

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

THIERRY JEULIN

Sur la convergence absolue de certaines intégrales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 16 (1982), p. 248-256

[<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__248_0>](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__248_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA CONVERGENCE ABSOLUE DE CERTAINES INTEGRALES

T. JEULIN (*)

On cherche à donner des conditions nécessaires (et, si possible, suffisantes) pour que certaines intégrales soient absolument convergentes ; les critères énoncés découlent de propriétés élémentaires des réarrangements. J'espère que cette note démystifiera la démonstration d'un résultat sur le même sujet, établi antérieurement (voir [2], page 44), tout en le complétant.

I - SUR LES REARRANGEMENTS DE VARIABLES ALEATOIRES.

La donnée de base est un espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et notre point de départ est le résultat élémentaire suivant :

Lemme 1 : Soit X une variable aléatoire positive ; on note $F_X(u) = P[X \leq u]$ la fonction de répartition de X ; f_X est le réarrangement croissant de X

$$(f_X(u) = \inf\{v \mid F_X(v) \geq u\} ; 0 \leq u \leq 1) ; \text{ enfin } \Phi_X(x) = \int_0^\infty du(x - F_X(u))_+$$

$$(0 \leq x \leq 1 ; y_+ = \sup(y, 0)).$$

a) Munissons $[0,1]$ de la mesure de Lebesgue λ ; la loi de f_X sous λ est la loi de X .

b) Φ_X est convexe, continue sur $[0,1]$, strictement positive sur $]F_X(0), 1]$; $\Phi_X(0) = 0$, $\Phi_X(1) = E[X]$. En outre $\Phi_X(x) = \int_0^x f_X(u) du$ et pour tout A de $\mathcal{F}$,

$$(*) \quad E[X; A] \geq \Phi_X \circ P[A].$$

c) Soit G une fonction croissante positive sur R_+ ; on a

$$\Phi_{G(X)}(x) = \int_0^x G \circ f_X(u) du ; \text{ en particulier, } \Phi_1(x) = x \text{ et pour } c > 0 \quad \Phi_{cX} = c \Phi_X.$$

(*) UNIVERSITE PARIS VI - Laboratoire de Probabilités - 4 place Jussieu - Tour 56
3ème Etage - 75005 PARIS CEDEX

En outre si Y est une variable aléatoire vérifiant $Y \geq X$, on a $\Phi_Y \geq \Phi_X$; pour toute suite de variables positives (X_n) , $\liminf_{n \rightarrow \infty} \Phi_{X_n} \geq \Phi_U$ si $U = \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n$.

Remarque : Supposons X intégrable et notons g_X le réarrangement décroissant de X : $g_X(u) = \sup\{v \mid \mathbb{P}[X > v] \geq u\}$ ($\sup \emptyset = 0$) ; appliquons l'inégalité (*) à A^c ; comme $g_X(u) = f_X(1-u)$ λ p.s., on retrouve l'inégalité bien connu :

$$\mathbb{E}[X; A] \leq \int_0^{\mathbb{P}[A]} g_X(u) du.$$

Démonstration :

a) Traduit la formule de changement de variable : pour h borélienne bornée,

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_{[0, \infty[} h(x) dF_X(x) = \int_0^1 h \circ f_X(u) du.$$

b) Etablissons (*), le reste est encore plus facile ! Pour A et B dans $\mathcal{A}$, on a trivialement $\mathbb{P}[A \cap B] \geq (\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - 1)_+ = (\mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[B^c])_+$.

Ainsi, par application du théorème de Fubini,

$$\mathbb{E}[X; A] = \int_0^\infty \mathbb{P}[A; u < X] du \geq \int_0^\infty (\mathbb{P}[A] - F_X(u))_+ du = \Phi_X \circ \mathbb{P}[A].$$

$$c) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \Phi_{X_n}(x) \geq \int_0^\infty \liminf_{n \rightarrow \infty} (x - \mathbb{P}[X_n \leq u])_+ du \geq \Phi_U(x)$$

Conservons les notations du lemme 1 et notons un autre résultat élémentaire :

Lemme 2 : Soit G une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$, avec $G(0) \geq 0$ et $G(x) > 0$ pour $x > 0$; notons γ son inverse continu à gauche et, pour $a > 0$,

$$g(a) = \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{G(t-a)}{G(t)}.$$

Soit Y une variable aléatoire réelle ; notons $T_Y(u) = \sup_{z \in \mathbb{R}} \mathbb{P}[|Y - z| \leq u]$.

$$a) \text{ pour tout réel } z, \quad \Phi_{G(|Y-z|)}(x) \geq \int_0^\infty (x - T_Y \circ \gamma(u))_+ du.$$

b) Supposons la loi de Y diffuse et $\mathbb{P}[g(Y) = 0] = 0$; alors

$$\phi(G, Y, x) = \inf_{z \in \mathbb{R}} \frac{\Phi_{G(|Y-z|)}(x)}{1 + G(|z|)} \text{ est strictement positif sur }]0, 1] \text{ et pour } A \in \mathcal{A}$$

et $z \in \mathbb{R}$,

$$E[G(|Y-z|) ; A] \geq (1 + G(|z|)) \phi(G, Y, \mathbb{P}[A]).$$

Remarques : 1) P. Lévy désigne T_Y comme "fonction de concentration" de Y

2) si G est croissante modérée (i.e. $\delta = \sup_{x>0} \frac{G(2x)}{G(x)}$ est fini),

on a $g(a) \geq \frac{1}{\delta} > 0$ et $G(x+y) \leq \delta(G(x) + G(y))$.

Démonstration :

$$\begin{aligned} \text{a) } \Phi_{G(|Y-z|)}(x) &= \int_0^\infty (x - \mathbb{P}[G(|Y-z|) \leq u])_+ du \\ &= \int_0^\infty (x - \mathbb{P}[|Y-z| \leq \gamma(u)])_+ du \geq \int_0^\infty (x - T_Y \circ \gamma(u))_+ du \end{aligned}$$

b) Remarquons que $G(x) > 0$ pour $x > 0$ implique : $\lim_{u \rightarrow 0^+} \gamma(u) = 0$; puisque la loi de Y est diffuse, T_Y est continue et $T_Y(0) = 0$; par suite, pour tout $x > 0$, $\int_0^\infty (x - T_Y \circ \gamma(u))_+ du$ est strictement positif ; d'après a), on a donc : $\inf_z \Phi_{G(|Y-z|)}(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

En outre, d'après le lemme 1-c), avec $U_z = \frac{G(|z| - |Y|)}{G(|z|)}$ et $U = \liminf_{|z| \rightarrow \infty} U_z$,

on a : $\liminf_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\Phi_{G(|Y-z|)}(x)}{1 + G(|z|)} \geq \liminf_{|z| \rightarrow \infty} \Phi_{U_z}(x) \geq \Phi_U(x)$ or $U = g(|Y|)$ et la

condition $\mathbb{P}[g(|Y|) = 0] = 0$ donne $\mathbb{P}[U = 0] = 0$, soit $\Phi_U(x) > 0$ pour tout x .

II - REARRANGEMENTS DE PROCESSUS.

On suppose donnée sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ vérifiant les conditions habituelles. Soit R un processus mesurable positif fini ; on peut construire une famille $(r_+(u), u \in \mathbb{R}_+)$ de processus optionnels, telle que :

i) pour tout $t \geq 0$ $u \mapsto r_t(u)$ est croissante, continue à droite, majorée par 1 ;

ii) pour tout u , $r_+(u)$ est une version de la projection optionnelle de $1_{\{R \leq u\}}$.

Notons $\rho_t(v) = \inf(u \mid r_t(u) \geq v)$ ($0 \leq v \leq 1$) ; la famille de processus optionnels $(\rho_+(v) ; 0 \leq v \leq 1)$ est le réarrangement optionnel croissant de R : pour tout $t \geq 0$ $v \mapsto \rho_t(v)$ est croissant, continu à gauche, et pour toute fonction borélienne bornée h sur $\mathbb{R}_+$, le processus optionnel $\int_0^1 h \rho_+(v) dv$ est une version de la projection optionnelle ${}^0(h(R))$ de $h(R)$.

Soit $A \in \mathcal{A}$ et a_+ la version càd l'g de la martingale $a_t = \mathbb{P}[A \mid \mathcal{F}_t]$; avec une démonstration analogue à celle du lemme 1, on a :

$$(**) \quad {}^0(1_A R)_t \geq \int_0^\infty du (a_t - r_t(u))_+ = \int_0^{a_t} \rho_t(v) dv = \Phi_R(a_t).$$

(Remarquons que l'on peut naturellement remplacer les projections optionnelles par des projections prévisibles).

Si on se donne en plus de R un processus croissant optionnel C , on a, d'après ce qui précède, pour $A \in \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^\infty R_t dC_t ; A \right] &= \mathbb{E} \left[\int_0^\infty {}^0(1_A R)_t dC_t \right] \geq \mathbb{E} \left[\int_0^\infty \left(\int_0^{a_t} \rho_t(v) dv \right) dC_t \right] \\ &\geq \mathbb{E} \left[\int_0^{a_*} dv \int_0^\infty \rho_t(v) dC_t \right], \end{aligned}$$

si $a_* = \inf_s a_s$; notons que $\{a_* > 0\}$ contient A (et lui est égal si A appartient à $\mathcal{F}_\infty$).

Prenons en particulier : $A_n = \left\{ \int_0^\infty R_t dC_t \leq n \right\}$, $a^{(n)} = {}^0(1_{A_n})$;

$$n \mathbb{P}[A_n] \geq \mathbb{E} \left[\int_0^\infty R_t dC_t ; A_n \right] \geq \int_0^1 dv \mathbb{E} \left[\int_0^\infty \rho_t(v) dC_t ; v \leq a_*^{(n)} \right].$$

Pour $0 < x < 1$, $\left\{ \int_0^\infty \rho_t(x) dC_t < +\infty \right\}$ contient $\{x < a_*^{(n)}\}$; lorsque n tend vers l'infini, on obtient :

Lemme 3 : Soit $A = \left\{ \int_0^\infty R_t dC_t < +\infty \right\}$, $a_* = \inf_s a_s$; pour tout x de $]0,1[$,

$$\int_0^\infty \rho_t(x) dC_t \text{ est fini sur } \{x < a_*\}.$$

Remarques :

- on a aussi la propriété (plus faible) : $\int_0^\infty \phi_R(x) dC_t$ est fini sur $\{x < a_*\}$.

- la même conclusion subsiste si on remplace C par un processus croissant optionnel formel au sens de L. Schwartz.

III - APPLICATIONS.

1) Le premier exemple est tiré de [2] : le processus R est "indépendant" de la filtration $(\mathcal{F}_t)$ au sens suivant : il existe une mesure μ sur $\mathbb{R}_+$ telle que, pour toute fonction borélienne positive h sur $\mathbb{R}_+$

$${}^0(h(R)) = \int_{\mathbb{R}_+} h(x) \mu(dx).$$

On peut prendre $\rho(v) = \inf(u \mid \mu([0,u] \geq v)$ et on a :

$$\int_0^\infty \rho_t(x) dC_t = \rho(x) \int_0^\infty dC_t \quad (0 \cdot \infty = 0).$$

Par suite :

a) si $\mu(\{0\}) = 0$, $\{\int_0^\infty dC_t < +\infty\}$ contient $\{\int_0^\infty R_t dC_t < +\infty\}$; si de plus $\int x d\mu(x)$ est fini, les deux ensembles sont égaux, d'après le "théorème de Borel - Cantelli" de P. Lévy.

b) si $\mu(\{0\}) < 1$ et $\mathbb{P}[\int_0^\infty R_t dC_t < +\infty] = 1$, $\int_0^\infty dC_t$ est p.s. fini.

c) soit $y > 0$ et $T = \inf(t, a_t \leq y)$; d'après le théorème d'arrêt,

$$\mathbb{P}[\tilde{A}] = \mathbb{E}[\tilde{a}_T] = y \mathbb{P}[a_* \leq y] + \mathbb{P}[A ; a_* > y] \leq y + (1-y) \mathbb{P}[a_* > y].$$

On a donc en général :

$$\mathbb{P}[\int_0^\infty R_t dC_t < +\infty] \leq \mu(\{0\}) + \mu(]0, \infty[) \mathbb{P}[\int_0^\infty dC_t < +\infty].$$

2) Prenons maintenant $R_t = G(|\bar{R}_t - V_t|)$, où

- V est un processus optionnel ;

- G est croissante positive sur $\mathbb{R}_+$, strictement positive sur $]0, \infty[$ et telle que

$$g(a) = \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{G(t-a)}{G(t)} \text{ soit strictement positive } (a \geq 0) ;$$

- $\bar{R}$ est un processus mesurable "indépendant" de la filtration $\mathcal{F}_t$:

$^0(h(\bar{R})) = \int h(y) \mu(dy)$ pour toute fonction h borélienne bornée sur $\mathbb{R}$, avec μ probabilité diffuse sur $\mathbb{R}$.

En appliquant le lemme 2, on a : $\Phi_R(x) \geq \phi(x) (1 + G(|V|))$, où ϕ est une fonction (déterministe) strictement positive sur $]0, 1]$.

$\{\int_0^\infty G(|\bar{R}_s - V_s|) dC_s < +\infty\}$ est donc contenu dans $\{\int_0^\infty (1 + G(|V_s|)) dC_s < +\infty\}$; si on suppose de plus G modérée et $\int G(|y|) \mu(dy) < +\infty$, les deux ensembles sont égaux.

3) Comme cas particulier des exemples précédents, prenons la filtration $\mathcal{F}_t$ constante : $\mathcal{F}_0$ est la tribu engendrée par les ensembles de mesure nulle de $\mathcal{A}$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_0$ pour tout t .

Soit X un processus sur $\mathbf{R}_+^*$, tel que X_t ait une loi indépendante de t et ν une mesure σ -finie sur $\mathbf{R}_+^*$; alors :

- si $\nu(\mathbf{R}_+^*)$ est infini, $\mathbb{P}\left[\int_{\mathbf{R}_+^*} |X_t| \nu(dt) < +\infty\right]$ est majoré par $\mathbb{P}[X_1 = 0]$;
- si $\mathbb{P}[X_1 = 0] < 1$ et $\mathbb{P}\left[\int_{\mathbf{R}_+^*} |X_t| \nu(dt) < +\infty\right] > 0$, on a nécessairement $\nu(\mathbf{R}_+^*) < +\infty$;
- supposons la loi de X_1 diffuse ; pour toute fonction mesurable b et toute croissante modérée G telle que $\mathbb{E}[G(|X_1|)]$ soit fini,

$\mathbb{P}\left[\int_{\mathbf{R}_+^*} G(|X_t - b(t)|) \nu(dt) < +\infty\right]$ vaut 1 ou 0 selon que $\int_{\mathbf{R}_+^*} (1 + G_0|b|) d\nu$ est fini ou non.

On peut ainsi énoncer la

Proposition 4 : Soit X un processus mesurable tel que X_t ait une loi indépendante de t et diffuse, b et c deux fonctions boréliennes sur $\mathbf{R}_+$ et ν une mesure positive σ -finie sur $\mathbf{R}_+^*$. Notons $Y_t = b(t) X_t + c(t)$.

a) Pour tout réel $\alpha > 0$ tel que $\mathbb{E}[|X_1|^\alpha]$ soit fini, $\mathbb{P}\left[\int |Y_t|^\alpha \nu(dt) < +\infty\right]$ vaut 1 ou 0 selon que $\int (|b| + |c|)^\alpha d\nu$ est fini ou non.

b) La même conclusion subsiste pour $-1 < \alpha < 0$ lorsque la loi de $|X_1|$ a une densité g à variation finie sur $\mathbf{R}_+^*$ vérifiant $\int_{\mathbf{R}_+^*} (1 + y^\alpha) y |dg(y)| < +\infty$.

c) Si $\int (|b| + |c|)^\alpha d\nu$ est infini, on a toujours $\mathbb{P}\left[\int |Y_t|^\alpha \nu(dt) < +\infty\right] = 0$.

Démonstration : Le cas $\alpha \geq 0$ résulte immédiatement de ce qui précède ; regardons

b) et c) et supposons : $\mathbb{P}\left[\int |Y_t|^\alpha \nu(dt) < +\infty\right] = x_0 > 0$; on a alors :

$$x_0 \leq \mathbb{P}\left[\int (|b(t)| |X_t| + |c(t)|)^\alpha \nu(dt) < +\infty\right].$$

Prenons $R_t = (|b(t)| |X_t| + |c(t)|)^\alpha$; soit $H(y) = \mathbb{P}[|y| \leq |X_1|]$, K son inverse sur $]0,1[$; un calcul immédiat donne, pour $0 < v < 1$,

$$\rho_t(v) = (|b(t)| K(v) + |c(t)|)^\alpha$$

et le lemme 3 nous dit que, pour $0 < v < x_0$, $\int (|b(t)| K(v) + |c(t)|)^\alpha v(dt)$ est fini ; puisque $K(v)$ est fini, $\mathbb{P}\left[\int_0^\infty |Y_t|^\alpha v(dt) < +\infty\right] > 0$ impose donc

$$\int (|b| + |c|)^\alpha dv < +\infty.$$

Pour achever la démonstration (de b)) il suffit de montrer qu'il existe deux constantes $0 < a < A < +\infty$, telles que, pour y et z réels, on ait :

$$a(|y| + |z|)^\alpha \leq \mathbb{E}[|y X_1 + z|^\alpha] \leq A(|y| + |z|)^\alpha.$$

Tout revient à étudier les deux fonctions (définies sur $\mathbb{R}_+^*$) :

$$f(z) = \mathbb{E}[(|X_1| + z)^\alpha] = \int_0^\infty (x + z)^\alpha g(x) dx$$

et :

$$\bar{f}(z) = \mathbb{E}[|X_1| - z |^\alpha] = \int_0^\infty |x-z|^\alpha g(x) dx \quad (= \int_0^\infty dg(t) \int_0^t |x-z|^\alpha dx).$$

Comme $\alpha > -1$, on montre aisément que f et $\bar{f}$ sont continues, tendent vers

$\mathbb{E}[|X_1|^\alpha]$ (qui est fini) en 0, et sont équivalentes à z^α quand z tend vers $+\infty$.

Corollaire (cf. [3], Théorème 3) : Soit Z un processus gaussien et v une mesure positive σ -finie sur $\mathbb{R}$; pour $\alpha > -1$, $\mathbb{P}\left[\int_{\mathbb{R}} |Z_t|^\alpha v(dt) < +\infty\right]$ vaut 1 ou 0 selon que $\int_{\mathbb{R}} \{\mathbb{E}[Z_t^2]\}^{\alpha/2} v(dt)$ est fini ou non.

Notons que les méthodes utilisées sont beaucoup trop grossières pour que l'on puisse améliorer le point c) de la proposition 4 ; les conditions données s'appliquent en effet aussi bien à $Y_t = b(t)X_t + c(t)$ qu'à $b(t)X_1 + c(t)$!

4) Un dernier exemple illustre ce fait : $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien issu de 0 et $S_t = \sup_{s \leq t} X_s$; pour tout t , S_t et $|B_t|$ ont la même loi, celle de $\sqrt{t} |B_1|$. Or, pour tout $0 < a < b < +\infty$, et tout $c \geq 1$, $\mathbb{P}\left[\int_a^b \frac{dt}{S_t^c} < +\infty\right]$ vaut 1, tandis que $\mathbb{P}\left[\int_a^b \frac{dt}{|B_t|^c} < +\infty\right]$ est exactement la probabilité que B ne s'annule pas sur $[a, b]$ (et vaut donc $1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{b}{a} - 1}$).

BIBLIOGRAPHIE :

- [1] BLACKWELL D., DUBINS L.E. : A converse to the dominated convergence theorem. (Ill. J. of Math., t. 7, 1963, 508-514).
- [2] JEULIN T. : Semi-martingales et grossissement d'une filtration. (L.N. in Math. 833, 1980, 44-45).
- [3] VARBERG D.E. : Equivalent gaussian measures with a particularly simple Radon - Nikodym derivative. (Ann. Math. Stat. 38, 1967, 1027-1030).