Dominique Lépingle

Une remarque sur les lois de certains temps d'atteinte

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 669-670
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__669_0>

UNE REMARQUE SUR LES LOIS DE CERTAINS TEMPS D'ATTEINTE

D. Lépingle

Soit B un mouvement brownien linéaire issu de zéro et soient c et d des réels strictement positifs. Si l'on pose

$$T = \inf \{ t>0 : B_t = c \text{ ou } -d \} ,$$

il est bien connu que $P(T<+\infty)=1$ et que

$$E\left[\exp -1/2\ \alpha^2 T \right] = \frac{\operatorname{ch} \alpha\frac{c-d}{2}}{\operatorname{ch} \alpha\frac{c+d}{2}} .$$

On en trouve une démonstration dans le livre d'Itô et Mc Kean, qui ajoutent sans commentaire

$$E\left[\exp 1/2\ \alpha^2 T \right] = \frac{\cos \alpha\frac{c-d}{2}}{\cos \alpha\frac{c+d}{2}} \qquad \text{pour} \quad 0\leq\alpha<\frac{\pi}{c+d} .$$

Cette dernière formule découle assez facilement de la première par prolongement analytique; mais beaucoup de probabilistes actuels connaissent mieux les martingales que les fonctions analytiques, alors voici pour eux une démonstration simple et directe, qui ne semble pourtant pas classique.

Démonstration. Pour $\alpha\geq 0$, le processus

$$Z_t = \exp \{ i\alpha(B_t-\frac{c-d}{2}) + 1/2\ \alpha^2 t \}$$

est une martingale complexe de partie réelle

$$\cos \alpha(B_t-\frac{c-d}{2}) \exp 1/2\ \alpha^2 t .$$

Pour tout t fini,

$$E\left[\cos \alpha(B_{T\wedge t}-\frac{c-d}{2}) \exp 1/2\ \alpha^2 (T\wedge t) \right] = \cos \alpha\frac{c-d}{2}$$

et donc pour $\alpha<\frac{\pi}{c+d}$

$$E\left[\exp 1/2\, \alpha^2 (T\wedge t)\right] \leqslant \frac{\cos \alpha\frac{c-d}{2}}{\cos \alpha\frac{c+d}{2}} ,$$

d'où

$$E\left[\exp 1/2\, \alpha^2 T\right] \leqslant \frac{\cos \alpha\frac{c-d}{2}}{\cos \alpha\frac{c+d}{2}} .$$

Ainsi la martingale complexe $Z_{T\wedge t}$ est bornée par une variable aléatoire intégrable, ce qui entraîne que

$$E\left[Z_T\right] = \exp -i\alpha\frac{c-d}{2} .$$

Un calcul direct aboutit ensuite à l'égalité dans la dernière inégalité.

. ——— .

On obtient un résultat analogue pour la marche de Bernoulli.

<u>Soit</u> $(m_k,\ k\geqslant 1)$ <u>une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées de loi</u> $P(m_k=+1) = P(m_k=-1) = 1/2$. <u>Si</u> c <u>et</u> d <u>sont deux entiers</u> $\geqslant 1$, <u>on pose</u>

$$T = \inf\{ n\geqslant 1 : \sum_{k=1}^{n} m_k = c \text{ ou } -d \} .$$

<u>Alors</u> $P(T<+\infty)=1$ <u>et</u>

$$E\left[(\cos \alpha)^{-T}\right] = \frac{\cos \alpha\frac{c-d}{2}}{\cos \alpha\frac{c+d}{2}} \quad \underline{\text{pour}} \quad 0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{c+d} .$$

La démonstration utilise cette fois la martingale complexe

$$Z_n = (\cos \alpha)^{-n} \exp i\alpha\left(\sum_{k=1}^{n} m_k - \frac{c-d}{2}\right) .$$

. ——— .

En temps continu on a encore l'énoncé suivant.

<u>Soit</u> $Q_t = N_t - N'_t$ <u>la différence de deux processus de Poisson indépendants de même paramètre</u> λ. <u>Si</u> c <u>et</u> d <u>sont deux entiers</u> $\geqslant 1$, <u>on pose</u>

$$T = \inf\{ t>0 : Q_t = c \text{ ou } -d \} .$$

<u>Alors</u> $P(T<+\infty)=1$ <u>et</u>

$$E\left[\exp 2\lambda(1-\cos\alpha)T\right] = \frac{\cos \alpha\frac{c-d}{2}}{\cos \alpha\frac{c+d}{2}} \quad \text{pour} \quad 0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{c+d} .$$

On utilise ici la martingale complexe

$$Z_t = \exp\{ i\alpha(Q_t-\frac{c-d}{2}) + 2\lambda(1-\cos\alpha)t \} .$$