MARC YOR

Application de la relation de domination à certains renforcements des inégalités de martingales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 16 (1982), p. 221-233
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__221_0>

APPLICATION DE LA RELATION DE DOMINATION A CERTAINS RENFORCEMENTS DES INEGALITES DE MARTINGALES

M. YOR

1. E. Lenglart [9] a introduit la notion suivante, relative à deux processus définis sur un espace de probabilité filtré usuel $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,P)$.

Définition (1.1) : Un processus X, adapté, positif, à trajectoires continues à droite, est dominé par un processus croissant prévisible A, continu à droite, nul en 0, si, pour tout temps d'arrêt fini T, $E(X_T) \leq E(A_T)$.

Nota Bene : On prendra garde à ne parler de relation de domination entre X et A que lorsque les deux processus vérifient toutes les conditions demandées dans la définition ; en particulier, parce que la positivité de X et le caractère prévisible de A jouent un rôle essentiel dans la suite.

L'intérêt de la relation de domination réside dans le

Théorème (1.2) ([9], *Théorème 1, a))* : Si X est dominé par A, on a, pour tous $x,y > 0$: $P(X_\infty^* \geq x\ ;\ A_\infty \leq y) \leq \frac{1}{x} E[A_\infty \wedge y]$. (On note $X_t^* = \sup_{s\leq t} X_s$).

Afin d'appliquer le théorème (1.2), on introduit les notations suivantes :

- $z = (x,y)$ est le point générique de $\mathbf{R}_+^2$.
- si $\mu(dz)$ est une mesure de Radon positive sur $\mathbf{R}_+^2$, muni de sa tribu borélienne, on note $F_\mu(z) = \mu([0,x]\times[0,y])$ $(z \in \mathbf{R}_+^2)$.
- si $\phi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ est croissante, continue à droite, on note

$$\Phi(x) = \phi(x) + x \int_{]x,\infty[} \frac{d\phi(u)}{u}, \quad \text{si } x > 0 \quad (1)$$

$$= \lim_{y\downarrow 0} \Phi(y), \text{ si } x = 0$$ (cette limite existe, et vaut $+\infty$ si Φ est identiquement infinie, et $\phi(0+)$ sinon).

---

(1) Dans la suite, on notera toujours $\int_x^\infty$ pour $\int_{]x,\infty[}$.

Remarquons que si $\phi(x) = x^p$ $(0 < p < 1)$, on a : $\Phi(x) = \frac{1}{1-p} x^p$.

On peut maintenant énoncer le

Théorème (1.3) : Soit X processus dominé par A. Alors :

1) si $\mu(dz)$ est une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}_+^2$, on a

$$(1.a) \qquad E\left[F_\mu(X_\infty^* \,;\, {}^1/A_\infty)\right]$$

$$\leq E\left[2F_\mu(A_\infty \,;\, {}^1/A_\infty) + A_\infty \int_{\{x > A_\infty \,;\, y \leq {}^1/A_\infty\}} \mu(dz) x^{-1} + \int_{\{y > {}^1/A_\infty\}} \mu(dz) \, [xy \vee 1]^{-1}\right]$$

2) si $\phi, \psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ sont croissantes, et continues à droite, on a :

$$(1.b) \qquad E\left[\phi(X_\infty^*) \; \psi({}^1/A_\infty)\right]$$

$$\leq E\left[(\phi + \Phi)\; (A_\infty)\; \psi({}^1/A_\infty) + \int_{{}^1/A_\infty}^{\infty} d\psi(y)\; \Phi({}^1/y)\right]$$

En particulier, si $\phi(x) = x^p$, $\psi(y) = y^q$ $(0 \leq q < p < 1)$, on a

$$(1.b)_{p,q} \qquad E\left[(X_\infty^*)^p \,/\, A_\infty^q\right] \leq \left\{\frac{p}{p-q} + \frac{1}{1-p}\right\} E\left[A_\infty^{p-q}\right]$$

3) si $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est croissante, continue à droite, on a :

$$(1.c) \qquad E\left[\phi(X_\infty^*)\right] \leq E\left[(\phi + \Phi)\; (A_\infty)\right]$$

En particulier, si $\phi(x) = x^p$ $(0 < p < 1)$, on a $(1.b)_{p,o}$.

Remarques (1.4) :

1) Dans toute espérance où figure ${}^1/A_\infty$, on sous-entend que l'on intègre sur l'ensemble $\{A_\infty > 0\}$, conformément à la convention, usuelle en intégration : $\frac{1}{0} \cdot 0 = \infty \cdot 0 = 0$.

2) L'inégalité $(1.b)_{p,o}$ (resp : (1.c)) a été obtenue en [9], resp : [13].

Démonstration du théorème (1.3) :

a) 3) est un cas particulier de 2), où l'on prend $\psi \equiv 1$; 2) est un cas particulier de 1), où l'on prend $\mu(dz) = d\phi(x)\, d\psi(y)$; il reste à démontrer 1).

b) On a : $E\left[F_\mu(X_\infty^* \,;\, {}^1/A_\infty)\right]$

$$\leq E\left[F_\mu(A_\infty \,;\, {}^1/A_\infty) + \int d\mu(z)\, 1_{(A_\infty < x \leq X_\infty^* \,;\, y \leq {}^1/A_\infty)}\right]$$

$$\leq E\left[F_\mu(A_\infty \,;\, {}^1/A_\infty) + \int d\mu(z)\, 1_{(X_\infty^* \geq x > 0)}\, 1_{(A_\infty \leq \frac{1}{y} \wedge x)}\right]$$

$$\leq E\left[F_\mu(A_\infty \,;\, {}^1/A_\infty)\right] + \int_{(x>0)} d\mu(z)\, \frac{1}{x}\, E\left[A_\infty \wedge \frac{1}{y} \wedge x\right],$$

d'après le théorème (1.2). On obtient finalement la formule (1.a) en décomposant $\mathbb{R}_+^2$ en $\{x \leq A_\infty \wedge \frac{1}{y}\} + \{x > A_\infty \wedge \frac{1}{y}\}$

$$= \{x \leq A_\infty \leq \frac{1}{y}\} + \{x \leq \frac{1}{y} \,;\, A_\infty > \frac{1}{y}\} + \{x > A_\infty \,;\, A_\infty \leq \frac{1}{y}\} + \{xy > 1 \;\;;\; A_\infty > \frac{1}{y}\}$$

Considérons maintenant M martingale locale continue, nulle en 0. On note $M_t^* = \sup_{s \leq t} |M_s|$; $\langle M \rangle$ est le processus croissant associé à M, et L_t^* le suprémum (en a) des temps locaux $(L_t^a)_{a \in \mathbb{R}}$ de M. Rappelons que, pour tout $p \in (0,\infty)$, il existe deux constantes universelles $0 < c_p < C_p < \infty$ telles que, si X et Y désignent deux des trois processus M^*, $\langle M \rangle^{1/2}$ et L^*, on a, pour tout temps d'arrêt T:

$$\text{(1.d)} \qquad c_p\, E\left[X_T^p\right] \leq E\left[Y_T^p\right] \leq C_p\, E\left[X_T^p\right]$$

(cf, Burkholder - Davis - Gundy [6] d'une part, et Barlow - Yor [2] d'autre part). Autrement dit, $c_p X^p$ est dominé par Y^p, lequel est dominé par $C_p X^p$.
On peut maintenant énoncer le résultat suivant, obtenu indépendemment par R. Gundy (cf. section 2.1) ci-dessous)

Théorème (1.5) : Soient $0 < q < p < \infty$. Il existe deux constantes universelles $0 < c_{p,q} < C_{p,q} < \infty$ telles que, si X et Y désignent 2 des 3 processus M^*, $\langle M\rangle^{1/2}$ et L^*, on a :

$$(1.e) \qquad c_{p,q}\, E\left[X_\infty^{p-q}\right] \leq E\left[Y_\infty^p \,/\, X_\infty^q\right] \leq C_{p,q}\, E\left[X_\infty^{p-q}\right]$$

Démonstration :

- L'inégalité de gauche découle aisément de (1.d), et de l'inégalité de Hölder.

- Pour obtenir l'inégalité de droite, on remarque que, pour $h > 1$, d'après (1.d), Y^{ph} est dominé par $C_{ph} \cdot X^{ph}$, puis on utilise l'inégalité $(1.b)_{p',q'}$, où

$$p' = \frac{1}{h}\ ,\quad q' = \frac{q}{ph}. \qquad \square$$

Une seconde application intéressante du théorème (1.3) concerne le couple formé par une sous-martingale locale prévisible $(Y_t, t \geq 0)$ nulle en 0 et son suprémum $S_t = \sup_{s \leq t} Y_s$. En effet, il a été remarqué en [13], à la suite de l'article de D. Burkholder [5], que $|Y|$ est dominé par $2S$ (1). On a donc, en conséquence de $(1.b)_{p,q}$ le

Théorème (1.6) : Soit $0 < q < p < 1$. Soit (Y_t) sous-martingale locale prévisible, nulle en 0, et $S_t = \sup_{s \leq t} Y_s$. Alors :

$$E\left[(Y_\infty^*)^{p-q}\right] \leq E\left[(Y_\infty^*)^p / S^q\right] \leq 2^p \left\{ \frac{p}{p-q} + \frac{1}{1-p} \right\} E\left[S^{p-q}\right]$$

Remarque (1.7) : Si $0 < q < 1$, il n'existe pas de constante universelle C_q telle que $E\left[Y_\infty^* \,/\, S_\infty^q\right] \leq C_q\, E\left[S^{1-q}\right]$.

---

(1) Lenglart m'a fait remarquer qu'il suffit en fait pour cela que Y soit un processus prévisible, nul en 0, tel que, pour tout temps d'arrêt (ou seulement, pour tout temps d'arrêt borné) T, $E[Y_T] \geq 0$.

En effet, si l'on prend pour Y le processus $B_{\cdot \wedge T_1}$, où (B_t) désigne le mouvement Brownien réel, et $T_1 = \inf\{t \,/\, B_t = 1\}$, on a : $E\left[Y^*_\infty\right] = \infty$, mais $S_\infty \equiv 1$.

2. Remarques et Compléments.

2.1) La motivation première de ce travail a été la démonstration par Garsia ([7] ; [8], p. 56 ; voir également P.A. Meyer [11], (31.6), p. 351) de l'inégalité de Davis :

$$\textit{(2.a)} \qquad E\left[\langle M\rangle_\infty^{1/2}\right] \leq c\, E\left[M^*_\infty\right],$$

pour M martingale locale continue, nulle en 0, via l'inégalité de Fefferman.
(Davis et Garsia ne supposent pas M continue, et dans le cas général, il faut remplacer $\langle M\rangle$ par le crochet droit).
En fait, une conséquence de la démonstration de Garsia est le résultat plus fort

$$\textit{(2.b)} \qquad E\left[\langle M\rangle_\infty \,/\, M^*_\infty\right] \leq c\, E\left[M^*_\infty\right].$$

Soulignons que, indépendamment de la démonstration de Garsia, cette inégalité est impliquée a fortiori par l'inégalité $E\left[L^*_\infty\right] \leq c\, E\left[M^*_\infty\right]$, déjà rappelée en (1.d), et l'inégalité trajectorielle : $\langle M\rangle_t \leq 2\, M^*_t\, L^*_t$.

Il était alors naturel de se poser la question de savoir si les espérances des rapports $X^p_\infty \,/\, Y^q_\infty$ $(0 < q < p < \infty)$ étaient comparables à celles de X^{p-q}, X et Y ayant la même signification que dans l'énoncé du théorème (1.5).

Une réponse positive à cette question, en ce qui concerne $(M^*)^2 \,/\, \langle M\rangle^{1/2}$ (ie : $X = M^*$, $Y = \langle M\rangle^{1/2}$, $p = 2$, $q = 1$) a été obtenue par M. Barlow en Octobre 1980, à l'aide d'une variante de la technique employée en [2].

Nous avons ensuite appris, en Août 1981, de M. Silverstein, que R. Gundy avait résolu récemment ces questions par l'affirmative ; par ailleurs, une application de ces résultats au "Malliavin Calculus" figure en [3] (cet article, ainsi que le travail de Gundy paraîtront dans les "Proceedings of the Conference on Martingale Theory", Cleveland, 1981).

2.2) On donne maintenant quelques exemples de relation de domination, pour certains rapports de processus, que l'on obtient directement à l'aide du calcul stochastique.

Un des avantages de cette approche est que les constantes qui figurent dans les inégalités sont probablement assez "serrées".

Voici certainement l'exemple le plus simple

Lemme (2.1) : Soit X processus croissant, nul en 0, et Y sa projection duale prévisible. Alors, pour tout processus croissant prévisible A, et tout temps d'arrêt T, on a :

$$(2.c) \qquad E\left[X_T / A_T\right] \leq E\left[\int_0^T \frac{dY_s}{A_s}\right].$$

Démonstration :

$$E\left[X_T/A_T\right] = E\left[(1/A_T)\int_0^T dX_s\right] \leq E\left[\int_0^T \frac{dX_s}{A_s}\right] = E\left[\int_0^T \frac{dY_s}{A_s}\right].$$

On utilise le calcul stochastique de façon plus importante pour démontrer le

Lemme (2.2) : Soit $X = M + (C-D)$ un processus positif, où M est une martingale locale, C et D deux processus croissants prévisibles, et $M_0 = C_0 = D_0 = 0$. Alors, pour tout processus croissant prévisible A (on peut supposer A seulement croissant, continu à droite, et adapté, si M est continue), et tout temps d'arrêt fini T, on a :

$$(2.d) \qquad E\left[X_T / A_T\right] \leq E\left[\int_0^T \frac{dC_s}{A_s}\right].$$

En particulier, pour tout $q \in]0,1[$, on a :

$$(2.d)_q \qquad E\left[X_T / C_T^q\right] \leq \frac{1}{(1-q)} E\left[C_T^{1-q}\right].$$

Démonstration : D'après la formule d'intégration par parties, on a :

$$X_T / A_T = \int_0^t (1/A_s)\, dX_s + \int_0^t X_{s-}\, d(1/A_s).$$

On utilise ensuite la décomposition : $dX_s = dM_s + dC_s - dD_s$, et le fait que l'intégrale $\int_0^t X_{s-}\, d(1/A_s)$ est négative ou nulle.

L'inégalité $(2.d)_q$ découle de (2.d), et de ce que : $C_t^{1-q} \geq (1-q) \int_0^t C_s^{-q}\, dC_s$.

Voici maintenant plusieurs applications du lemme (2.2) à certaines sous-martingales.

Proposition (2.3) : 1) Soit Y sous-martingale locale prévisible, avec $Y_o = 0$

On note $S_t = \sup_{(s\leq t)} Y_s$. Alors, on a, pour tout temps d'arrêt T fini :

$$\text{(2.e)} \qquad E\left[|Y_T| \,/\, S_T^q\right] \leq \frac{2-q}{1-q} E\left[S_T^{1-q}\right]$$

2) Si (M_t) est une martingale locale continue, nulle en 0, et (L_t) est son temps local en 0, on a, pour tout temps d'arrêt fini T :

$$\text{(2.f)} \qquad E\left[|M_T| \,/\, L_T^q\right] \leq \frac{1}{1-q} E\left[L_T^{1-q}\right].$$

Démonstration : 1) On a :

$$E\left[\frac{|Y_T|}{S_T^q}\right] \leq E\left[\frac{S_T - Y_T}{S_T^q} + S_T^{1-q}\right]$$

On applique ensuite l'inégalité $(2.d)_q$, avec $X = S - Y$, et $C = S$.

2) On applique l'inégalité $(2.d)_q$ avec $X = |M|$, et $C = L$.

Proposition (2.4) : Soit M martingale locale continue, nulle en 0.

On note $S_t = \sup_{s\leq t} M_s$, $s_t = \inf_{s\leq t} M_s$, et $R_t = S_t - s_t$ $(\geq M_t^*)$.

On a, pour tout processus croissant (A_t), adapté, continu à droite, et tout temps d'arrêt T :

$$\text{(2.g)} \qquad E\left[R_T^2 \,/\, A_T\right] \leq 4\, E\left[\int_0^T \frac{d\langle M\rangle_s}{A_s}\right].$$

<u>En particulier, si</u> $q \in]0,2[$, <u>on a</u> :

$$E\left[R_T^2 \,/\, \langle M\rangle_T^{q/2}\right] \leq \frac{8}{2-q}\, E\left[\langle M\rangle_T^{1-q/2}\right]$$

<u>Démonstration</u> : On utilise l'inégalité trajectorielle :

$$R_t^2 \leq 2\{(S_t-M_t)^2 + (M_t-s_t)^2\},$$

puis l'inégalité (2.d) pour $X = (S-M)^2$ (resp : $X' = (M-s)^2$), sous-martingale locale, pour laquelle $C = \langle M\rangle$ (resp : $C' = \langle M\rangle$).

Remarques (2.5) :

1) Pour $A \equiv 1$, l'inégalité (2.g) est le renforcement de l'inégalité de Doob dans L^2, présenté par J. Pitman en [12].

2) Une autre démonstration de (2.g) peut être obtenue à l'aide du lemme (2.1) et des résultats de [1], où il est montré que, lorsque M est de carré intégrable, la projection duale prévisible de $(\alpha_t \overset{\text{déf}}{=} (I_0-M_\infty)^2 - (I_t-M_\infty)^2,\ t \geq 0)$ est $\langle M\rangle$.

3) On peut généraliser - mais nous ne détaillons pas - le résultat de la proposition (2.4) en montrant, par application conjointe de la formule d'Itô, et de la relation de domination, que, pour tout processus croissant adapté, continu à droite (A_t), et tout $p > 0$, $\sup\limits_{s\leq t} (|M_s|^p \,/\, A_s)$ est dominé par un multiple (qui ne dépend que de p) de $\left(\int_0^t \frac{d\langle M\rangle_s}{A_s^{2/p}}\right)^{p/2}$.

2.3) La "nouveauté" des résultats du théorème (1.3) tient en l'exploitation systématique de la majoration (cf, théorème (1.2)) de la fonction de <u>deux</u> variables $P(X_\infty^* \geq x \,;\, A_\infty \leq y)$. Dans les applications antérieures de la relation de domination (cf [9], [13]), on prenait toujours $x = y$.

Nous examinons maintenant les conséquences de la même idée, en ce qui concerne l'inégalité des "bons λ", qui constitue un des fondements - plus classique que la relation de domination - des inégalités de Burkholder - Davis - Gundy.

En [10] (voir la démonstration du lemme (1.1)), les auteurs montrent que : <u>si</u> r <u>et</u> a <u>sont deux réels</u> > 0, A <u>et</u> B <u>deux processus croissants adaptés, continus à droite qui vérifient</u> :

$$(2.h)\qquad E\left[(A_{T-} - A_{S-})^r\right] \leq a\, E\left[B_{T-}^r \;;\; (S < T)\right]$$

<u>pour tous les temps d'arrêt</u> S <u>et</u> T <u>tels que</u> $S \leq T$ (on convient que $A_{0-} = B_{0-} = 0$)

<u>alors, on a, pour tout</u> $\beta > 1$, <u>et tout</u> $\delta > 0$,

$$(2.k)\qquad P(A_\infty \geq \beta\lambda \;;\; B_\infty < \delta\lambda) \leq a \frac{\delta^r}{(\beta-1)^r} P(A_\infty \geq \lambda)$$

(on dit alors que le couple (A_∞, B_∞) vérifie l'inégalité des "bons λ" relative à la fonction $u(x) = ax^r$).

Une conséquence fondamentale (cf Burkholder [4]) de (2.k) est que, pour toute fonction $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, continue, croissante, à croissance modérée, et nulle en 0, il existe une constante c, qui ne dépend que de (a,r,F) telle que

$$(2.l)\qquad E[F(A_\infty)] \leq c\, E[F(B_\infty)].$$

La condition (2.h) est satisfaite, grâce à l'inégalité (1.d), pour tout $r > 0$, avec une constante universelle a_r, par deux quelconques des processus M^*, $\langle M\rangle^{1/2}$ et L^* associés à une martingale locale continue M, nulle en 0.

Réécrivons maintenant l'inégalité (2.k) en posant $X = A_\infty$; $Y = B_\infty$; $x = \lambda$; $y = \delta\lambda$; $c = a / (\beta-1)^r$. Il vient :

$$(2.k')\qquad P\left[X \geq \beta x \;;\; Y \leq y\right] \leq c \left(\frac{y}{x}\right)^r P(X \geq x),$$

ce qui entraîne, si l'on note $\tilde{X} = X^r$, $\tilde{Y} = Y^r$, et $\tilde{\beta} = \beta^r$:

$$(2.k'')\qquad P\left[\tilde{X} \geq \tilde{\beta} x \;;\; \tilde{Y} \leq y\right] \leq c \left(\frac{y}{x}\right) P(\tilde{X} \geq x).$$

On compare, dans le lemme suivant, les inégalités de distribution qui figurent en (2.k"), et dans l'énoncé du théorème (1.2), ce qui revient à comparer la "puissance" respective de l'inégalité des "bons λ" et de la relation de domination.

Lemme (2.6) : <u>Soient</u> X <u>et</u> Y <u>deux v.a. positives telles qu'il existe</u> $\beta > 1$, <u>et</u> $c > 0$ <u>vérifiant</u> :

(2.m) pour tous $x > 0$, $y \geq 0$, $P[X \geq \beta x \; ; \; Y \leq y] \leq c\,(\frac{y}{x})\, P(X \geq x)$.

<u>Alors, il existe une constante</u> C, <u>qui ne dépend que de</u> β <u>et</u> c, <u>telle que</u> :

(2.n) $P[X \geq x \; ; \; Y \leq y] \leq \frac{C}{x} E[Y \wedge y]$.

<u>Démonstration</u> : a) Si l'on remplace (βx) par x en (2.m), on a, en posant $c' = c\beta$:

$$P[X \geq x \; ; \; Y \leq y] \leq c'(\tfrac{y}{x})\, P[X \geq {}^{x}/_{\beta}]$$

b) On a :

$$P(X \geq x \; ; \; Y \leq y) \leq P[Y \geq x \; ; \; Y \leq y] + P[X \geq x \geq Y \; ; \; Y \leq y]$$

$$\leq \frac{1}{x} E[Y \wedge y] + P[X \geq x \; ; \; Y \leq x \wedge y]$$

$$\leq \frac{1}{x} E[Y \wedge y] + c'(\frac{x \wedge y}{x})\, P[X \geq {}^{x}/_{\beta}].$$

- <u>Si ${}^{x}/_{\beta} \leq y$</u>, on a : $(x \wedge y)\, P(X \geq {}^{x}/_{\beta}) \leq \beta\{\frac{x}{\beta} P(X \geq {}^{x}/_{\beta})\}$

$$\leq \beta\, E[X \wedge (\tfrac{x}{\beta})]$$

$$\leq \beta d\, E[Y \wedge (\tfrac{x}{\beta})] \qquad (*)$$

$$\leq \beta d\, E[Y \wedge y]$$

(l'existence d'une constante d permettant de justifier l'inégalité (*) sera montrée au point c) de la démonstration).

- <u>Si ${}^{x}/_{\beta} > y$</u>, on a : $(x \wedge y)\;\; P(X \geq {}^{x}/_{\beta}) \leq y\, P(X \geq y)$

$$\leq E[X \wedge y]$$

$$\leq d\, E[Y \wedge y] \qquad (**)$$

(toujours d'après c) ci-dessous).

On obtient finalement (2.n) en prenant $C = 1 + c'\cdot\beta\cdot d$.

c) Il reste à montrer l'existence d'une constante d, qui ne dépend que de c et β, telle que : pour tout $z \geq 0$,

$$E[X \wedge z] \leq d\, E[Y \wedge z].$$

Posons $f(x) = x \wedge z$. On a : $f(\beta x) \leq \beta f(x)$, et donc :

$$E[f(X)] \leq \beta E[f(X/\beta)] \leq \beta \int df(x)\; P(X \geq \beta x)$$

$$\leq \beta \int df(x)\; \{P[X \geq \beta x\; ;\; Y \leq \delta x] + P[X \geq \delta x]\}$$

$$\leq \beta \int df(x)\; c\delta\; P(X \geq x) + \beta E[f(Y/\delta)]$$

$$\leq \beta c\delta\; E[f(X)] + \frac{\beta}{\delta} E[f(Y)],$$

et donc si δ vérifie : $1-\beta c\delta > 0$, on a :

$$E[f(X)] \leq \frac{\beta}{\delta[1-\beta c\delta]} E[f(Y)]. \quad \square$$

Ainsi , si X et Y sont deux variables positives qui satisfont à l'inégalité (2.k'), avec $\beta > 1$, $c, r > 0$, constantes données, il existe, d'après la démonstration du théorème (1.3), pour tous p,q avec : $\underline{0 \leq q < p < r}$, une constante C, qui ne dépend que de p,q,r,β,c, telle que :

$$(2.p) \qquad E[X^p / Y^q] \leq C\, E[Y^{p-q}].$$

Toutefois, pour poursuivre l'étude comparée de l'inégalité des "bons λ" et de la relation de domination, remarquons que l'inégalité (2.k') a des conséquences plus générales que (2.p). En effet, si l'on effectue les mêmes majorations que dans la démonstration du théorème (1.3), on obtient, si X et Y vérifient (2.k'), et si $\phi,\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ sont deux fonctions croissantes et continues à droite :

$$E[\phi(X)\psi(1/Y)] \leq E[\phi(Y)\psi(1/Y)] + c\, E\left[\int_{[0,\beta X]} d\phi(x)\{\psi(1/x) + \frac{1}{x^r}\int_{1/x}^{\infty} d\psi(y)\; 1/y^r\}\right]$$

En particulier, si p et q vérifient : $p,r > q$, on obtient, en prenant dans l'inégalité précédente $\phi(x) = x^p$, $\psi(y) = y^q$, l'existence de deux constantes C et C' qui ne dépendent que de c,β,p,q,r telles que :

$$E\left[X^p / Y^q\right] \leq C \{E\left[Y^{p-q}\right] + E\left[X^{p-q}\right]\}$$

$$\leq C' \, E\left[Y^{p-q}\right],$$

la dernière inégalité découlant de (2.ℓ).

REFERENCES :

[1] J. AZEMA, M. YOR : En guise d'Introduction (... aux Temps Locaux). Astérisque 52-53 (1978). Soc. Math. France.

[2] M.T. BARLOW, M. YOR : (Semi-)martingale inequalities and Local Times. Zeitschrift für Wahr., 55 (1981), 237-254.

[3] K. BITCHELER,, D. FONKEN : A simple version of the Malliavin Calculus in dimension one. Preprint (1981).

[4] D. BURKHOLDER : Distribution function inequalities for martingales. Ann. of Proba. 1, 1973, 19-42.

[5] D. BURKHOLDER : One-sided Maximal Functions and H^p. Journal of Funct. Analysis 18, 429-454, 1975.

[6] D. BURKHOLDER, B. DAVIS R. GUNDY : Integral inequalities for convex functions of operators on martingales. Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statistics and Probability 2 (1972), 223-240.

[7] A. GARSIA : The Burgess Davis inequalities via Fefferman's inequalities. Arkiv für Math.,

[8] A. GARSIA : Martingale Inequalities : Seminar Notes on Recent Progress.
Benjamin (1973).

[9] E. LENGLART : Relation de domination entre deux processus.
Ann. Inst. H. Poincaré 13 (1977), 171-179.

[10] E. LENGLART, D. LEPINGLE, M. PRATELLI : Présentation unifiée de certaines inégalités de la théorie des martingales. Sém. Proba. XIV. Lect. Notes in Maths 784. Springer (1980).

[11] P.A. MEYER : Un cours sur les intégrales stochastiques.
Sém. Probas X, Lect. Notes 511, Springer (1976).

[12] J.W. PITMAN : A note on L_2 maximal inequalities.
Sém. Probas XV. Lect. Notes in Maths. 850.
Springer (1981).

[13] M. YOR : Les inégalités de sous-martingales comme conséquences de la relation de domination. Stochastics, (1979), vol. 3, p.1-15.