

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

DOMINIQUE BAKRY

Une remarque sur les semi-martingales à deux indices

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 671-672

[<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__671_0>](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__671_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE REMARQUE SUR LES SEMIMARTINGALES

A DEUX INDICES

par D. Bakry

Considérons un espace probabilisé complet $(\Omega, \underline{\underline{F}}, P)$, muni de deux filtrations $(\underline{\underline{F}}_s^1)$ et $(\underline{\underline{F}}_t^2)$ satisfaisant à la relation de commutation de Cairoli et Walsh. Il est naturel de dire qu'un processus à deux indices (X_{st}) est une semimartingale si l'intégrale stochastique des processus prévisibles élémentaires se prolonge en une mesure aléatoire sur la tribu prévisible, à valeurs dans l'espace L^0 . On connaît jusqu'à maintenant trois modèles de semimartingales à deux indices :

- Les processus à variation finie.
- Les martingales de carré intégrable.
- Un modèle mixte, étudié par Wong et Zakai [1], qui est du type

$$(1) \quad X_{st} = E[A_t | \underline{\underline{F}}_s^1] \quad (= E[A_t | \underline{\underline{F}}_{st}])$$

où (A_t) est un processus à variation finie adapté à la filtration $(\underline{\underline{F}}_t^2)$, et satisfaisant à des conditions très restrictives : les mesures $dA_t(\omega)$ sont absolument continues par rapport à une mesure déterministe $\mu(dt)$, avec des densités $Y_t(\omega)$ satisfaisant à $\int Y_t^2(\omega) \mu(dt) P(d\omega) < \infty$.

P.A. Meyer nous a demandé si nous pouvions affaiblir ces conditions. Nous allons répondre partiellement à sa question en donnant un exemple de processus croissant (A_t) , de variation totale égale à 1 p.s., et tel que le processus (X_{st}) ne soit pas une semimartingale à deux indices.

CONSTRUCTION DU CONTRE-EXEMPLE

Nous prenons comme ensemble d'indices, non pas $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, mais $[0,1] \times [0,1]$. Nous aurons aussi $\Omega =]0,1]$, avec sa tribu borélienne $\underline{\underline{F}}$ (cette tribu ne sera pas complétée, mais la complétion ne changerait rien aux calculs), et la filtration discrète $(\underline{\underline{F}}^p)$ constituée par les tribus dyadiques (nous précisons les notations plus loin). Pour construire notre première filtration $(\underline{\underline{F}}_s^1)$, nous choisissons une suite (s_p) telle que $s_0 = 0$, $s_p \uparrow 1$, et nous posons

$$\underline{\underline{F}}_s^1 = \underline{\underline{F}}^p \quad \text{pour } s \in [s_p, s_{p+1}[$$

La seconde filtration sera tout simplement $\underline{\underline{F}}_t^2 = \underline{\underline{F}}$; les processus prévisibles à deux indices sont donc les processus prévisibles en s dépendant mesurablement de t . Enfin, la loi P sur Ω sera la loi uniforme. La relation de commutation est trivialement satisfaite.

Le processus croissant que nous considérerons sera

$$A_t(\omega) = I_{\{t \geq \omega\}}$$

et nous allons vérifier que X_{st} donné par (1) n'est pas une semimartingale. Comme ce processus est à variation finie sur $[0, u] \times [0, 1]$ pour tout $u < 1$, nous ne prendrons pas la peine de vérifier que nos processus prévisibles (qui seront pour commencer nuls hors d'un tel rectangle) sont "élémentaires", bien qu'ils le soient en fait.

La tribu $\underline{\mathbb{F}}^p$ admet pour atomes les intervalles $H_1^p =]i2^{-p}, (i+1)2^{-p}]$, pour $0 \leq i < 2^p$; lorsqu'on passe de $\underline{\mathbb{F}}^p$ à $\underline{\mathbb{F}}^{p+1}$, chaque atome H_1^p se subdivise en les deux atomes H_{2i}^{p+1} et H_{2i+1}^{p+1} . Nous emploierons la notation $c_p(\omega)$ pour désigner l'indice i tel que $\omega \in H_1^p$; le processus (c_p) est markovien par rapport à $(\underline{\mathbb{F}}^p)$, avec $P\{c_{p+1}=2i | c_p=i\} = P\{c_{p+1}=2i+1 | c_p=i\} = 1/2$.

Puisque la mesure $dA_t(\omega)$ est une masse unité au point ω , la mesure $d_t E[A_t | \underline{\mathbb{F}}^p]$ est une loi uniforme sur l'atome de $\underline{\mathbb{F}}^p$ qui contient ω . D'une manière générale, nous désignerons par $\lambda_1^p(dt)$ la répartition uniforme sur H_1^p , et nous pouvons écrire ce que vaut $dX_{st}(\omega)$, considérée comme mesure sur le carré $[0, 1] \times [0, 1]$:

$$d_{st} X_{st}(\omega) = \sum_p \sum_{ij} \dot{I}_{\{c_p(\omega)=i, c_{p+1}(\omega)=j\}} \varepsilon_{s_{p+1}}(ds) \otimes (\lambda_j^{p+1}(dt) - \lambda_i^p(dt))$$

(pour chaque ω , cette somme est en fait réduite à un terme). Considérons le processus prévisible $f_p(s, t, \omega)$ qui est nul si $s \neq s_{p+1}$, et qui si $s = s_{p+1}$ vaut $2I_{H_{2c_p}^{p+1}}(t)$. La variable aléatoire

$$M_p = \int f_p(s, t, \omega) dX_{st}(\omega)$$

vaut 1 si $c_{p+1}(\omega) = 2c_p(\omega)$, -1 si $c_{p+1}(\omega) = 2c_p(\omega) + 1$.

Considérons maintenant les processus prévisibles élémentaires positifs, bornés par 2, $g_n = \sum_{p \leq n} f_p$; ils tendent en croissant vers un processus prévisible borné. D'autre part

$$\int g_n(s, t) dX_{st} = M_1 + \dots + M_n$$

et nous avons ici les sommes partielles d'un jeu de pile ou face : elles ne convergent pas en probabilité lorsque $n \rightarrow \infty$, et X ne peut donc être une semimartingale.

[1]. Wong (E.) et Zakai (M.). Weak martingales and stochastic integrals in the plane. Ann. Prob. 4, 1976, p. 570-586.

Institut de Recherche Mathématique Avancée
7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg-Cedex
(Laboratoire Associé au CNRS)