SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

DOMINIQUE BAKRY
PAUL-ANDRÉ MEYER

# Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques, I

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 16 (1982), p. 138-145
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1982__16__138_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1980/81

# SUR LES INEGALITES DE SOBOLEV LOGARITHMIQUES. I

par D. Bakry et P.A. Meyer

Gross a montré dans [2] que le théorème d'hypercontractivité de Nelson ( dont il existe, rappelons le, une lumineuse démonstration probabiliste due à Neveu [3] ) est équivalent à une inégalité du type de Sobolev par rapport à la mesure gaussienne standard sur $\mathbb{R}$. D'autres inégalités de Sobolev très intéressantes ont été étudiées par Feissner [1]. Nous nous proposons ici de présenter les inégalités de Gross et de Feissner sous un jour un peu différent, et d'en donner une version plus générale. Ces résultats seront améliorés dans un second travail.

Cet exposé est rédigé de manière entièrement autonome, à l'exception du théorème de Nelson lui même. En particulier, nous avons redémontré en dimension 1 certains résultats établis directement en dimension infinie dans un article de P.A. Meyer ( ce volume ). La raison pour laquelle nous avons fait cela est d'ordre pédagogique mais soulignons que tous les résultats établis ici sont corrects en dimension infinie.

## I. NOTATIONS

$\mu$ est la mesure gaussienne standard sur $\mathbb{R}$ ( de densité $(2\pi)^{-1}e^{-x^2/2}$), et $(P_t)$ est le semi-groupe d'Hermite, ou d'Ornstein-Uhlenbeck

$$P_tf(x) = \int f(e^{-t/2}x + \sqrt{1-e^{-t}}\,y)\mu(dy)$$

Il est bien connu que $(P_t)$ est un semi-groupe de noyaux markoviens, que $(P_t)$ admet $\mu$ comme mesure invariante symétrique, et que dans $L^2(\mu)$ l'opérateur borné $P_t$ admet la décomposition spectrale

$$P_t = \int_{[0,\infty[} e^{-\lambda t}dE_\lambda \tag{1}$$

où la résolution de l'identité $E_\lambda$ est purement discrète : le spectre comporte les points demi-entiers $n/2$ $(n=0,1,\dots)$, le sous-espace $\mathcal{H}_n$ correspondant étant de dimension 1, et engendré par le n-ième polynôme d'Hermite $H_n$ ( il s'agit ici des polynômes d'Hermite donnés par la série génératrice

$$e^{tx - t^2/2} = \sum_n t^nH_n(x)/n!$$

Le générateur infinitésimal de $(P_t)$ sera noté A : sur une << bonne >> fonction f , on a $Af(x) = \frac{1}{2}(D^2f(x)-xDf(x))$. L'opérateur carré du champ $\Gamma(f,f)= A(f^2)-2fAf$ est donc égal à $(Df)^2$. Pour la comparaison avec Gross,

on notera que son opérateur N satisfait à $\langle Nf,f\rangle_\mu = \mu((Df)^2) = -2\langle Af,f\rangle_\mu$
Donc N=-2A, ce qui explique de légères différences dans les formules.

Nous désignons par J le projecteur de $L^2(\mu)$ sur $L^2_0(\mu)$ ( la présence du 0 en indice indique qu'il s'agit de fonctions d'intégrale nulle ). J est en fait un noyau ( non positif ) et un opérateur de norme 1 dans $L^2$, de norme 2 dans $L^\infty$ ( donc de norme $\leq 2$ dans tout $L^p$ par interpolation ).

Si m est une fonction borélienne bornée sur $[0,\infty[$, nous notons $T_m$ l'opérateur sur $L^2(\mu)$ correspondant au « multiplicateur » m :

(2) $$T_m = \int_{[0,\infty[} m(\lambda)dE_\lambda$$

Par exemple, $J=T_m$ avec $m = I_{]0,\infty[}$ .

Nous disons que m est un <u>multiplicateur pour</u> $L^p$ si $T_m$ satisfait à une inégalité du type $\|T_m f\|_{L^p} \leq c\|f\|_{L^p}$ , de sorte que $T_m$ opère aussi de $L^p$ dans lui même ( sauf mention du contraire, nos multiplicateurs et nos espaces $L^p$ sont <u>complexes</u> ).

## II. POTENTIELS DE RIESZ POUR $(P_t)$

Soit $\varepsilon$ un nombre complexe tel que $\Re\varepsilon \geq 0$ . Nous désignerons par $R^\varepsilon$ l'opérateur sur $L^2$ de multiplicateur $\lambda^{-\varepsilon} I_{\{\lambda>0\}}$

(3) $$R^\varepsilon = \int_{]0,\infty[} \lambda^{-\varepsilon} dE_\lambda$$

Puisque 0 est exclu, l'intégrale est étendue en réalité de 1/2 à $+\infty$, et le multiplicateur est borné malgré l'apparence ! Il est clair que la fonction $\varepsilon \mapsto R^\varepsilon$ est continue dans le demi-plan fermé ( pour la topologie forte des opérateurs ) et holomorphe dans le demi-plan ouvert.

Pour $\Re\varepsilon>0$, on peut en donner une représentation explicite : si f est une fonction de $L^2$, écrivons son développement $f = \sum_{n\geq 0} f_k$ , avec $f_k \in \mathcal{H}_k$
Alors $P_t f = \sum_{k\geq 0} e^{-nt/2} f_k$ , et l'on a donc

(4) $$\|P_t f\|_{L^2} \leq e^{-t/2} \|f\|_{L^2} \quad \text{si } f_0=0, \text{ i.e. si } \mu(f)=0 .$$

L'intégrale

(5) $$\underline{R}^\varepsilon f = \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)} \int_0^\infty t^{\varepsilon-1} P_t f dt$$

existe donc au sens fort dans $L^2_0$, et l'opérateur $\underline{R}^\varepsilon$ est borné. Une interversion d'intégrations sans mystère montre qu'on fait $\underline{R}^\varepsilon = R^\varepsilon$. En particulier, $R^1$ est ( comme opérateur borné de $L^2_0$ dans $L^2_0$ ) l'inverse de l'opérateur non borné -A de $L^2_0$ dans $L^2_0$ , et $R^{1/2}$ est l'inverse de -C, où C est le générateur infinitésimal du semi-groupe de Cauchy ( ou de Poisson ) associé à $(P_t)$

$$Q_t = \frac{t}{2\sqrt{\pi}} \int e^{-t^2/4s} s^{-3/2} P_s ds$$

de sorte que $Q_t$ correspond au multiplicateur $e^{-t\sqrt{\lambda}}$, et -C au multiplicateur $\sqrt{\lambda}$.

Il est clair sur la formule (3) que l'on a $R^{\varepsilon}R^{\eta} = R^{\varepsilon+\eta}$ si les parties réelles de $\varepsilon$ et $\eta$ sont $\geqq 0$ .

Nous nous proposons maintenant de montrer que les $R^{\varepsilon}$ opèrent sur $L^p$ pour $1<p<\infty$ . Nous commençons par le cas où $\Re\varepsilon>0$. Tout d'abord, $R^{\varepsilon}f=R^{\varepsilon}Jf$, donc il suffit de traiter le cas où f est d'intégrale nulle. On a ensuite

$$\|R^{\varepsilon}f\|_{L^p} \leqq |\Gamma(\varepsilon)|^{-1}\int_0^{\infty} t^{\Re\varepsilon - 1} \|P_t f\|_{L^p}\, dt$$

et finalement il suffit de montrer que, pour $f\in L^p_0$ , on a une inégalité de la forme $\|P_t f\|_p \leqq ae^{-bt}\|f\|_p$ . Or ceci résulte du théorème de Riesz-Thorin : l'opérateur $P_tJ$ a une norme au plus 2 dans $L^{\infty}$, au plus $e^{-t/2}$ dans $L^2$, donc si $p>2$, sa norme est au plus $2^{1-2/p}e^{-t/p}$ dans $L^p$ ; le cas où $1<p<2$ se traite par passage à l'adjoint.

Le cas où $\Re\varepsilon=0$ est beaucoup plus délicat : il résulte du théorème suivant, dû à Stein. Voir Stein [4], p. 121, cor. 3 :

THEOREME 1. <u>Soit</u> m <u>une fonction sur</u> $[0,\infty[$ <u>de la forme</u>

$$m(\lambda) = \lambda\int_0^{\infty} e^{-\lambda u}M(u)du \tag{6}$$

<u>où</u> M <u>est une fonction</u> ( <u>complexe</u> ) <u>telle que</u> $|M(u)|\leqq K$ . <u>Alors</u> m <u>est un multiplicateur pour</u> $L^p$, <u>et la norme de</u> $T_m$ <u>dans</u> $L^p$ <u>peut être majorée en fonction de</u> K <u>seulement</u>.

Ici nous prenons $M(u)=e^{i\alpha u}$ ( $\alpha$ réel ) ; alors $m(\lambda)=\Gamma(1+i\alpha)\lambda^{-i\alpha}$, et nous voyons que $T_m$ opère sur $L^p$ , avec une norme majorée par $c_p|\Gamma(1+i\alpha)|^{-1}$.

## III. L'INEGALITÉ DE SOBOLEV LOGARITHMIQUE

Rappelons le théorème d'hypercontractivité de Nelson :

THEOREME 2. <u>Soient</u> p <u>et</u> q <u>deux exposants tels que</u> $1\leqq p\leqq q\leqq 1+e^t(p-1)$. <u>Alors</u> $P_t$ <u>est un opérateur borné de</u> $L^p$ <u>dans</u> $L^q$, <u>de norme exactement égale à</u> 1.

A partir de ce théorème, Gross démontre l'<u>inégalité de Sobolev logarithmique</u> ( qui lui est en fait équivalente, mais nous ne nous occupons pas ici de cette équivalence ) : contrairement à notre habitude, nous l'énonçons ici pour f <u>réelle</u> .

THEOREME 3. <u>Supposons que l'on ait</u> $f\in L^2$, f <u>appartenant au domaine de</u> A <u>dans</u> $L^2$. <u>Alors</u> $f^2\log|f|$ <u>est intégrable</u>, <u>et l'on a</u>

$$\mu(f^2\log|f|) \leqq \|f\|_2^2\log\|f\|_2 -2<Af,f>_{\mu} \tag{7}$$

Nous allons transformer cet énoncé. Nous remarquons que si f appartient au domaine de A, elle appartient au domaine de $C=-\sqrt{-A}$, et $-<Af,f> = <Cf,Cf>$ . Prenons alors $g\in L^2_0$ , $f=R^{1/2}g$ ; si g appartient au domaine de

C, f appartient au domaine de A, et on peut appliquer à f la formule précédente, qui nous donne

$$\mu((R^{1/2}g)^2\log|R^{1/2}g|\ ) \leqq 2\|g\|_2 + \|R^{1/2}g\|_2^2\ \log\|R^{1/2}g\|_2$$

Nous remarquons maintenant que $R^{1/2}$ est borné de $L^2_0$ dans lui-même, et que le domaine de C est dense dans $L^2_0$ ; cette inégalité s'étend donc à tout $L^2_0$ . Introduisant l'espace d'Orlicz $L^2\log_+L$ (1) associé à la fonction de Young $x^2\log x I_{\{x\geq 1\}}$, nous pouvons énoncer l'inégalité de Sobolev logarithmique, avec une certaine perte d'information quant aux constantes, sous la forme suivante :

COROLLAIRE 4. $R^{1/2}$ <u>est un opérateur borné de</u> $L^2$ <u>dans</u> $L^2\log_+L$ .

Avec deux remarques : la première, c'est que nous avons écrit $L^2$ et non $L^2_0$ , car avec notre définition de $R^{1/2}$, J est caché dedans ! Ensuite, ce résultat s'étend trivialement des fonctions réelles aux fonctions complexes.

La question naturelle est maintenant : que peut on dire de $R^\varepsilon$ en général ? Cette question a été abordée par Feissner [1], à une nuance près : Feissner ne s'intéresse pas à $R^{1/2} = (-A)^{-1/2}J$, mais à $(I-A)^{-1/2}$. Nous reviendrons plus loin sur la comparaison entre les résultats de Feissner et les nôtres.

IV. UNE INEGALITE DE SOBOLEV LOGARITHMIQUE POUR $R^\varepsilon$

Dans cette section, nous allons établir une inégalité de Sobolev logarithmique facile et grossière : elle n'entraîne pas l'inégalité de Gross, qui tombe dans le cas limite $\alpha=p\varepsilon$ ( $p=2$, $\varepsilon=1/2$ ). De même, Feissner démontre pour $p=2$, $\varepsilon$ entier certaines inégalités qui tombent dans le cas limite. En revanche, pour $\varepsilon=1/2$, $p>2$, nous obtenons un résultat meilleur que celui de Feissner ( th. 4.3, p.57 ) - ou plutôt, nous montrerons plus loin qu'il est meilleur.

On supposera $\varepsilon$ réel : l'extension au cas complexe découle du résultat de Stein pour $\varepsilon=i\alpha$.

THEOREME 5. <u>Soient</u> $p>1$, $r\geqq 0$, $\varepsilon>0$ . <u>Alors</u> $R^\varepsilon$ <u>est un opérateur borné de</u> $L^p$ <u>dans</u> $L^p\log^r L$ <u>si</u> $r<p\varepsilon$ .(1) ( Pour le cas $r=p\varepsilon$, voir l'exposé II ).

Nous commençons par réduire le problème à une situation plus simple. Nous pouvons d'abord nous limiter aux fonctions réelles. Ensuite, soit $f\in L^p_0$, et soit $q=1+e(p-1)>p$ . Coupons $R^\varepsilon f$ donné par (5) en deux :

1. La fonction $x^p\log_+^r x$ est croissante si $p>1$, $r\geqq 0$. Elle est convexe sur $[0,\infty[$ si $r\geqq 1$, et on peut alors s'en servir pour définir l'espace $L^p\log^r L$. Si $0<r<1$, elle est au moins convexe sur $[e,\infty[$, et on utilisera une fonction de Young $\phi$ égale à $x^p\log^r x$ sur $[e,\infty[$ ( par ex. $\phi(x)=x^p$ pour $x<e$ ).

$$V^{\varepsilon}f = \int_0^1 t^{\varepsilon-1}P_t f dt \quad , \quad W^{\varepsilon}f = \int_1^{\infty} t^{\varepsilon-1}P_t f dt$$

( nous avons supprimé le facteur constant $1/\Gamma(\varepsilon)$ ). Nous écrivons le second terme

$$P_1(\int_0^{\infty}(1+t)^{\varepsilon-1}P_t f dt\ )$$

et l'inégalité $\|P_t f\|_p \leqq ae^{-bt}\|f\|_p$ vue plus haut montre que la parenthèse définit un opérateur borné de $L_0^p$ dans lui même. Comme $P_1$ applique $L^p$ dans $L^q$ d'après le th.2, il est inutile de nous occuper de $W^{\varepsilon}$, qui améliore l'exposant principal p : toute la difficulté concerne $V^{\varepsilon}$.

Mais l'intégration dans $V^{\varepsilon}$ est étendue de 0 à 1, et pour l'étude de $V^{\varepsilon}f$ il n'est plus nécessaire de supposer f d'intégrale nulle : désormais nous supposons f positive de norme $\|f\|_{L^p} \leqq 1$ .

Nous posons $p=1+a$ ( $p>1$ reste fixé ci-dessous ) ; nous fixons aussi $r>0$ . Nous désignons par A,B... des quantités qui dépendent seulement de p et de r. La démonstration repose sur le lemme suivant :

LEMME. Soit $g_t = P_t f$ ( $0\leqq t\leqq 1$ ). Alors on a

(8) $$\mu(g_t^p \log_+^r g_t) \leqq \left(\frac{A}{t}\log\frac{1}{t}\right)^r$$

Cette propriété, et la remarque suivante, vont entraîner immédiatement le théorème :

REMARQUE. Si h est une fonction positive, et si $\mu(h^p\log_+^r h)\leqq\Theta$, on a $\|h\|_{L^p\log^r L}\leqq C(1\vee\Theta)^{1/p}$ . On a en effet en posant $(1\vee\Theta)^{1/p}=u$ : $\mu(\phi(\frac{h}{u})) \leqq \phi(e)+\mu((h/u)^p\log_+^r(h/u))\leqq \phi(e)+\frac{1}{u^p}\mu(h^p\log_+^r h) \leqq \phi(e)+1$, quantité fixe. Pour $r\geqq 1$, on prend $\phi(x)=x^p\log_+^r x$ et il est inutile d'ajouter $\phi(e)$. On conclut en remarquant que $\phi$ et $\phi/(\phi(e)+1)$ définissent des normes équivalentes.

Alors (8) nous donne $\|g_t\|_{L^p\log_+^r L} \leqq C\left(1\vee(\frac{A}{t}\log\frac{1}{t})^{r/p}\right)$. Multipliant par $t^{\varepsilon-1}$ et intégrant de 0 à 1, nous obtenons

$$\|\int_0^1 t^{\varepsilon-1}g_t dt\|_{L^p\log_+^r L} \leqq C\int_0^1 t^{\varepsilon-1}(1\vee \frac{A}{t}\log\frac{1}{t})^{r/p}dt$$

qui converge si $\varepsilon>r/p$, i.e. si $r<p\varepsilon$.

Reste donc à démontrer (8). Comme c'est une majoration à t fixe, nous poserons $P_t f=g$. Nous allons appliquer le théorème de Nelson avec les exposants $p=1+a$ et $q=1+a+at\leqq 1+ae^t$.

Nous partons de l'égalité

$$\mu(g^p\log_+^r g\ ) = \int_1^{\infty}\mu\{g>\lambda\}\lambda^{p-1}(p\log^r\lambda+r\log^{r-1}\lambda)d\lambda$$

et nous majorons $\mu\{g>\lambda\}$ par $\mu(g^q)/\lambda^q$. Si l'on se rappelle que $q-p=at$, et que l'on pose $\lambda=e^{atu}$, on obtient une inégalité du type

$$\mu(g^p\log_+^r g) \leq \mu(g^q)\left(\frac{A}{t^{r+1}}+\frac{B}{t^r}\right) \leq \mu(g^q)\frac{A}{t^{r+1}}$$

puisque $t\leq 1$ . Pour améliorer cela, nous remplaçons f par cf, g par cg, avec $c<1$. Eliminant $c^p$ des deux côtés, il nous reste à droite $c^{q-p}=c^{at}$, soit

(9) $$\mu\left(g^p(\log g - \log\tfrac{1}{c})^r I_{\{g>1/c\}}\right) \leq c^{at}\frac{A}{t^{r+1}}\mu(g^q)$$

Du côté gauche cette parenthèse est bien ennuyeuse, mais il y a un cas au moins où elle ne gêne pas : celui où $0<r<1$, et où nous pouvons écrire

$$(\log g - \log\tfrac{1}{c})^r \geq \log^r g - \log^r\tfrac{1}{c} \qquad \text{sur } \{g>1/c\}$$

Nous avons dans ce cas

$$\mu(g^p\log^r g I_{\{g>1/c\}}) \leq c^{at}\frac{A}{t^{r+1}}\mu(g^q) + \mu(g^p)\log^r\frac{1}{c}$$

et bien évidemment

$$\mu(g^p\log_+^r g\ I_{\{g\leq 1/c\}}) \leq \mu(g^p)\log^r\frac{1}{c}$$

Nous ajoutons, et du côté gauche il y a $\mu(g^p\log_+^r g)$, qui ne contient plus c . Du côté droit, l'idée est de tâcher de gagner une unité sur l'exposant en t. Nous prenons donc $c^{at}=t$, soit $\log\frac{1}{c} = \frac{1}{at}\log\frac{1}{t}$ .

Si l'on se rappelle que $g=P_tf$ avec $\|f\|_p=1$, donc $\|g\|_q\leq 1$, il reste

$$\mu(g^p\log_+^r g) \leq \frac{A}{t^r}+ B\left(\frac{1}{t}\log\frac{1}{t}\right)^r \leq A\left(\frac{1}{t}\log\frac{1}{t}\right)^r$$

c'est à dire l'inégalité cherchée, dans le cas où $r<1$.

Supposons maintenant $r>1$, et revenons à (9). Nous écrivons la parenthèse du côté gauche

$$\log^r g\left(1-\log\tfrac{1}{c}\ /\ \log g\right)^r = \log^r g\,(1-u)^r$$

avec $0\leq u\leq 1$, et par convexité $(1-u)^r \geq 1-ru$. Donc

$$\mu(g^p\log_+^r g\ I_{\{g>1/c\}}) \leq c^{at}\frac{A}{t^{r+1}}\mu(g^q) + r\log\frac{1}{c}\ \mu(g^p\log_+^{r-1}g)$$

$$\mu(g^p\log_+^r g\ I_{\{g\leq 1/c\}}) \leq \mu(g^p)\log^r\frac{1}{c} \qquad (\text{ ajouter à la précédente })$$

d'où en remplaçant comme ci-dessus $\mu(g^p)$, $\mu(g^q)$ par 1, $c^{at}$ par t

$$\mu(g^p\log_+^r g) \leq A\left(\frac{1}{t}\log\frac{1}{t}\right)^r + B\left(\frac{1}{t}\log\frac{1}{t}\right)\mu(g^p\log_+^{r-1}g)$$

et on voit alors que la formule (8) passe de l'intervalle ]0,1] à ]1,2], ]2,3], etc . Le théorème est établi.

## V. COMPARAISON AVEC LES RESULTATS DE FEISSNER

Lorsque $p>2$, nous voyons que $R^{1/2}$ applique $L^p$ dans $L^p\log^r L$ pour $r<p/2$, tandis que Feissner remplace ce dernier espace par $L^p\log L$. Notre résultat donne donc un exposant meilleur. Cependant, il ne peut être directement comparé au théorème de Feissner, car celui-ci concerne, non $R^{1/2}$, mais

$(I-A)^{-1/2}$ . Quelle relation y a t'il entre ces deux opérateurs ?

$R^{1/2}$ correspond au multiplicateur $\lambda^{-1/2}I_{\{\lambda>0\}}$ , $(I-A)^{-1/2}$ au multiplicateur $1/(1+\lambda)^{1/2}$. Le projecteur J étant borné dans tout $L^p$, nous pouvons aussi bien considérer $1/(1+\lambda)^{1/2}\ I_{\{\lambda>0\}}$ , et il nous suffit alors de démontrer que le multiplicateur qui fait passer de $R^{1/2}$ à cet opérateur, soit $(\lambda/1+\lambda)^{1/2}$, opère sur tout $L^p$. Cela résulte du lemme suivant ( classique ) :

LEMME. <u>Pour tout</u> $\varepsilon>0$, <u>tout</u> $p>0$, $\frac{\lambda^\varepsilon}{(p+\lambda)^\varepsilon}$ <u>est transformée de Laplace d'une mesure bornée</u> $\theta$ ( <u>non nécessairement positive</u> ).

Alors l'opérateur de multiplicateur $(\lambda/p+\lambda)^\varepsilon$ est égal à $\int P_t\theta(dt)$, et il est clair qu'il est borné sur $L^p$.

Voici la démonstration sommaire du lemme : $p/p+\lambda$ est transformée de Laplace de la mesure $\rho(dt)= pe^{-pt}dt$ de masse 1 . D'autre part, $(1-x)^\varepsilon$ s'écrit $\sum a_k x^k$ avec $\sum |a_k|<\infty$. Alors on a

$$\left(\frac{\lambda}{p+\lambda}\right)^\varepsilon = \left(1-\frac{p}{p+\lambda}\right)^\varepsilon = \sum a_k\left(\frac{p}{p+\lambda}\right)^k$$

et on a $\theta = \sum a_k\rho^k$ ( puissances de convolution de $\rho$ ) .

## VI. QUELQUES REMARQUES SUR L'INEGALITE DE GROSS

Ce paragraphe est plutôt de nature << philosophique >>, et nous ne donnerons pas tous les détails. Recopions l'inégalité de Gross ( qui échappe, comme nous l'avons vu, au théorème 5 ) : si $f\in\underline{\underline{D}}_2(A)$, le domaine de A dans $L^2$, on a

$$(10)\qquad \mu(f^2\log|f|) \leqq \|f\|_2^2\log\|f\|_2 - 2\langle Af,f\rangle_\mu$$

L'inégalité sous cette forme exige que f soit << deux fois dérivable >>, mais si l'on remplace $-2\langle Af,f\rangle$ par $\mu(\Gamma(f,f))$, c'est à dire ici $\mu(f'^2)$, on obtient que si f appartient à l'espace de Dirichlet usuel, on a

$$(11)\qquad \mu(f^2\log|f|) \leqq \|f\|_2^2\log\|f\|_2 + \mu(\Gamma(f,f))$$

avec une conséquence intéressante : on sait que les contractions opèrent sur l'espace de Dirichlet avec diminution de la norme ( on a même mieux : si $\varphi$ est une con-traction, on a $\Gamma(\varphi\circ f,\varphi\circ f)\leqq \Gamma(f,f)$ p.p. ). Donc si l'on écrit (11) pour la fonction <u>positive</u> $|f|$, on ne l'affaiblit pas, et donc il suffit d'établir (10) aussi pour une fonction positive, ce qui permet d'en simplifier un peu la démonstration. En fait, comme l'espace de Dirichlet admet aussi des troncations, il suffit de traiter le cas où f est positive bornée, et ( quitte à ajouter $\varepsilon>0$ ) où f est strictement positive bornée.

Voici maintenant notre remarque : Gross établit aussi une inégalité dans $L^p$, qu'il écrit ainsi ( nous nous bornons au cas où f est positive, pour les raisons qui viennent d'être expliquées ; le coefficient diffère de celui de Gross par un facteur 2 )

$$(12) \qquad \mu(f^p \log f) \leqq \|f\|_p^p \log\|f\|_p - \frac{p}{p-1}\langle f^{p-1}, Af\rangle$$

et nous nous demandons comment transformer cette formule en une formule seulement << une fois différentiable >>. Pour cela, supposant f strictement positive et bornée, nous appliquons la " formule d'Ito" à la fonction $x^p$ de classe $C^2$ sur un intervalle contenant les valeurs de f

$$A(f^p) = pf^{p-1}Af + \tfrac{1}{2}p(p-1)f^{p-2}\Gamma(f,f)$$

( ici, une relation triviale entre dérivées ! ), et comme $\mu(A(f^p))=0$, il nous reste

$$(13) \qquad \mu(f^p \log f) \leqq \|f\|_p^p \log\|f\|_p + \tfrac{p}{2}\mu(\, f^{p-2}\Gamma(f,f))$$

et il n'est pas difficile maintenant d'étendre cette formule à une fonction non nécessairement positive, en remplaçant simplement f par $|f|$. Nous n'en dirons pas plus sur ce sujet.

Dans l'exposé II, nous utiliserons la méthode d'interpolation complexe pour établir un résultat analytique beaucoup plus fort que le théorème 5 ( et contenant en particulier le cas limite du th. 5 ).

REFERENCES


[1]. FEISSNER (G.F.). Hypercontractive semigroups and Sobolev's inequality. Trans. Amer. M. Soc. 210, 1975, p. 51-62.

[2]. GROSS (L.). Logarithmic Sobolev inequalities. Amer. J. Math. 97, 1976, p.1061-1083.

[3]. NEVEU (J.). Sur l'espérance conditionnelle par rapport à un mouvement brownien. Ann. Inst. H. Poincaré, XII, 1976, p 105-110.

[4]. STEIN (E.M.). Topics in harmonic analysis related to the Littlewood Paley theory. Annals of Math. Studies 63, Princeton 1970.