Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Neil Falkner
Christophe Stricker
Marc Yor

Temps d'arrêt riches et applications

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 16 (1982), p. 213-218
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__213_0>

TEMPS D'ARRÊT RICHES ET APPLICATIONS.

N. FALKNER, C. STRICKER et M. YOR

Soit $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t),P)$ un espace probabilisé filtré, qui ne satisfait pas nécessairement les conditions habituelles, mais tel que $L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ soit séparable. Il est montré en [4] que si X est un processus continu, $(\mathcal{F}_t)$ adapté, à valeurs dans un espace métrisable et séparable E, si ζ est un temps d'arrêt et si E possède un recouvrement par des ouverts U satisfaisant à :

$$P[\exists\ t \in [0,\zeta[,\ \ X_t \notin U] = 1,$$

il existe alors des temps d'arrêt annonçables T tels que $P[0 < T < \zeta] = 1$ et que la tribu engendrée par X_T, notée $\sigma(X_T)$, soit égale à $\mathcal{F}_{T-}$ modulo les ensembles négligeables.

On appelle un tel temps d'arrêt <u>temps d'arrêt riche</u> (sous-entendu : relativement au couple $(X,(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$).

Dans la présente Note, on utilise l'existence, établie en [3] (voir aussi [7]), de processus croissants qui engendrent la tribu prévisible, pour retrouver le résultat précédent lorsque $E = \mathbb{R}$, et que le processus X est issu de 0 et dépasse 1 p.s. avant l'instant ζ.

Auparavant, nous apportons quelques compléments aux résultats connus sur les processus qui engendrent la tribu prévisible.

Enfin, nous déduisons très simplement de l'existence des temps d'arrêt riches des contre-exemples - qui s'ajoutent à ceux de M. Barlow [1] et J. Walsh [5] - à certaines questions de théorie des semi-martingales.

1. Sur les processus qui engendrent la tribu prévisible.

1.1. *Définition :* <u>On dit qu'un processus</u> A <u>engendre la tribu prévisible</u> $\mathcal{P}$ <u>si pour tout ensemble</u> $H \in \mathcal{P}$, <u>il existe une fonction borélienne</u> f <u>telle que</u> $f(A)$ <u>soit indistinguable de</u> 1_H.

Un tel processus A possède les deux propriétés suivantes :

(i) <u>Pour tout processus prévisible</u> H, <u>il existe une fonction borélienne</u> f <u>telle que</u> H soit <u>indistinguable de</u> $f(A)$.

C'est une application immédiate du théorème de classe monotone.

(ii) Pour presque tout ω, $A_\bullet(\omega)$ est une fonction injective.

En effet, d'après (i), il existe une fonction borélienne f telle que, p.s., $f(A_s) = s$ pour tout $s \geq 0$. Ceci implique (ii).

1.2. Proposition : Si A engendre $\mathcal{P}$ et si A est continu et adapté, la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t>0}$ est la filtration constante.

Démonstration : Comme $A_\bullet$ est une fonction injective d'après (ii) et une fonction continue par hypothèse, $A_\bullet$ est une bijection croissante ou décroissante de $[0,+\infty[$ sur son image par $A_\bullet$.

Or l'évènement "A est une fonction croissante" (resp. décroissante) appartient à $\mathcal{F}_{0+}$. On peut donc supposer par exemple que $A_\bullet$ est une fonction croissante. Si f est une fonction borélienne sur $\mathbb{R}$ telle que $f(A_s) = s$ pour tout $s \geq 0$, l'inverse (C_u) de A définie sur $[A_0, A_\infty[$ vérifie la relation $f(u) = C_u$. L'égalité $A_\infty = \inf\{u > A_0,\ f(u) = +\infty\}$ montre que C_u et par conséquent A_s sont mesurables par rapport à $\mathcal{F}_{0+}$. Comme $\mathcal{F}_{t-}$ est engendrée par A_t, on en déduit que $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{0+}$ pour tout $t > 0$.

2. Temps d'arrêt riches.

On sait, d'après [3], qu'il existe des processus croissants A continus à gauche, qui engendrent la tribu prévisible, prennent leurs valeurs dans l'intervalle $[1/4, 3/4]$, et tels que, pour tout temps d'arrêt T, $\sigma(A_T) = \mathcal{F}_{T-}$ modulo les ensembles négligeables. (1)

En toute rigueur, soulignons qu'en [3], il est supposé que les conditions habituelles sont vérifiées. Toutefois, une modification mineure de la construction faite en [3] entraîne le résultat ci-dessus sous notre seule hypothèse que $L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$ est séparable, grâce aux remarques suivantes :

- pour tout t, $L^1(\Omega,\mathcal{F}_t,P)$ est séparable.
- les tribus prévisibles par rapport aux filtrations $(\mathcal{F}_{t-})$ et $(\mathcal{F}_{t+})$ sont identiques.

---

(1) Dans la suite, on écrira simplement : (mod. P).

2.1. Proposition : Soit X un processus continu, adapté, issu de 0, qui dépasse 1 avant le temps d'arrêt ζ. Si $T = \inf\{t \,/\, X_t \geq A_t\}$, T est un temps d'arrêt annonçable tel que $P[0 < T < \zeta] = 1$, $X_T = A_T$ et $\sigma(X_T) = \mathcal{F}_{T-}$ (mod. P).

Démonstration : Bien qu'on ne puisse pas choisir un processus A qui soit continu sauf dans le cas trivial où la filtration $(\mathcal{F}_t)$ est constante, on a l'égalité $X_T = A_T$. En effet, X et A étant continus à gauche, $X_T \leq A_T$ sur $\{0 < T < +\infty\}$. La croissance de A et la continuité à droite de X impliquent l'inégalité inverse, c'est-à-dire $X_T \geq A_T$ sur $\{T < +\infty\}$. Pour vérifier que T est un temps d'arrêt (nous rappelons au lecteur que la filtration $(\mathcal{F}_t)$ ne vérifie pas nécessairement les conditions habituelles), on pose pour chaque $\varepsilon > 0$:

$$T_\varepsilon = \inf\{t,\ X_t \geq A_t - \varepsilon\}.$$

Pour $\varepsilon > 0$ et $t \in [0,+\infty]$, on a : $T_\varepsilon > t$ si, et seulement si, $\exists\, \delta > 0$, δ rationnel, tel que pour tout rationnel $r \in [0,t]$, $X_r \leq A_r - \varepsilon - \delta$, ce qui montre que chaque T_ε est un temps d'arrêt et que la suite de temps d'arrêt $(n \wedge T_{2^{-n}})$ annonce T qui est aussi un temps d'arrêt.

2.2. Corollaire : Il existe des temps d'arrêt T, à valeurs dans un intervalle donné de $\mathbb{R}_+$, tels que $\sigma(T) = \mathcal{F}_{T-}$ (mod. P).

Démonstration : Prendre $X_t \equiv t$ $(t \geq 0)$.

3. Quelques contre-exemples.

Barlow [1] a prouvé l'existence de temps d'arrêt T pour la filtration naturelle du mouvement Brownien réel, issu de 0, tels que le processus de ses temps locaux $(L_T^x\ ;\ x \in \mathbb{R})$ ne soit pas une semi-martingale pour sa filtration naturelle. La méthode de Barlow a permis à Walsh [5] de donner un exemple de semi-martingale $(X_t\ ;\ t \leq 1)$ dont la retournée $(X_{1-t}\ ;\ t \leq 1)$ n'est plus une semi-martingale pour sa filtration naturelle.

Nous montrons ci-dessous comment l'existence des temps d'arrêt riches nous permet de construire de tels contre-exemples.

$(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ désignera toujours, dans la suite, la filtration naturelle d'un mouvement Brownien réel $(B_t, t \geq 0)$ issu de 0.

3.1. Soit T temps d'arêt riche relatif au couple $(|B|\ ;\ (\mathcal{F}_t))$, construit à l'aide de la proposition 2.1 (on prend $\zeta \equiv \infty$). On a alors :

$$0 < T < \inf\{t : |B_t| = 1\}, \quad P\text{ p.s.}$$

$(B_{t\wedge T})_{0\leq t\leq\infty}$ est alors une martingale bornée. Si l'on note $X_t = B_{\phi(t)\wedge T}$ $(0 \leq t \leq 1)$, où $\phi : [0,1] \to [0,\infty]$ est continue, strictement croissante, et surjective, la filtration naturelle de $(X_{1-t}, t \leq 1)$ est la filtration constante égale à $(\mathcal{F}_t)$.

. Ainsi, si $(X_{1-t}, t \leq 1)$ était une semi-martingale par rapport à sa filtration naturelle, ce processus devrait être à variation finie, ce qui n'est pas. □

Introduisons maintenant A processus croissant, adapté, continu à gauche, engendrant la tribu prévisible, et à valeurs dans $[{}^1/_4, {}^3/_4]$. (L_t^x) désigne le processus bicontinu des temps locaux de B.

3.2. Définissons $T = \inf\{t\ ;\ -B_t \geq A_t\}$

$$R = \inf\{x\ ;\ L_T^x > 0\}.$$

La variable aléatoire R est p.s. égale à $-A_T$. Ainsi, la filtration naturelle du processus (L_T^x), indexé par $x \in \mathbb{R}$, ou seulement $x \geq -1$, est certainement constante pour $x \geq 0$, bien que le processus (L_T^x) ne soit pas à variation finie sur $[0,\infty[$: en effet, sa variation quadratique, en probabilité, sur l'intervalle $[0,x]$ est égale à $4\int_0^x L_T^y\,dy = 4\int_0^T 1_{(0\leq B_s\leq x)}\,ds$ (cf. [2]), quantité qui est strictement positive p.s.. Donc, (L_T^x) n'est pas une semi-martingale.

3.3. Nous donnons un contre-exemple encore plus simple à cette question : si $T = \inf\{t\ /\ L_t^0 \geq A_t\}$, la filtration naturelle du processus $(L_T^x, x \geq 0)$ est constante et égale à $\mathcal{F}_T$. Le même raisonnement que précédemment montre que $(L_T^x, x \geq 0)$ n'est pas une semi-martingale.

3.4. Notre dernier contre-exemple, un peu plus raffiné, fait appel aux résultats sur le grossissement avec une fin d'ensemble optionnel (ou prévisible).

Notons $L_t^* = \sup_{x\geq 0} L_t^x$, et $T = \inf\{t\ /\ L_t^* \geq A_t\}$.

Si le processus $(L_T^x, x \geq 0)$ était une semi-martingale pour sa filtration propre, il en serait de même pour $(L_T^{x+\rho} ; x \geq 0)$, où $\rho = \sup\{x / \sigma_x = L_T^x\}$, et $\sigma_x = \sup_{0 \leq y \leq x} L_T^y$.

Par ailleurs, on déduit de l'égalité : $L_T^\rho = L_T^* = A_T$ que la filtration naturelle de $(L_T^{x+\rho}, x \geq 0)$ est constante et égale à $\mathcal{H}_T$.

Or, toujours sous l'hypothèse que $(L_T^x, x \geq 0)$ est une semi-martingale, $(L_T^{x+\rho}, x \geq 0)$ ne peut être à variation finie, car sa variation quadratique, en probabilité, sur $[0,x]$ est $4 \int_0^x L_T^{y+\rho}\, dy$, quantité strictement positive.

3.5. *Remarques :*

1) Dans les contre-exemples *3.1.* et *3.3.*, on montre en fait que les processus considérés ne sont même pas des processus de Dirichlet pour leur filtration naturelle, c'est-à-dire qu'ils ne peuvent pas se décomposer en la somme d'une martingale (qui serait constante) et d'un processus à variation quadratique nulle.
(Voir A. Wang [6] pour des exemples de processus de Dirichlet qui ne sont pas des semi-martingales).

2) Les contre-exemples *3.2.* et *3.3.* correspondent exactement aux célèbres théorèmes de Ray - Knight qui affirment que si l'on remplace, dans la définition de T, (A_t) par une constante a, le processus $(L_T^x, x \in \mathbb{R})$ s'exprime simplement en termes de carrés de processus de Bessel, et, en particulier, est une semi-martingale...
On a simplement détruit ces résultats en important, via A, une information beaucoup trop grande.

3) On peut généraliser le contre-exemple *3.3.* en remplaçant (L_t^0) par $\int d\mu(x) L_t^x$, avec μ mesure positive, bornée, sur $\mathbb{R}_+$ (ou $\mathbb{R}$) à support compact. Par contre, on ne sait rien dire si le support de μ n'est pas compact
(un cas intéressant est : $t \equiv \int dx\, L_t^x$; l'étude du processus $(L_t^x ; x \in \mathbb{R})$, pour t fixé, a été faite récemment par E. Perkins et T. Jeulin).

REFERENCES :

[1] M. BARLOW : On Brownian Local Time.
Sém. Probas XV. Lect. Notes in Maths 850. Springer (1981).

[2] N. BOULEAU, M. YOR: Sur la variation quadratique des temps locaux de certaines semi-martingales.
C.R.A.S. Paris, t. 292 (2 Mars 1981), 491-494.

[3] C. DELLACHERIE, C. STRICKER : Changements de temps et intégrales stochastiques.
Sém. Probas XI, Lect. Notes in Maths 581, Springer (1977).

[4] N. FALKNER : Construction of stopping times T such that $\mathcal{F}_T = \sigma(X_T)$ mod. P. Measure Theory, Oberwolfach 1979.
Lect. Notes in Maths. 794, p. 412-423. Springer (1980).

[5] J.B. WALSH : A non reversible semi-martingale. Dans ce volume.

[6] A.T. WANG : Quadratic variation of functionals of Brownian motion.
Ann. Probability 5, 1977, 756-769.

[7] P.A. MEYER, J.A.YAN: Génération d'une famille de tribus par un processus croissant. Sém. Probas IX, Lect. Notes in Maths 465, Springer (1975).

Adresses : N. FALKNER : Dpt. of Mathematics. Ohio State University.
231, West 18th Avenue Columbus, Ohio, 43210.

Ch. STRICKER : Inst. Recherche Math. Avancée.
rue du Général Zimmer. Strasbourg 67084.

M. YOR : Laboratoire de Calcul des Probabilités
4, place Jussieu, Paris (75230).