

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

DOMINIQUE LÉPINGLE

## **Une remarque sur les lois de certains temps d'atteinte**

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 15 (1981), p. 669-670

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1981\\_\\_15\\_\\_669\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__669_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UNE REMARQUE SUR LES LOIS DE CERTAINS TEMPS D'ATTEINTE

D. Lépingle

---

Soit  $B$  un mouvement brownien linéaire issu de zéro et soient  $c$  et  $d$  des réels strictement positifs. Si l'on pose

$$T = \inf \{ t > 0 : B_t = c \text{ ou } -d \},$$

il est bien connu que  $P(T < +\infty) = 1$  et que

$$E \left[ \exp -1/2 \alpha^2 T \right] = \frac{\operatorname{ch} \alpha \frac{c-d}{2}}{\operatorname{ch} \alpha \frac{c+d}{2}}.$$

On en trouve une démonstration dans le livre d'Itô et Mc Kean, qui ajoutent sans commentaire

$$E \left[ \exp 1/2 \alpha^2 T \right] = \frac{\cos \alpha \frac{c-d}{2}}{\cos \alpha \frac{c+d}{2}} \quad \text{pour } 0 < \alpha < \frac{\pi}{c+d}.$$

Cette dernière formule découle assez facilement de la première par prolongement analytique; mais beaucoup de probabilistes actuels connaissent mieux les martingales que les fonctions analytiques, alors voici pour eux une démonstration simple et directe, qui ne semble pourtant pas classique.

Démonstration. Pour  $\alpha > 0$ , le processus

$$Z_t = \exp \left\{ i\alpha \left( B_t - \frac{c-d}{2} \right) + 1/2 \alpha^2 t \right\}$$

est une martingale complexe de partie réelle

$$\cos \alpha \left( B_t - \frac{c-d}{2} \right) \exp 1/2 \alpha^2 t.$$

Pour tout  $t$  fini,

$$E \left[ \cos \alpha \left( B_{T \wedge t} - \frac{c-d}{2} \right) \exp 1/2 \alpha^2 (T \wedge t) \right] = \cos \alpha \frac{c-d}{2}$$

et donc pour  $\alpha < \frac{\pi}{c+d}$

$$E \left[ \exp 1/2 \alpha^2 (T \wedge t) \right] \leq \frac{\cos \alpha \frac{c-d}{2}}{\cos \alpha \frac{c+d}{2}},$$

d'où

$$E \left[ \exp 1/2 \alpha^2 T \right] \leq \frac{\cos \alpha \frac{c-d}{2}}{\cos \alpha \frac{c+d}{2}}.$$

Ainsi la martingale complexe  $Z_{T \wedge t}$  est bornée par une variable aléatoire intégrable, ce qui entraîne que

$$E \left[ Z_T \right] = \exp -i\alpha \frac{c-d}{2}.$$

Un calcul direct aboutit ensuite à l'égalité dans la dernière inégalité.

. ——— .

On obtient un résultat analogue pour la marche de Bernoulli.

Soit  $(m_k, k \geq 1)$  une suite de variables aléatoires indépendantes équadistribuées de loi  $P(m_k = +1) = P(m_k = -1) = 1/2$ . Si c et d sont deux entiers  $\geq 1$ , on pose

$$T = \inf \left\{ n \geq 1 : \sum_{k=1}^n m_k = c \text{ ou } -d \right\}.$$

Alors  $P(T < +\infty) = 1$  et

$$E \left[ (\cos \alpha)^{-T} \right] = \frac{\cos \alpha \frac{c-d}{2}}{\cos \alpha \frac{c+d}{2}} \quad \text{pour } 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{c+d}.$$

La démonstration utilise cette fois la martingale complexe

$$Z_n = (\cos \alpha)^{-n} \exp i\alpha \left( \sum_{k=1}^n m_k - \frac{c-d}{2} \right).$$

. ——— .

En temps continu on a encore l'énoncé suivant.

Soit  $Q_t = N_t - N'_t$  la différence de deux processus de Poisson indépendants de même paramètre  $\lambda$ . Si c et d sont deux entiers  $\geq 1$ , on pose

$$T = \inf \left\{ t > 0 : Q_t = c \text{ ou } -d \right\}.$$

Alors  $P(T < +\infty) = 1$  et

$$E \left[ \exp 2\lambda(1 - \cos \alpha)T \right] = \frac{\cos \alpha \frac{c-d}{2}}{\cos \alpha \frac{c+d}{2}} \quad \text{pour } 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{c+d}.$$

On utilise ici la martingale complexe

$$Z_t = \exp \left\{ i\alpha \left( Q_t - \frac{c-d}{2} \right) + 2\lambda(1 - \cos \alpha)t \right\}.$$