq k C_1(A \cup H)$ implique l'égalité $C_2(A \cup H) = C_2(A)$. Alors, pour $H \in \underline{E}$, on aura ou bien $C_2(A \cup H) = C_2(A)$, et donc trivialement l'inégalité de l'énoncé, ou bien $C_2(A \cup H) < k C_1(A \cup H)$, d'où l'on déduit l'inégalité de l'énoncé en retranchant $C_2(A)$ au premier membre et $k C_1(A)$ au second. Pour trouver A , nous désignons par I l'ensemble des ordinaux dénombrables et nous construisons par récurrence transfinie une suite transfinie croissante $(A_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\underline{E}$ comme suit : on pose $A_0 = \emptyset$; si A_i est construit, nous regardons s'il existe $B \in \underline{E}$ contenant A_i et vérifiant

$$C_2(B) > C_2(A_i) \quad , \quad C_2(B) \geq k C_1(B)$$

s'il en existe, nous prenons pour A_{i+1} un de ces B et, s'il n'en existe pas, nous posons $A_{i+1} = A_i$; enfin, si j est un ordinal limite et A_i construit pour $i < j$, nous posons $A_j = \bigcup_{i < j} A_i$, la montée de C_1 assurant qu'on a encore $C_2(A_j) \geq k C_1(A_j)$ si on a $C_2(A_i) \geq k C_1(A_i)$ pour tout $i < j$. Maintenant, les $C_2(A_i)$, i parcourant I , forment une suite transfinie croissante de réels, qui est donc stationnaire à partir d'un certain ordinal dénombrable i_0 : il ne reste plus qu'à prendre $A = A_{i_0}$.

REMARQUES.- 1) La sous-additivité ne joue aucun rôle là-dedans (sauf si on veut majorer $C_1(A \cup H) - C_1(A)$ par $C_1(H)$ dans l'inégalité) et seule la montée de C_1 a été utilisée. Par ailleurs, ce lemme plus général aurait pu être utilisé dans l'exposé à la place du lemme 4 : le fait que, dans ce dernier, V soit ouvert n'intervient nulle part sérieusement (dans la démonstration du lemme 5 de l'exposé, on peut passer de V_n borélien à K_n compact par capacitabilité, f étant normale).

2) Comme on a $C_1(A) \leq C_2(E)/k$, on voit que $C_1(A)$ est petit pour k grand, et donc aussi $C_2(A)$ si C_2 est continûment contrôlée par C_1 .

Comme application de ce lemme, nous donnons une nouvelle démonstration d'un résultat ancien de Mokobodzki (publié tardivement dans [24])

PROPOSITION 2.- Toute mesure bornée m contrôlée par une sous-mesure C est équivalente à une mesure bornée m' majorée par C .

DEMONSTRATION. Le contrôle étant nécessairement continu, pour $\varepsilon > 0$ on peut trouver d'après le lemme un entier k et un élément A de $\underline{E}$ tels que $m(A) < \varepsilon$, $C(A) < \varepsilon$ et qu'on ait, pour tout $H \in \underline{E}$ disjoint de A ,

$$m(H) = m(A \cup H) - m(A) \leq k [C(A \cup H) - C(A)] \leq k C(H)$$

si bien que, sur A^c , la mesure m est majorée par kC . Comme on peut recommencer avec les restrictions de m et C à A , on voit que, finalement, il existe une suite d'entiers (k_n) et une suite (B_n) d'éléments disjoints de $\underline{E}$ épuisant E pour m de sorte que la restriction m_n de m à B_n soit majorée par celle de $k_n C$. Il ne reste plus alors qu'à prendre pour m' la mesure $\sum_n 2^{-n} m_n / k_n$.

REMARQUES.- 1) Cet énoncé se trouve aussi démontré, pour C séquentiellement continue, dans [17]. On prendra garde que le mot "dominé" a des sens très différents dans [24] et dans [17].

2) On voit aisément que toute mesure bornée m est somme d'une mesure contrôlée par C et d'une mesure portée par un élément B de $\underline{E}$ tel que $C(B) = 0$ (prendre pour B un représentant de l'ess sup pour m des $H \in \underline{E}$ tels que $m(H) > 0$ et $C(H) = 0$). Ainsi, si la sous-mesure C se trouve être contrôlée par une mesure bornée m (ce qui implique que C est mince), on voit que, finalement, C est contrôlée par une mesure qu'elle majore.

3. SOUS-MESURES PLUS OU MOINS NORMALES

Nous dirons qu'une sous-mesure C sur l'espace mesurable $(E, \underline{E})$ est accessible si, pour tout $B \in \underline{E}$ tel que $C(B) > 0$, il existe une mesure bornée m contrôlée par C telle que $m(B) > 0$. D'après la proposition 2, cela revient à dire que C est contrôlée par la sous-mesure C' définie par

$$C'(B) = \sup \{ m'(B), m' \text{ mesure bornée } \leq C \}.$$

La sous-mesure C , qui majore évidemment C' , est dite normale si elle est égale à C' . Toute sous-mesure à variation bornée est évidemment accessible (mais pas nécessairement normale, même pour E fini : voir par exemple [23]).

La proposition 2 de l'exposé s'étend au cas d'une sous-mesure accessible, avec la même démonstration. Nous récrivons l'énoncé

PROPOSITION 3.- Une sous-mesure accessible C est mince (resp séquentiellement continue) ssi il existe une mesure bornée m qui la contrôle (resp contrôle continûment).

Disons qu'une sous-mesure C non triviale est totalement inaccessible si, pour toute mesure bornée m , il existe $B \in \underline{E}$ portant m et C -négligeable, soit encore d'après la proposition 2, si la seule mesure bornée majorée par C est la mesure triviale. Voici deux exemples de telles sous-mesures : le premier appartient au "folklore" ; le second semble peu connu alors qu'il est bien plus intéressant (nous le retrouverons aux §4 et §5)

EXEMPLES.- 1) On prend pour E un espace métrisable compact parfait (et pour $\underline{E}$ sa tribu borélienne) et on pose, pour $B \in \underline{E}$, $C(B) = 0$ ou 1 suivant que B est maigre ou non. Il est bien connu que la sous-mesure C ainsi définie est mince et totalement inaccessible (et qu'en outre on a "bien souvent" $C(B) = 1$ tandis que $C(K) = 0$ pour tout compact K inclus dans B).

2) Davies et Rogers ont construit dans [20] un espace métrique compact (E, d) et une fonction croissante continue h de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ tels que la h -mesure de Hausdorff Λ^h ne prenne que les valeurs 0 et ∞ et soit totalement inaccessible. Rappelons brièvement la construction de Λ^h à partir de la distance d et la fonction h . Pour $B \in \underline{E}$ non vide, soit $\mathcal{R}_\varepsilon(B)$ l'ensemble des recouvrements dénombrables $\underline{R}$ de B par des ensembles A de diamètre $d(A) \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ fixé, et posons

$$\Lambda_\varepsilon^h(B) = \inf_{\underline{R} \in \mathcal{R}_\varepsilon(B)} \sum_{A \in \underline{R}} h[d(A)]$$

On définit ainsi, pour chaque $\varepsilon > 0$, une sous-mesure Λ_ε^h (la sous-additivité est triviale, mais la montée est loin de l'être !) et, quand ε décroît vers 0, Λ_ε^h croît vers Λ^h , qui est une mesure. Par ailleurs, on voit aisément que les sous-mesures Λ_ε^h et la mesure Λ^h ont les mêmes ensembles négligeables. Maintenant, si $d(E) = a$, on voit aussi aisément que Λ_a^h descend sur les compacts, et est donc une capacité - nous dirons donc que c'est une sous-mesure capacitaire. Revenons alors à l'exemple de Davies et Rogers : Λ_a^h y est une sous-mesure capacitaire totalement inaccessible ; cependant, elle n'est pas mince.

Ainsi, il peut exister sur un espace métrisable compact une sous-mesure capacitaire totalement inaccessible. Et une telle sous-mesure C est pathologique au sens de [23], [17], [25] : la seule mesure simplement additive, bornée, u majorée par C est la mesure triviale (en effet, comme C est une capacité, la mesure u^* du lemme 3 de l'exposé, qui a même masse que u , est encore majorée par C : on a $u^* \leq u$ sur les ouverts, donc $u^* \leq C$ sur les ouverts, d'où sur les compacts et finalement sur les boréliens par capacitaibilité).

Par contre, on ne sait toujours pas (à notre connaissance) s'il existe une sous-mesure séquentiellement continue (sur une espace abstrait, ou sur un espace métrisable compact - cela revient au même) qui

ne soit pas accessible : c'est le problème des "sous-mesures de Maharam" abordé dans [23], [17], [25]. En fait, je ne connais même pas d'exemple, sur un espace métrisable compact, de sous-mesure capacitaire et mince qui ne soit pas accessible. Enfin, un problème du même genre est, à ma connaissance, toujours ouvert en théorie des mesures de Hausdorff, à savoir si, sur un espace métrique compact, une h-mesure mince est nécessairement σ -finie (ou, tout au moins, accessible).

4. NORMALITE ET FORTE SOUS-ADDITIVITE

Les lemmes 1 et 2 de l'exposé sont encore valables si on travaille sur un espace mesurable $(E, \underline{E})$, et une démonstration analogue au début de celle de la proposition 4 de l'exposé permet d'établir le résultat (plus ou moins) bien connu suivant

PROPOSITION 4.- Une fonction croissante C de $\underline{E}$ dans $\mathbb{R}_+$, nulle en $\emptyset$, est fortement sous-additive ssi, pour tout $A, B \in \underline{E}$ tels que $A \subseteq B$, il existe une mesure simplement additive u majorée par C telle qu'on ait $u(A) = C(A)$ et $u(B) = C(B)$. De plus, si C est fortement sous-additive, alors, pour toute famille $(B_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\underline{E}$ totalement ordonnée par inclusion, il existe une mesure simplement additive u majorée par C telle qu'on ait $u(B_i) = C(B_i)$ pour tout $i \in I$.

qui implique, de manière évidente,

COROLLAIRE.- Une sous-mesure finie, fortement sous-additive et séquentiellement continue, est nécessairement normale.

Supposant maintenant E métrisable compact, nous apportons quelques précisions sur "l'écart" existant entre normalité et forte sous-additivité. D'abord, étant donné le point a) de la proposition 4 de l'exposé, on voit aisément que "la plupart" des capacités normales ne sont pas fortement sous-additives : dans le cas où $C(B) = \sup (m_1(B), m_2(B))$ où m_1 et m_2 sont deux mesures distinctes de masse 1, C n'est fortement sous-additive que si m_1 et m_2 sont des mesures de Dirac. Ensuite, comme toute sous-mesure à valeurs dans $\{0, 1\}$ est fortement sous-additive, il n'est pas étonnant qu'il existe des sous-mesures fortement sous-additives qui ne sont pas normales (telle est la sous-mesure associée à la catégorie de Baire au §3). Cela dit, il est quand même surprenant qu'il existe une telle sous-mesure vérifiant le théorème de capacitabilité : c'est le cas pour la sous-mesure C obtenue à partir de la sous-mesure capacitaire $\bigwedge_a^h$ de Davies et Rogers en posant $C(B) = 0$ ou 1 suivant que $\bigwedge_a^h(B) = 0$ ou est > 0 (noter que C est limite d'une suite croissante de capacités).

5. SOUS-MESURES NORMALES ET FORMES SOUS-LINEAIRES

Nous nous contenterons de considérer le cas où E est un espace métrisable compact. Notant $\underline{B}^+$ l'ensemble des fonctions boréliennes ≥ 0 , nous dirons qu'une application p de $\underline{B}^+$ dans $\mathbb{R}_+$ est une sous-intégrale si elle est nulle en 0, croissante, montante et sous-linéaire, et que c'est une sous-intégrale normale si on a $p(f) = \sup m(f)$, $m \in \underline{M}$, $m \leq p$ pour tout $f \in \underline{B}^+$ où, évidemment, " $m \leq p$ " signifie " $\forall g \in \underline{B}^+ m(g) \leq p(g)$ ". Enfin nous dirons que la sous-intégrale p est capacitaire si elle est finie et descendante sur l'ensemble $\underline{C}_\delta^+$ des fonctions s.c.s. ≥ 0 finies. Un argument de capacitaibilité montre qu'une sous-intégrale normale ou capacitaire est uniquement déterminée par sa restriction à $\underline{C}_\delta^+$, et même, dans le cas capacitaire, par sa restriction à l'ensemble $\underline{C}^+$ des fonctions continues ≥ 0 grâce à la descente. La proposition suivante est alors une conséquence simple du théorème de Hahn-Banach

PROPOSITION 5.- Toute sous-intégrale capacitaire p est normale, et l'application qui à p associe $\{m \in \underline{M} : m \leq p\}$ est une bijection de l'ensemble des sous-intégrales capacitaires sur celui des parties convexes compactes héréditaires de $\underline{M}$.

REMARQUES.- 1) La bijection s'étend aux topologies : la topologie de la convergence simple sur $\underline{C}^+$ pour les sous-intégrales capacitaires (que nous avons introduite au §5 de l'exposé) correspond à la topologie de Hausdorff sur les convexes compacts héréditaires de mesures.

2) Donc, contrairement à ce qui se passait pour les sous-mesures, ici "capacitaire" implique "normale". On retrouve cependant le décalage en considérant des sous-intégrales un peu moins régulières que les capacitaires : la semi-norme "du type L_ω " associée à la h -mesure de Davies et Rogers fournit une sous-intégrale sous-modulaire, égale à la limite d'une suite croissante de "capacités fonctionnelles", et pourtant totalement inaccessible.

Toute sous-mesure normale c s'étend en une sous-intégrale normale $\bar{c}$ par $\bar{c}(f) = \sup m(f)$, $m \in \underline{M}$, $m \leq c$ et inversement toute sous-intégrale (normale ou non) p induit une sous-mesure $\hat{p}$ par $\hat{p}(B) = p(1_B)$. Dans un sens on a clairement $\hat{\bar{c}} = c$ et dans l'autre $\bar{\hat{p}} \geq p$ sans qu'il y ait forcément égalité : même pour p capacitaire, on peut avoir $m \leq \hat{p}$ sans avoir $m \leq p$ car il y a trop peu d'indicatrices de compacts dans $\underline{C}_\delta^+$. Ainsi une capacité normale c peut avoir un prolongement en une sous-intégrale capacitaire autre que $\bar{c}$: cela n'a rien d'exceptionnel comme nous allons le voir à propos des capacités fortement sous-additives.

Un autre procédé, classique depuis [4], pour étendre une capacité

positive c (sans hypothèse de sous-additivité) en une "capacité fonctionnelle" $\tilde{c}$ est de poser $\tilde{c}(f) = \int_0^\infty c(\{f \geq t\}) dt (= \int_0^\infty c(\{f\}t) dt)$ pour toute $f \in B^+$. Rappelons que cela ne fournit une fonctionnelle sous-additive, et donc une sous-intégrale, que si c est fortement sous-additive. Et on a alors $\tilde{c}(f) = \bar{c}(f)$: comme $m(f) = \int_0^\infty m(\{f \geq t\}) dt$ pour toute $m \in \underline{M}$, on a $\bar{c}(f) \leq \tilde{c}(f)$ dès que c est une sous-mesure normale et, si c est une capacité fortement sous-additive, la proposition 4 de l'exposé implique que pour toute $f \in C_0^+$ il existe $m \leq c$ telle que $m(\{f \geq t\}) = c(\{f \geq t\})$ pour tout t , d'où l'égalité $\bar{c}(f) = \tilde{c}(f)$ pour $f \in C_0^+$ puis pour $f \in B^+$ par capacitabilité. Cela n'implique nullement que, pour c capacité fortement sous-additive, $\tilde{c}$ en soit le seul prolongement en une sous-intégrale : les sous-intégrales capacitaires p rencontrées couramment en théorie du potentiel, qui sont du type " $p(f) = \sup m(f)$, m balayée de ε_x ", induisent une capacité $\hat{p}$ alternée d'ordre infini dont, la plupart du temps, le prolongement $\tilde{\hat{p}}$ est distinct de p (et moins intéressant que p !).

6. EXTENSIONS D'UNE SOUS-MESURE A L'ENSEMBLE DES PARTIES

Lorsqu'on dispose d'une sous-mesure c sur un espace mesurable $(E, \underline{E})$, on peut l'étendre en une sous-mesure c^+ sur $(E, \underline{P}(E))$ par le procédé habituel d'extériorisation : on pose $c^+(A) = \inf c(B)$, $B \supseteq A$, $B \in \underline{E}$ pour tout $A \in \underline{P}(E)$. Si de plus c est normale, il existe un autre prolongement naturel de c en une sous-mesure c^+ sur $(E, \underline{P}(E))$: il est obtenu en posant $c^+(A) = \sup m^+(A)$, $m \in \underline{M}$, $m \leq c$ pour tout $A \in \underline{P}(E)$. On a évidemment $c^+ \leq c^+$ mais pour tout $A \notin \underline{E}$ il existe une sous-mesure normale c telle que $c^+(A) = 0$ et $c^+(A) \neq 0$ (il suffit de prendre pour $\{m \in \underline{M} : m \leq c\}$ l'ensemble des mesures de Dirac ε_x où x parcourt A^c). Bien entendu, on a $c^+ = c^+$ lorsque c est une sous-mesure normale mince.

Même si c est une capacité normale sur E métrisable compact, on ne peut espérer avoir, en général, l'égalité $c^+(A) = c^+(A)$ pour toute partie universellement mesurable A (et même pour toute partie coanalytique : voir [2] pour un contre-exemple sous l'axiome $V = L$ de Goedel). Cependant le théorème de capacitabilité assure que, dans ce cas, on a l'égalité $c^+(A) = c^+(A) = \sup c(K)$, $K \subseteq A$, $K \in \underline{K}$ pour toute partie analytique A , et, d'après [3], ce résultat est encore vrai si on suppose seulement que c est une sous-mesure analytique, i.e. une sous-mesure finie telle qu'il existe une partie analytique γ de $\underline{M}$ de sorte que $c(B) = \sup_{m \in \gamma} m(B)$ pour tout $B \in \underline{E}$ (une telle sous-mesure est évidemment normale).

On a vu au cours du §5 de l'exposé (cf théorème 6-b)) que l'épaisseur e d'une capacité normale c est une sous-mesure analytique : on a donc $e^+(A) = e^+(A)$ pour tout analytique A . Mais l'épaisseur admet d'autres prolongements naturels que e^+ et e^+ : en revenant à la définition

de e au §1 de l'exposé et en y prenant $B \in \underline{P}(E)$ quelconque (mais en y gardant les B_i boréliens), ou encore en étendant convenablement la formule de la proposition 5 de l'exposé (y remplacer c par c^+ ou c^* et l'intégrale par l'intégrale supérieure). Toutes ces extensions, distinctes en général sur $\underline{P}(E)$, coïncident sur les analytiques: elles sont toutes majorées par e^* , coïncident avec e sur les compacts, et on a $e^*(A) = \sup e(K)$, $K \subseteq A$, $K \in \underline{K}$ pour A analytique.

7. SOUS-MESURES ET SOUS-INTEGRALES ANALYTIQUES

Nous travaillons ici sur un espace métrisable compact E et, comme nous avons déjà défini ci-dessus la notion de sous-mesure analytique, nous développerons ici plutôt le côté "sous-intégrale", laissant au lecteur le soin d'ajuster vocabulaire et notations au cas des sous-mesures.

Etant donnée une sous-intégrale normale p telle que $p(1) < \infty$, nous dirons qu'une partie π de $\underline{M}$ est une assise de p (et notons $p = p_\pi$) si on a $p(f) = \sup_{m \in \pi} m(f)$ pour tout $f \in \underline{B}^+$. La sous-intégrale p admet en général de nombreuses assises et, parmi elles, une assise maximale $\Pi(p)$ égale à $\{m \in \underline{M} : m \leq p\}$. Lorsque π est compact, la sous-intégrale p_π est capacitaire et, d'après le théorème de Hahn-Banach, le compact $\Pi(p)$ est l'enveloppe convexe héréditaire fermée de π ou encore, ce qui revient au même pour π compact, l'enveloppe fortement convexe héréditaire de π (rappelons qu'une partie bornée A de $\underline{M}$ est dite fortement convexe si, pour toute probabilité Q sur $\underline{M}$ telle que $Q^*(A) = 1$, le barycentre de Q appartient à A). Signalons au passage que p_π est séquentiellement continue ssi $\Pi(p_\pi)$ est $\underline{B}^+$ -compact - nous notons ainsi le fait d'être compact pour la topologie de la convergence simple sur $\underline{B}^+$, topologie bien plus fine que la topologie vague (et bien moins fine que la topologie de la norme où $\|m_1 - m_2\| = \sup |m_1(f) - m_2(f)|$, $f \in \underline{C}$, $\|f\| \leq 1$ pour $m_1, m_2 \in \underline{M}$).

La sous-intégrale normale p est dite analytique si elle admet une assise analytique π . On voit sans peine que l'assise maximale $\Pi(p)$ est fortement convexe et le théorème de Hahn-Banach entraîne encore qu'elle est l'enveloppe convexe héréditaire $\underline{B}^+$ -fermée de l'assise π : cela ne fait pas intervenir l'analyticité de π et, en retour, cela ne permet pas de démontrer que $\Pi(p)$ est analytique si π l'est - du moins à première vue. On a cependant le résultat suivant, dû à Mokobodzki

THEOREME 1.- Si π est une partie analytique bornée de $\underline{M}$, alors $\Pi(p_\pi)$ est l'enveloppe fortement convexe héréditaire normiquement fermée de π . Cela implique que $\Pi(p_\pi)$ est analytique.

REMARQUES.- 1) On obtient donc une bijection naturelle entre les sous-intégrales analytiques et certaines parties convexes de $\underline{M}$.

2) On a vu plus haut que, même pour π compact, l'assise maximale $\Gamma(c_\pi)$ de la sous-mesure c_π peut être strictement plus grande que l'assise maximale $\Pi(p_\pi)$ de la sous-intégrale p_π . Je ne sais pas si $\Gamma(c_\pi)$ est encore analytique pour π analytique.

3) La proposition 5 et le théorème 1 suggèrent fortement que, pour ce qui nous concerne, la notion de "sous-intégrale" est plus intéressante que celle de "sous-mesure". Nous avons cependant, dans l'exposé, privilégié la notion de "sous-mesure" car il eût semblé sans doute artificiel d'introduire l'épaisseur comme sous-intégrale.

Voici, pour terminer, un résultat sur l'épaisseur d'une sous-mesure analytique. L'ensemble des capacités normales y est muni de la topologie vague introduite au §5 de l'exposé

THEOREME 2.- L'épaisseur e d'une sous-mesure analytique c est elle-même une sous-mesure analytique. De plus, il existe une partie analytique G de l'espace des capacités normales telle qu'on ait

$$c(A) = \sup_{g \in G} g(A) \quad , \quad e(A) = \sup_{g \in G} e_g(A)$$

pour toute partie analytique A de E , où e_g est l'épaisseur de g .

Cela implique que les propositions 3 et 5 de l'exposé sont encore vraies si c y est une sous-mesure analytique (et B y est analytique dans E).

8. INTEGRALE DE SOUS-MESURES FORTEMENT SOUS-ADDITIVES

Les résultats du §3 de l'exposé peuvent être étendus selon deux directions : en considérant un espace mesurable abstrait $(E, \underline{E})$ en ce qui concerne les théorèmes 3 et 4, et en considérant des sous-mesures analytiques C_ω sur E métrisable compact en ce qui concerne le théorème 5.

Voyons d'abord, rapidement, le premier type de généralisation. On a vu aux §1 et §4 de cet appendice qu'on pouvait étudier la structure des sous-mesures à variation bornée et des sous-mesures séquentiellement continues, fortement sous-additives, dans un cadre abstrait. Et le lecteur s'est sans doute aperçu que, pour démontrer les théorèmes 3 et 4 de l'exposé, il suffisait de travailler sur un espace mesurable séparable $(E, \underline{E})$ - la séparabilité étant sans doute indispensable pour le calcul simultané des variations sur une même suite de partitions. Or, il est bien connu que, quitte à passer au quotient selon les atomes, un espace mesurable séparable a même structure qu'un espace métrisable séparable E muni de sa tribu borélienne $\underline{E}$. Un tel espace se plonge dans un espace métrisable compact E° et une sous-mesure C sur $(E, \underline{E})$ induit une sous-mesure C° sur $(E^\circ, \underline{E}^\circ)$ en posant $C^\circ(B) = C(B \cap E)$ pour tout $B \in \underline{E}^\circ$. Et C° se trouve être à variation bornée (resp séquentiellement continue, fortement sous-additive) ssi C l'est. On voit finalement qu'on peut

ramener aisément la situation abstraite envisagée à la situation topologique de l'exposé. Le premier type de généralisation est donc quelque peu illusoire.

Par contre, la généralisation du théorème 5 de l'exposé, en y conservant E métrisable compact (on pourrait y prendre plus généralement E souslinien, mais ce serait en fait une "généralisation illusoire" comme ci-dessus), mais en considérant des sous-mesures analytiques C_ω est intéressante (et non triviale). Pour simplifier, nous supposons ici que notre espace probabilisé $(\Omega, \underline{F}, P)$ est constitué d'un espace métrisable compact Ω muni de la tribu complétée $\underline{F}$ de sa tribu borélienne pour une probabilité P . Nous dirons alors qu'une famille $(\phi_\omega)_{\omega \in \Omega}$ de sous-mesures normales finies sur E est une famille analytique de sous-mesures s'il existe une partie analytique γ de $\underline{M} \times \Omega$ telle que, pour tout $\omega \in \Omega$, la coupe $\gamma(\omega)$ soit une assise de ϕ_ω - ce qui implique que chaque ϕ_ω est une sous-mesure analytique. Nous avons vu deux exemples d'une telle famille au cours de l'exposé : à la remarque suivant le corollaire du théorème 5 (extension de la situation canonique au cas où F est une partie analytique de $E \times \Omega$), et au point b) du théorème 6. Il est vrai, sans être évident, que l'intégrale $\int \phi_\omega d\omega$ d'une famille analytique (ϕ_ω) de sous-mesures est une sous-mesure analytique si elle est finie.

Nous nous donnons maintenant une famille analytique $(C_\omega)_{\omega \in \Omega}$ de sous-mesures sur E . D'abord, une extension du théorème 2 de l'appendice permet de montrer que la famille $(e_\omega)_{\omega \in \Omega}$ des épaisseurs correspondantes est aussi une famille analytique de sous-mesures. Et on a alors le résultat suivant, dû à Feyel, en supposant $(C_\omega)_{\omega \in \Omega}$ intégrable

THEOREME 3.- Si chaque C_ω est fortement sous-additive, alors l'épaisseur e de $C = \int C_\omega d\omega$ est égale à $\int e_\omega d\omega$, intégrale des épaisseurs des C_ω .

9. DERNIERE MINUTE

Louveau saurait résoudre, d'une manière très précise, le problème posé à la remarque 2) suivant le théorème 5 de l'exposé (extension du théorème de Lusin-Novikov sur les boréliens à coupes dénombrables). Comme c'est "tout frais", nous n'en dirons pas plus dans ce volume.

BIBLIOGRAPHIE

Pour [1] à [16], voir la bibliographie de l'exposé précédent.

- [17] CHRISTENSEN (J.P.R.) : Some results with relation to the control measure problem (L.N. n°644, p ?, Springer 1978)
- [18] DAVIES (R.O.) : Measure of Hausdorff type (J London Math Soc 1, p 30-34, 1969)
- [19] : Sion-Sjerve measures are of Hausdorff type (J London Math Soc 5, p 526-528, 1972)
- [20] DAVIES (R.O.), ROGERS (C.A.) : The problem of subsets of finite positive measure (Bull London Math Soc 1, p 47-54, 1969)
- [21] DELLACHERIE (C.) : Sur la construction des noyaux boréliens (Sém Proba X, L.N. n°511, p 545-577, Springer 1976)
- [22] DELLACHERIE (C.), MOKOBODZKI (G.) : Deux propriétés des ensembles minces (Sém Proba XII, L.N. n°649, p 564-566, 1978)
- [23] HERER (W.), CHRISTENSEN (J.P.R.) : On the existence of pathological submeasures and the construction of exotic topological groups (Math Ann 213, p 203-210, 1975)
- [24] MOKOBODZKI (G.) : Domination d'une mesure par une capacité (Sém Proba XII, L.N. n°649, p 489-490, Springer 1978)
- [25] TALAGRAND (M.) : A simple example of pathological submeasure (Math Ann 252, p 97-102, 1980)