JEAN PELLAUMAIL

Solutions faibles et semi-martingales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 561-586
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__561_0>

SOLUTIONS FAIBLES ET SEMI-MARTINGALES

J.PELLAUMAIL.

RESUME

On montre l'existence d'une solution faible de l'équation différentielle stochastique $dX = a(X)\ dZ$ où Z est une semi-martingale et a une fonctionnelle prévisible continue pour la convergence uniforme. La preuve est très différente de la méthode classique consistant à résoudre d'abord un problème de martingales.

SUMMARY

Let us consider the stochastic differential equation $dX = a(X)\ dZ$ when Z is a semi-martingale and a is a predictable functionnal which is continuous for the uniform norm. The aim of this paper is to state the existence of a weak solution for such an equation. The method of the proof is quite new in as much it does not need the notion of "solution of a martingale problem".

PLAN

1. INTRODUCTION

Le but de cette étude est de démontrer le théorème de la section 9. Dans le théorème, on établit l'existence d'une solution "faible" de l'équation différentielle stochastique $dX = a(X)\ dZ$.

Dans cette équation, Z est une semi-martingale quelconque et a est une "fonctionnelle prévisible" qui dépend de tout le passé du processus Z, cette dépendance étant continue pour la topologie de la convergence uniforme.

La notion de solution faible considérée ici est un peu plus précise que celle introduite par Strook et Varadhan (cf. [StV-1], [StV-2] ou [Pri]).

Plus précisément, cette solution faible est une loi de probabilité R, ici appelée règle, définie sur $(D^{\mathbf{H}} \times \Omega)$ où $D^{\mathbf{H}}$ est l'espace des trajectoires cadlag possibles de X et Ω est l'espace sur lequel Z est défini : la loi marginale de R sur Ω est la probabilité P initialement donnée sur Ω. Cette notion de règle est définie à la section 3.

A la section 4, on établit une condition suffisante pour avoir la compacité séquentielle d'une famille de telles règles : ce théorème est une généralisation du théorème de Prokhoroff classique. A la section 7, on montre que cette condition suffisante est satisfaite pour l'ensemble des processus de la forme $\int Y\ dZ$, avec Y prévisible et borné en norme par 1.

A la section 6, on montre comment on peut passer des fonctions τ_s-continues (i.e. continues pour la topologie de Skorohod) aux fonctions τ_u-continues (i.e. continues pour la topologie de la convergence uniforme).

Il faut noter que l'argument central du théorème fondamental (section 9) est profondément différent de celui utilisé par Strook et Varadhan : en effet, on n'y utilise pas l'existence d'une solution d'un "problème de martingales".

Par ailleurs, le propos de cette étude n'est pas de donner les conditions et les hypothèses les plus générales possibles (cf. les remarques de la section 10) ; au contraire, on a cherché à prouver, "au plus vite et aux moindres frais" ce qui nous semble le résultat essentiel.

Enfin, quelques commentaires, historiques notamment, sont donnés à la section 11.

2. DONNEES ET NOTATIONS

Pour les définitions classiques telles que base stochastique, adapté, cadlag, variation quadratique, etc... on réfère à [MeP-2].

Pour toute cette étude on se donne :

- une base stochastique probabilisée $\mathbf{B}^I := (\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$, avec $T = [0, t_m]$, $t(m) := t_m < +\infty$; on suppose que cette base est complète et continue à droite ; elle sera appelée la base initiale ;
- deux espaces vectoriels de dimension finie $\mathbf{H}$ et $\mathbf{K}$; pour la commodité des notations, on suppose que la norme sur $\mathbf{H}$ est associée à un produit scalaire ; on notera $\mathbf{L}$ l'espace des opérateurs linéaires continus de $\mathbf{K}$ dans $\mathbf{H}$ et $\langle x,y \rangle$ le produit scalaire de x et y dans $\mathbf{H}$;
- une semi-martingale (cadlag) Z (au sens de [Mey-1]), à valeurs dans $\mathbf{K}$ et adaptée à la base initiale $\mathbf{B}^I$; ceci équivaut à dire (cf. [MeP-2]) qu'il existe un processus Q croissant, positif, cadlag, adapté à la base initiale $\mathbf{B}^I$ et qui possède les deux propriétés suivantes :

(2.1) Z est π^*-dominé par Q c'est à dire que, pour tout temps d'arrêt u et pour tout processus $\mathbf{B}^I$-prévisible Y à valeurs dans $\mathbf{L}$ ou dans le dual $\mathbf{K}'$ de $\mathbf{K}$, on a :

$$E\{\sup_{t<u} \| \int_{]0,t]} Y_s \, dZ_s \|^2\} \leq E\{Q_{u-} \int_{]0,u[} \|Y_s\|^2 \, d\, Q_s\}$$

(2.2) La variation de la variation quadratique $[Z]$ de Z est majorée par la variation de Q, c'est à dire que, pour s et t éléments de T, s < t, on a $\quad [Z]_t - [Z]_s \leq Q_t - Q_s \qquad$ (P-p.s.)

On introduit alors les notations suivantes :

- $D^{\mathbf{H}}$ est l'espace des fonctions cadlag définies sur T et à valeurs dans $\mathbf{H}$;
- τ_s (resp. τ_u) est la topologie de Skorohod comme définie dans [Bil] (resp. la topologie de la convergence uniforme) : ces deux topologies sont définies sur $D^{\mathbf{H}}$;
- $\mathcal{D}^{\mathbf{H}}_t$ est la σ-algèbre des sous-ensembles de $D^{\mathbf{H}}$ engendrée par les cylindres $\{f : f \in D^{\mathbf{H}},\ f(s) \in B\}$ où $s \leq t$ et B est un borélien de $\mathbf{H}$; on pose $\mathcal{D}^{\mathbf{H}} := \mathcal{D}^{\mathbf{H}}_{t(m)+} := \mathcal{D}^{\mathbf{H}}_{t(m)}$ et, pour $t < t(m)$, $\mathcal{D}^{\mathbf{H}}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{D}^{\mathbf{H}}_s$;
- $\mathbf{B}^{\mathbf{H}} := (D^{\mathbf{H}} \times \Omega, \mathcal{D}^{\mathbf{H}} \otimes \mathcal{F}, (\mathcal{D}^{\mathbf{H}}_{t+} \otimes \mathcal{F}_t)_{t \in T})$ et cette famille sera appelée la base canonique (sous entendu pour les processus à valeurs dans $\mathbf{H}$).
- $G^{\mathbf{R}}_t$ (resp. $G^{\mathbf{H}}_t$, $G^{\mathbf{L}}_t$) est l'ensemble des fonctions g à valeurs réelles (resp. à valeurs dans $\mathbf{H}$, dans $\mathbf{L}$) uniformément bornées, définies sur $(D^{\mathbf{H}} \times \Omega)$, $(\mathcal{D}^{\mathbf{H}}_{t+} \otimes \mathcal{F}_t)$-mesurables et telles que, pour tout élément ω de Ω, la fonction $f \rightsquigarrow g(f,\omega)$ est τ_s-continue sur $D^{\mathbf{H}}$;
- $G^{\mathbf{H}} := G^{\mathbf{H}}_{t(m)}$
- $\mathcal{E}^{\mathbf{L}}$ est l'ensemble des processus b à valeurs dans $\mathbf{L}$ définis sur la base canonique $\mathbf{B}^{\mathbf{H}}$, uniformément bornés en norme par 1 et qui sont de la forme :

$$b := \sum_{i=1}^{n-1} g_i\, 1_{]s(i),s(i+1)]}$$

où $(s(i))_{1 \leq i \leq n}$ est une famille croissante d'éléments de T et, pour chaque i, g_i appartient à $G^{\mathbf{L}}_{s(i)}$.

Autrement dit, b est un processus (à valeurs dans $\mathbf{L}$) $\mathbf{B}^{\mathbf{H}}$-prévisible étagé qui, pour tout élément (ω,t) de $(\Omega \times T)$, est τ_s-continu en tant que fonction définie sur $D^{\mathbf{H}}$.

On vérifie facilement que $\mathcal{E}^{\mathbf{L}}$ engendre la tribu des prévisibles de la base canonique $\mathbf{B}^{\mathbf{H}}$.

Pour la commodité des notations on supposera que $\Omega_{t(m)} = \Omega_{t(m)-}$.

3. CONVERGENCE EN REGLE

Définitions

On dira que R est une règle (sous-entendu définie sur $(D^{\mathbf{H}} \times \Omega, \mathcal{D}^{\mathbf{H}} \otimes \mathcal{F}, P)$) si R est une probabilité définie $(D^{\mathbf{H}} \times \Omega, \mathcal{D}^{\mathbf{H}} \otimes \mathcal{F})$ telle que, pour tout élément A de $\mathcal{F}$, $R(D^{\mathbf{H}} \times A) = P(A)$.

Soit $(R(n))_{n>o}$ une série de règles. On dira que cette suite converge en règle s'il existe une règle R telle que, pour tout élément g de $G^{\mathbf{R}}$, $E_R(g) = \lim_n . E_{R(n)}(g)$.
(évidemment, E_R désigne l'espérance mathématique par rapport à la probabilité R).

Soit X un processus cadlag à valeurs dans $\mathbf{H}$ et défini sur la base initiale $\mathbf{B}^I$; on appellera règle associée à X la règle définie par, quel que soit $(B \times F)$ élément de $(\mathcal{D}^{\mathbf{H}} \times \mathcal{F})$, $R(B \times F) := P(X^{-1}(B) \cap F)$ où X est donc considérée comme une fonction définie sur Ω et à valeurs dans $D^{\mathbf{H}}$.

Lemme

Soit $G_e^{\mathbf{R}}$ l'ensemble des fonctions g qui appartiennent à $G^{\mathbf{R}}$ et qui sont étagées au sens suivant :

(3.1) $g := \sum_{i \in I} g_i^*(f)\, g_i^{**}(\omega)$ où I est un ensemble fini et, pour tout élément i de I, g_i^* est une fonction réelle bornée définie et continue sur $D^{\mathbf{H}}$ et g_i^{**} appartient à $L^\infty_{\mathbf{R}}(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Soit $\mathcal{K}$ un τ_s-compact de $D^{\mathbf{H}}$. Alors, pour tout $\varepsilon > o$ et pour tout élément g de $G^{\mathbf{R}}$, il existe un élément $g_e^{\mathbf{R}}$ de G_e tel que

$$P\{\omega : \sup_{f \in \mathcal{K}} . |g_e(\omega, f) - g(\omega, f)| > \varepsilon\} \leq \varepsilon$$

Preuve :

Soit $\varepsilon > o$ et soit g un élément de $G^{\mathbf{R}}$. Puisque $D^{\mathbf{H}}$ est τ_s-séparable et que

$\mathcal{K}$ est un compact (dans l'espace polonais D^H) il existe une suite $(h_n)_{n>o}$ de fonctions réelles définies et τ_s-continues sur $\mathcal{K}$ qui est dense, pour la topologie de la convergence uniforme, dans l'ensemble des fonctions réelles définies et τ_s-continues sur $\mathcal{K}$ (théorème d'Ascoli-Arzelà). On pose :

$$A_n := \{\omega : \exists\ f \in \mathcal{K},\ \text{tel que } |g(f,\omega) - h_n(f,\omega)| > \varepsilon\}$$

$$B(n) := (\Omega \setminus A_n) \cap (\bigcap_{k<n} A_k)$$

$(B(n))_{n>o}$ est une partition de Ω ; pour tout $n > o$, soit ω_n un élément de $B(n)$. Soit j tel que $P(\bigcup_{n\leqslant j} B(n)) \geqslant 1-\varepsilon$. Il suffit de poser

$$g_e(f,\omega) := \sum_{n\leqslant j} 1_{B(n)}(\omega)\ g(f,\omega_n)$$

4. SEQUENTIELLE COMPACITE POUR LA CONVERGENCE EN REGLE

Théorème : Soit $(R^n)_{n>o}$ une suite de règles. Cette suite admet une sous-suite qui converge en règle vers une règle R si, pour tout $\varepsilon > o$, il existe un τ_s-compact $\mathcal{K}$ de D^H tel que, pour tout entier n, $R^n(\mathcal{K} \times \Omega) \geqslant 1-\varepsilon$.
Inversement, cette propriété est satisfaite si la suite $(R^n)_{n>o}$ converge en règle vers R.

Preuve :

1°) Ce théorème est évidemment une généralisation du théorème de Prokhoroff classique (cf. par exemple, [Bil]). Compte tenu de ce théorème et puisque la convergence en règle implique la convergence étroite des $R^n(\cdot \times \Omega)$, la condition indiquée est nécessaire. Montrons la réciproque.

2°) On pose $R' := \sum_{n>o} 2^{-n} R^n$; soit $\mathcal{F}^*$ une sous-tribu séparable de $\mathcal{F}$ telle que toutes les densités $\frac{dR^n}{dR'}$ soient mesurables par rapport à $(\mathcal{D}^H \otimes \mathcal{F}^*)$.
Soit $\mathcal{A}$ une algèbre dénombrable qui engendre $\mathcal{F}^*$.

3°) Pour chaque élément A de $\mathcal{A}$, soit $\bar{R}^n_A$ la mesure positive définie sur

$(D^{\mathbf{H}}, \mathcal{D}^{\mathbf{H}})$ par $\bar{R}^n_A(A') := R^n(A' \times A)$. Puisque $\bar{R}^n_A \leqslant \bar{R}^n_\Omega$, la suite $(\bar{R}^n_A)_{n>0}$ est tendue ; pour chaque élément A de $\mathcal{A}$, on peut donc appliquer le théorème de Prokhorov classique (cf. [Bil]) à la suite $(\bar{R}^n_A)_{n>0}$.
Compte tenu de la séparabilité de $\mathcal{A}$ et en utilisant la procédure diagonale, il existe une sous-suite $(R^{n(k)})_{k>0}$ extraite de la suite $(R^n)_{n>0}$ telle que, pour chaque élément A de $\mathcal{A}$, la suite $(\bar{R}^{n(k)}_A)_{k>0}$ converge faiblement vers une mesure positive $\bar{R}_A$ définie sur $(D^{\mathbf{H}}, \mathcal{D}^{\mathbf{H}})$ et telle que $\bar{R}_A(D^{\mathbf{H}}) = P(A)$.

4°) Pour chaque élément (A',A) de $(\mathcal{D}^{\mathbf{H}} \times \mathcal{A})$, on pose $R(A' \times A) := \bar{R}_A(A')$. On a $R(A' \times A) \leqslant R(D^{\mathbf{H}} \times A) = P(A)$. La fonction R est une fonction positive définie sur $(\mathcal{D}^{\mathbf{H}} \times \mathcal{A})$ et qui est σ-additive sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}^{\mathbf{H}}$ séparément. Cette fonction admet donc un prolongement unique en une fonction définie sur l'algèbre engendrée par les "rectangles" $(A' \times A)$ avec (A',A) élément de $(\mathcal{D}^{\mathbf{H}} \times \mathcal{F}^*)$: appelons encore R cette extension.

5°) Cette extension satisfait les deux propriétés suivantes :

(i) $R(A' \times A) \leqslant P(A)$ pour chaque élément (A',A) de $(\mathcal{D}^{\mathbf{H}} \times \mathcal{F}^*)$;

(ii) pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un compact $\mathcal{K}$ de $D^{\mathbf{H}}$ tel que $R((\Omega \setminus \mathcal{K}) \times A) \leqslant \varepsilon$ quel que soit l'élément A de $\mathcal{F}^*$.

Il peut alors être prouvé, <u>exactement</u> comme dans 3.5 de [Pel-1] ou dans 8.4 de [MeP-2] que R est σ-additive : ceci signifie que R admet un prolongement σ-additif unique à la tribu $(\mathcal{D}^{\mathbf{H}} \otimes \mathcal{F}^*)$. On appelle encore R ce prolongement.

6°) Pour tout élément A de $\mathcal{F}$, soit A^* élément de $\mathcal{F}^*$ tel que 1_{A^*} est la projection orthogonale de 1_A dans $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ sur $L^2(\Omega,\mathcal{F}^*,P)$. Pour tout élément A' de $\mathcal{D}^{\mathbf{H}}$, on pose $R(A' \times A) = R(A' \times A^*)$.
Pour toute fonction g réelle bornée et τ_s-continue sur $D^{\mathbf{H}}$ et tout élément A de $\mathcal{F}$, on a :

- d'une part $E_R(g\ 1_A) = E_R(g\ 1_{A^*})$ par construction de R
- d'autre part $E_{R^n}(g\ 1_A) = E_{R^n}(g\ 1_{A^*})$ puisque la densité de R^n est $(\mathcal{D}^{\mathbf{H}} \otimes \mathcal{F}^*)$-mesurable et que $E_{R'}(1_A \mid \mathcal{D}^{\mathbf{H}} \otimes \mathcal{F}^*) = 1_{A^*}$
- enfin $\lim\limits_{k\to\infty} E_{R^{(n(k)}}(g\ 1_{A^*}) = E_R(g\ 1_{A^*})$.

On a donc aussi $\quad E_R(g\ 1_A) = \lim\limits_{k\to\infty} E_{R^{n(k)}}(g\ 1_A)$

7°) Il suffit alors d'utiliser le lemme préliminaire pour voir que la sous-suite $(R^{n(k)})_{k>o}$ converge en règle vers la règle R.

5. PRELOCALISATION

Proposition

Soit $(R(n))_{n>o}$ une suite de règles qui converge en règle vers R.

Soit Φ une application de $(D^{\mathbf{H}} \times \Omega)$ dans $(D^{\mathbf{H}} \times \Omega)$ telle que

(i) Φ est $(\mathcal{D}^{\mathbf{H}} \otimes \mathcal{F})$-mesurable

(ii) pour tout élément A de $\mathcal{F}$, $\Phi^{-1}(D^{\mathbf{H}} \times A) = D^{\mathbf{H}} \times A$

(iii) pour tout $\varepsilon > o$, il existe un τ_s-compact $\mathcal{K}$ de $D^{\mathbf{H}}$ tel que, pour tout n, $R(n)(\Phi^{-1}(\mathcal{K} \times \Omega)) \geqslant 1-\varepsilon$

Soit R' (resp. R'(n)) la probabilité image de R (resp. R(n)) par Φ. Soit $\mathcal{G}$ la tribu de parties de $(D^{\mathbf{H}} \times \Omega)$ engendrée par les éléments h de $G^{\mathbf{H}}$ tels que $h \circ \Phi = h$. Alors, pour toute fonction g appartenant à $G^{\mathbf{H}}$ et $\mathcal{G}$-mesurable, on a $\lim\limits_{n\to\infty} E_{R'(n)}(g) = E_{R'}(g)$.

Un exemple important est le cas où Φ est l'arrêt "juste avant" un temps d'arrêt u par rapport à la base canonique $\mathbf{B}^{\mathbf{H}}$, c'est à dire que :

$\Phi((f,\omega)) = (f^u,\omega)$ où f^u est défini par :

$$f^u(t) := \begin{cases} f(t) & \text{si } t < u(f,\omega) \\ \lim\limits_{t\uparrow u(f,\omega)} . f(t) & \text{si } t \geqslant u(f,\omega) \end{cases}$$

Preuve :

Les conditions (ii) et (iii) montrent qu'on peut appliquer le théorème de la section 4 à la suite $(R'(n))_{n>o}$; cette suite $(R'(n))_{n>o}$ admet donc une sous-suite qui converge en règle vers une règle R" ; si h appartient à G .

et est telle que $h \circ \Phi = h$, on a

$$E_{R'}(h) = \lim_{n\to\infty}.E_{R'(n)}(h) = E_{R''}(h)$$

donc R' et R" coïncident en restriction à $\mathcal{G}$ d'où le résultat.

Ceci montre notamment que la convergence en règle se prête très bien à la prélocalisation.

6. CAS DES FONCTIONS τ_u-CONTINUES

Rappelons que les topologies τ_u et τ_s sont définies à la section 2.

Théorème : Soit g une fonction, à valeurs dans un espace vectoriel $\mathbf{J}$ de dimension finie, définie sur $(D^{\mathbf{H}} \times \Omega)$, uniformément bornée, $(\mathcal{D}^{\mathbf{H}} \otimes \mathcal{F})$-mesurable et telle que, pour tout élément ω de Ω, $g(.,\omega)$ est τ_u-continue.

1°) Soit $\mathcal{K}$ un élément de $(\mathcal{D}^{\mathbf{H}} \otimes \mathcal{F})$ tel que, pour tout élément ω de Ω, $\{f : (f,\omega) \in \mathcal{K}\}$ est un compact de $D^{\mathbf{H}}$ pour la topologie τ_u. Alors, pour tout $\varepsilon > o$, il existe une fonction g_s, à valeurs dans $\mathbf{J}$, $(\mathcal{D}^{\mathbf{H}} \otimes \mathcal{F})$-mesurable telle que, pour tout élément ω de Ω, $g_s(.,\omega)$ est τ_s-continue et telle que $\sup_{(f,\omega)\in\mathcal{K}}. ||g(f,\omega)-g_s(f,\omega)|| \leq \varepsilon$

2°) Soit $(R(n))_{n>o}$ une suite de règles qui converge en règle vers la règle R. On suppose que pour tout $\varepsilon > o$ il existe un élément $\mathcal{K}_\varepsilon$ de $(\mathcal{D}^{\mathbf{H}} \otimes \mathcal{F})$ tel que, pour tout élément ω de Ω, $\{f : (f,\omega) \in \mathcal{K}_\varepsilon\}$ est un τ_u-compact de $D^{\mathbf{H}}$, et tel que, pour tout entier n, $R(n)(\mathcal{K}_\varepsilon) \geq 1-\varepsilon$. Alors, $\lim_{n}. E_{R(n)}(g) = E_R(g)$.

Preuve :

1°) Il suffit de considérer le cas où g est une fonction réelle telle que $o \leq g \leq 1$. Soit $\varepsilon > o$ et n tel que $n\,\varepsilon \geq 1 \geq (n-1)\,\varepsilon$. Pour tout entier k, $k \leq n$, on pose :

$A(k) := \{(f,\omega) : k\,\varepsilon \leq g(f,\omega)\} \cap \mathcal{K}$

$A'(k) := \{(f,\omega) : k\varepsilon \geq g(f,\omega)\} \cap \mathcal{K}$

Pour ω fixé, soit $A(k)(\omega) := \{f : (f,\omega) \in A(k)\}$ et de même pour $A'(k)(\omega)$; $A(k+1)(\omega)$ et $A'(k)(\omega)$ sont des τ_u-compacts et donc des τ_s-compacts disjoints.

Pour tout k, soit Φ_k et Φ'_k les fonctions définies par (quel que soit $\omega \in \Omega$) :

$\Phi_k(f,\omega)$:= distance de Skorohod de f à $A(k)(\omega)$

$\Phi'_k(f,\omega)$:= distance de Skorohod de f à $A'(k)(\omega)$

On vérifie que Φ_k et Φ'_k sont des fonctions $(\mathcal{F} \times \mathcal{D}^{\mathbf{H}})$-mesurables (cf. [JaM-2], lemme 2.12). Soit g la fonction définie par :

$$g_s = \sup_{k<n}.\{(k+1)\varepsilon \wedge (\Phi'_k/\Phi_{k+1})\}$$

On vérifie immédiatement que g_s satisfait les propriétés données dans l'énoncé de la proposition.

2°) Soit $\varepsilon > o$, $\mathcal{K}_\varepsilon$ associé puis g_s associé comme au 1°) ci-dessus. Soit $\alpha = \sup_{f,\omega}.|g(f,\omega)|$. On a

$$|(E_R - E_{R(n)})(g)| \leq 2\alpha\,\varepsilon + |(E_R - E_{R(n)})(g_s)|$$

et cette deuxième quantité tend vers zéro avec n (convergence en règle).

7. CRITERE DE COMPACITE

Théorème : Soit Q' le processus positif croissant adapté à la base stochastique $\mathbf{B}^I$ défini par $Q' := \alpha Q$. Soit $\mathcal{C}(Q')$ l'ensemble des processus X cadlag à valeurs dans $\mathbf{H}$ et tels que :

(i) $X_o = o$ et X est adapté à la base $\mathbf{B}^I$

(ii) la "variation quadratique" $[X]$ de X est telle que $[X]_t - [X]_s \leq Q'_t - Q'_s$ pour $s < t$

(iii) pour chaque temps d'arrêt u et pour chaque processus Y à valeurs dans $\mathbf{H}$ prévisible et uniformément borné, on a :

$$E\{\sup_{t<u} \left\|\int_{]o,t]} <Y,dX>\right\|^2\} \leqslant E\{Q'_{u-} \int_{]o,u[} \|Y_t\|^2 \, dQ_t\}$$

(iv) pour tout couple (u,v) de temps d'arrêt avec $u \leqslant v$, on a :

$$E\{\sup_{t<v} \|X_t - X_u\|^2\} \leqslant E\{Q'_{v-}(Q'_{v-} - Q'_u) \, 1_{[u<v]}\}$$

Soit $(q_j)_{j>o}$ une suite croissante de réels positifs telle que, pour tout entier j,

$$P\left[Q'_{t(m)} \geqslant q_j\right] \leqslant \frac{1}{j^2}$$

et soit $(v_j)_{j>o}$ la suite associée de temps d'arrêt définis par

$v_j := \inf. \{t : Q'_t > q_j\}$

Pour tout couple (j,k) d'entiers, soit $(w(n,j,k))_{n>o}$ la suite de temps d'arrêt définie par récurrence par :

$w(1,j,k) := v_{j-1}$

$w(n+1,j,k) := v_j \wedge \inf. \{t := Q'_t - Q'_{w(n,j,k)} > \frac{1}{k^3} q_j\}$

(notons que $w(k^3,j,k) = v_j$).

On pose $\lambda_{j,k} := \left[\frac{1}{k} \; j^2 \; q_j^2 (2 + 8q_j^2)\right]^{1/4}$.

Pour tout entier m, soit $\mathcal{K}'_m$ l'ensemble des éléments (f,ω) de $(D^{\mathbf{H}} \times \Omega)$ tels que :

(i)' pour tout triplet d'entiers (n,j,k) avec $n > o$, $j \leqslant m$ et $k \geqslant m$ et pour tout élément t de $]w(n,j,k)(\omega), w(n+1,j,k)(\omega)[$, on a :

$$|f_t - f_{w(n,j,k)(\omega)}| \leqslant \lambda_{j,k}$$

(ii)' $\sup_{t<v_m(\omega)} |f_t| \leqslant m \, q_m$

Soit $\varepsilon_m := \sum_{k\geq m} \frac{1}{k^2}$.

Alors, pour tout élément X de $\mathcal{C}(Q')$, on a :

$$P(\{\omega : (X(\omega),\omega)\in \mathcal{K}'_m\}) \geq 1-3\varepsilon_m$$

De plus, il existe un τ_s-compact $\mathcal{K}_m$ de $D^{\mathbf{H}}$ tel que

$$P(\{\omega : \exists\ f\notin \mathcal{K}_m \text{ avec } (f,\omega)\in \mathcal{K}'_m\}) \leq 3\varepsilon_m$$

On a donc aussi, pour tout élément X de $\mathcal{C}(Q')$,

$$P(X^{-1}(\mathcal{K}_m)) \geq 1-6\varepsilon_m$$

<u>Preuve</u> :

On pose $\mathcal{C} := \mathcal{C}(Q')$ et on notera $x^2 := <x,x>$

1°) Soit X un élément de $\mathcal{C}$; la propriété (iii) implique que l'on a la formule de Ito. Soit (u,v) un couple de temps d'arrêt avec $u \leq v$. On pose :

$$\beta := E\{\sup_{u<t<v} |X_t-X_u|^4\}$$

Puisque (formule de Ito)

$$(X_t-X_u)^2 = 2\int_{]u,t]} <X_{s-} - X_u, dX_s> + [X]_t - [X]_u$$

On a :

$$\beta \leq 2\,E\{\sup_{t<v} ||\int_{]u,t]} 2<X_{s-} - X_u, dX_s>||^2\}$$

$$+ 2\,E\{([X]_{v-} - [X]_u)^2\, 1_{[u<v]}\}$$

$$\leq 8\,E\{Q'_{v-}\int_{]u,v[} (X_{s-}-X_u)^2\, dQ'_s\}$$

$$+ 2\,E\{(Q'_{v-} - Q'_u)^2\, 1_{[u<v]}\}$$

Soit $\alpha \geq o$ et $q \geq o$. On suppose que, pour tout élément ω de Ω, on a $Q'_{v-} \leq q$ et $Q'_{v-} - Q'_u \leq \alpha$. Dans ce cas on a :

$$\beta \leq 8\alpha\, q\, E\,\{ \sup_{u<t<v} (X_t - X_u)^2 \} + 2\alpha^2$$

Mais

$$E\,\{ \sup_{u<t<v} (X_t - X_u)^2 \} \leq E\,\{Q'_{v-}(Q'_{v-} - Q'_u)\ 1_{[u<v]}\}$$

(propriété (iv))

ce qui donne $\quad \beta \leq \alpha^2 (2 + 8q^2)$

Notons au passage que le point important dans cette majoration est le fait que β/α tende vers zéro quand α tend vers zéro.

2°) Soit X un élément de $\mathcal{E}$ et (j,k) un couple d'entiers ; ce couple d'entiers étant fixé au cours de ce 2°), pour alléger les notations, on pose, pour tout entier n, $u(n) := w(n,j,k)$.

Compte tenu du 1°) qui précède et de la définition de $w(n+1,j,k)$, on a :

$$E\,\{ \sup_{u(n)<t<u(n+1)} |X_t - X_{u(n)}|^4 \} \leq \frac{1}{k^6}\, q_j^2\ (2 + 8q_j^2)$$

ce qui implique

$$P\,\{ \sup_{u(n)<t<u(n+1)} |X_t - X_{u(n)}| > \lambda_{j,k} \} \leq \frac{1}{k^5\, j^2}$$

On définit alors l'ensemble $B_{j,k}$ comme suit :

$$B_{j,k} := \{\omega : \exists\, n \leq k^3 \ \text{ tel que } \sup_{u(n)<t<u(n+1)} |X_t - X_{u(n)}| > \lambda_{j,k}\}$$

Puisque $u(k^3) = v_j$, on a

$$B_{j,k} = \{\omega : \exists\, n > o \ \text{ avec } \sup_{u(n)<t<u(n+1)} |X_t - X_{u(n)}| > \lambda_{j,k}\}$$

L'inégalité ci-dessus implique que $P(B_{j,k}) \leq \dfrac{1}{j^2\, k^2}$.

3°) Le couple (j,k) n'est plus fixé, mais X est un élément fixé de $\mathcal{C}$.

On pose :

$$C'_m := \{\omega : \underbrace{\sup.}_{t<v_m(\omega)} |X_t(\omega)| > m\, q_m\}$$

On a (propriété (iv)) :

$$E\{\sup_{t<v_m} |X_t|^2\} \leq E(Q'_{v_m-}) \leq q_m^2 \qquad \text{donc}$$

$$P(C'_m) \leq \frac{1}{m^2}$$

Soit ω un élément de Ω tel que $(X(\omega),\omega)$ n'appartienne pas à $\mathcal{K}'_m$; ceci implique :

- soit $\omega \in C'_m$
- soit $\omega \in \bigcup_{j>o} \bigcup_{k\geq m} B_{j,k}$

La probabilité de cette éventualité est donc majorée par

$$\frac{1}{m^2} + \sum_{j>o} \sum_{k\geq m} \frac{1}{j^2\, k^2} \leq 3\, \varepsilon_m$$

ce qui prouve la première inégalité du théorème.

4°) On va maintenant définir $\mathcal{K}_m$. Pour tout triplet d'entiers (n,j,k) avec $n \leq k^3$, soit $\rho(n,j,k) > o$ tel que

$$P(\{w(n+1,j,k)-w(n,j,k) \leq \rho(n,j,k) \text{ et } w(n,j,k) < v_j\} \leq \frac{1}{j^2\, k^5}$$

Soit $\delta_{m,k} := \inf_{n\leq k^3,\, j\leq m}. \rho(n,j,k)$.

Soit $\mathcal{K}_m$ l'ensemble des éléments f de $D^{\mathbf{H}}$ tels que $\sup_t. |f_t| \leq m\, q_m$ et, pour tout eniter $k \geq m$, $w'_f(\delta_{m,k}) \leq \lambda_{m,k}$ où $w'_f(\delta)$ est défini comme en 14.6, p. 110 de [Bil] (module de continuité à droite de la fonction f).

Cet ensemble $\mathcal{K}_m$ est un sous-ensemble τ_s-compact de $D^{\mathbf{H}}$ (cf. [Bil], théorème 14.3).

On pose alors :

$C_m := \{\omega : v_m(\omega) < t_m\}$ et

$A_{j,k} := \{\omega : \exists\ n \leq k^3$ tel que $w(n,j,k) < v_j$ et

$(w(n+1,j,k)-w(n,j,k))(\omega) < \rho_{n,j,k}\}$

On a $P(C_m) \leq \frac{1}{m^2}$ (par définition de v_j) et

$P(A_{j,k}) \leq \frac{1}{j^2 k^2}$ (par définition de $\rho_{n,j,k}$).

Enfin, si (f,ω) appartient à $\mathcal{K}'_m$ et si f n'appartient pas à $\mathcal{K}_m$. on a :

- soit $\omega \in C_m$
- soit $\omega \in \bigcup_{j\leq m} \bigcup_{k\geq m} A_{j,k}$

La probabilité de cette éventualité est donc majorée par

$$\frac{1}{m^2} + \sum_{j\leq m} \sum_{k\geq m} \frac{1}{j^2 k^2} \leq 3\varepsilon_m$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarque :

Soit Y un processus à valeurs dans $\mathbf{L}$, prévisible par rapport à la base initiale $\mathbf{B}^I$ et uniformément borné par α ; soit X le processus défini par $X_t := \int_{]o,t]} Y\, dZ$.

Alors X appartient à $\mathcal{C}(Q')$ comme défini dans le théorème ci-dessus (vérification immédiate à partir des propriétés 2.1 et 2.2).

8. HYPOTHESES ET APPROXIMATIONS POUR LA FONCTIONNELLE a

Rappelons que le but essentiel de cette étude est de prouver le théorème de la section 9 ci-après, c'est à dire de prouver l'existence d'une solution "faible" X de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t(\omega) = a(X,\omega,t)\ dZ_t(\omega)$$

Les hypothèses sur la fonctionnelle a sont alors les suivantes :

1°) a peut être considéré comme un processus à valeurs dans $\mathbf{L}$, défini et prévisible par rapport à la base canonique $\mathbf{B}^{\mathbf{H}}$.

2°) a est uniformément borné en norme par α .

3°) Pour tout élément (ω,t) de $(\Omega \times T)$, l'application $f \leadsto a(f,\omega,t)$ est τ_u-continue.

Notons que la propriété 2°) implique la propriété suivante (cf. proposition 6.4 de [MeP-2]).

4°) Pour tout élément (ω,t) de $(\Omega \times T)$, si f et f' sont deux éléments de $D^{\mathbf{H}}$ tels que $f(s) = f'(s)$ pour $s < t$, on a $a(f,\omega,t) = a(f',\omega,t)$ (c'est à dire que a ne dépend que du passé strict en tant que fonction de f).

On peut alors approcher a de la façon suivante :

<u>Proposition</u> :

Soit a satisfaisant aux hypothèses ci-dessus. Soit $(w(n,j,k))$ la famille de temps d'arrêt définis dans la section 7. Pour tout entier $k > o$ et pour tout élément (f,ω) de $(D^{\mathbf{H}} \times \Omega)$, on pose :

$$f_k(\omega) := \sum_{n,j} f(w(n,j,k)(\omega))\ 1_{[w(n,j,k),w(n+1,j,k)[}$$

Ensuite, pour tout entier k, on pose :

$$a_k(f,\omega,t) = a(f_k(\omega),\omega,t)$$

Alors, la suite de processus $(a_k)_{k>o}$ est une suite de processus $\mathbf{B}^{\mathbf{H}}$-prévisibles, uniformément bornés par α, τ_u-continus et constants par morceaux en tant que fonctions de la première variable et cette suite converge vers a au sens suivant :

(8.1) quel que soit (m,ω,t) élément de $(\mathbb{N}\times\Omega\times T)$ avec $t < v_m(\omega)$

$$\lim_{k\to\infty} \{ \sup_{f\in\mathcal{K}'_m(\omega)} \|a_k(f,\omega,t)-a(f,\omega,t)\|\} = 0$$

où v_m et $\mathcal{K}'_m$ sont définis comme à la section 7 et

$$\mathcal{K}'_m(\omega) := \{f : (f,\omega)\in \mathcal{K}'_m\}$$

<u>Preuve</u> :

On suppose que m, ω et t sont fixés avec $t < v_m(\omega)$.

On sait que, si (f,ω) appartient à $\mathcal{K}'_m$, l'oscillation de f entre $w(n,j,k)$ et $w(n+1,j,k)$ pour $j \leq m$ et $k \geq m$ est inférieure à $\lambda_{j,k}$; on a donc, $\sup_t \|f_k(t)-f(t)\| \leq \lambda_{m,k}$; de plus, si on pose $S_m(\omega) := \{f : (f,\omega)\in\mathcal{K}'_m$ et $f = f\, 1_{[o,v_m(\omega)[}\}$, la propriété ci-dessus montre que $S_m(\omega)$ est compact pour la topologie de la convergence uniforme ; en restriction à $S_m(\omega)$, l'application $f \leadsto a(f,\omega,t)$ est donc uniformément continue ce qui achève la preuve de la proposition (puisque $\lim_{k\to\infty} \lambda_{m,k} = o$ et que (f_k,ω) appartient à $\mathcal{K}'_m$).

9. THEOREME FONDAMENTAL

On considère les hypothèses et notations introduites aux sections 2 et 8. Pour tout élément (f,ω,t) de $(D^{\mathbf{H}}\times\Omega\times T)$, on pose $\overline{Z}_t(f,\omega) := Z_t(\omega)$, $\overline{X}_t(f,\omega) := f(t)$ (processus canonique) et $\overline{Q}_t(f,\omega) := Q_t(\omega)$.

Alors, il existe une probabilité R sur $(D^{\mathbf{H}}\times\Omega,\mathcal{D}^{\mathbf{H}}\otimes\mathcal{F})$ telle que

(i) pour tout élément A de $\mathcal{F}$, $R(D^{\mathbf{H}}\times A) = P(A)$ (c'est à dire que R est une règle) ;

(ii) il existe une suite $(X^n)_{n>o}$ de processus telle que si, pour tout n, R(n) est la règle associée à X^n, alors R est la limite en règle de la suite $(R(n))_{n>o}$;

(iii) pour la probabilité R, $\overline{Z}$ est une semi-martingale.

(iv) pour la probabilité R, on a :

$$\overline{X}_t = \int_{]o,t]} a(\overline{X},\omega,s)\,d\overline{Z}_s$$

cette intégrale étant une intégrale stochastique au sens usuel.

Autrement dit, $\overline{X}$ est une "solution faible" de l'équation différentielle stochastique $dX := a(X)dZ$ en un sens un peu plus précis que celui introduit par Strook et Varadhan (voir [StV-1], [StV-2] ou [Pri]). En général, une telle probabilité R n'est pas unique.

<u>Preuve</u> :

1°) Soit $(a_k)_{k>o}$ la suite de processus $\mathbf{B}^{\mathbf{H}}$-prévisibles définie à la section 8. Pour tout élément ω de Ω, $a_k(f,\omega,t)$ est "constant par morceaux" en tant que fonction de la variable f ; on définit donc, par trajectoires, un processus (unique) X^k qui est solution (forte) de l'équation différentielle (stochastique) $dX_t^k = a_k(X^k(\omega),\omega,t)\ dZ_t(\omega)$; ce processus X^k est à valeurs dans $\mathbf{H}$, cadlag et adapté à la base initiale $\mathbf{B}^I$. Pour tout k, soit R(k) la règle associée à X^k (cf. la section 3). On se propose maintenant de montrer qu'une sous-suite extraite de la suite $(R(k))_{k>o}$ converge en règle vers une règle qui satisfait aux conditions données dans le théorème.

2°) Par construction, X^k est de la forme $X^k = \int Y\,dZ$ avec $\sup_{\omega,t} |Y_t(\omega)| \leq \alpha$. Compte tenu de la remarque donnée à la fin de la section 7, X^k appartient à $\mathcal{C}(Q')$ (avec $Q' := \alpha\, Q$) ; on peut donc appliquer le théorème de la section 7 : notamment, pour tout $\varepsilon > o$, il existe un τ_s-compact $\mathcal{K}_\varepsilon$ de $D^{\mathbf{H}}$ tel que, pour tout entier $k > o$, $P\left|(X^k)^{-1}(\mathcal{K}_\varepsilon)\right| \geq 1-\varepsilon$.

On peut alors appliquer le théorème de la section 4, c'est à dire qu'il existe une sous-suite de la suite $(R(k))_{k>o}$ qui converge en règle vers une règle R. Pour la commodité des notations, on supposera que c'est la suite $(R(k))_{k>o}$ elle-même qui converge vers R.

3°) Pour toute la suite on se donne $q > o$ et un temps d'arrêt v par rapport à la base initiale $\mathbf{B}^I$ tel que $\sup_{\omega} Q_{v-}(\omega) \leq q$ et on pose $V =]o,v[$.

Soit (g,b) un élément de $(G^{\mathbf{H}} \times \mathcal{E}^{\mathbf{L}})$ tel que $\sup_{f,\omega} ||g(f,\omega)|| \leq 1$

(rappelons que $\sup_{f,\omega,t} ||b(f,\omega,t)|| \leq 1$)

Pour tout entier k, on a :

$$|E_{R(k)} \{< g, \int_V b(\overline{X}(\omega),\omega,t)\ d\overline{Z}_t(\omega)>\}|$$

(inégalité de Schwarz)

$$\leq \text{ norme dans } L^2_{\mathbf{H}}(\Omega,\mathcal{F},P) \text{ de } \int b(X^k,.,t)\ dZ_t$$

(propriété 2.1)

$$(9,1) \qquad \leq \{q\ E_{R(k)}\ \{\int_V ||b(X,.,t)||^2\ dQ_t\}\}^{1/2}$$

$$\leq q$$

4°) Pour tout élément ω de Ω, $\mathcal{K}'_m(\omega)$ est un τ_u-compact : on peut donc utiliser le 2°) de la proposition de la section 6 ; la convergence en règle de $(R(k))_{k>o}$ vers R, la définition de b et celle de g impliquent alors que l'on a la même inégalité pour R, soit

$$|E_R \{< g, \int_V b(\overline{X},.,t)\ d\overline{Z}_t>\}|$$

$$(9.2) \qquad \leq \left[q\ E_R\ \{\int_V ||b(\overline{X},.,t)||^2\ d\overline{Q}_t\}\right]^{1/2}$$

$$\leq q$$

L'ensemble des éléments g de $G^{\mathbf{H}}$ étant dense dans $L^{\infty}_{\mathbf{H}}(D^{\mathbf{H}} \times \Omega, \mathcal{D}^{\mathbf{H}} \otimes \mathcal{F}, R)$, cette inégalité s'écrit aussi :

$$\text{norme dans } L^1_{\mathbf{H}}(D^{\mathbf{H}} \times \Omega, \mathcal{D}^{\mathbf{H}} \otimes \mathcal{F}, R) \text{ de } (\int_V b(\overline{X},.,t)\ d\overline{Z}_t) \leq q$$

Or l'ensemble des "processus" b qui appartiennent à $\mathcal{E}^{\mathbf{L}}$ est dense dans l'ensemble des processus $\mathbf{B}^{\mathbf{H}}$-prévisibles (à valeurs dans $\mathbf{L}$). Ceci implique que l'ensemble $\{z : z = \int b\ d\overline{Z}\}$, quand b parcourt l'ensemble des processus $\mathbf{B}^{\mathbf{H}}$-prévisibles bornés, étagés, est borné dans $L^0_{\mathbf{H}}(D^{\mathbf{H}} \times \Omega, \mathcal{D}^{\mathbf{H}} \otimes \mathcal{F}, R)$, c'est à dire que $\overline{Z}$ est une semi-martingale (théorème de Dellacherie-Meyer-Mokobodski : cf. théorème 2 de [Del] ou théorème VIII.4 de [DeM] ou théorème 12.12 de [MeP-2]).

En fait, le lecteur qui connaît la construction vectorielle de l'intégrale stochastique a noté que l'on n'a pas besoin de ce théorème D.M.M. : on a prouvé un peu plus, à savoir que le processus $\overline{Z}$ arrêté "juste avant v" est associé à une L^1-mesure stochastique (théorème 12.7 de [MeP-2]) ; autrement dit ce processus appartient à H^1 au sens de [Mey-2].

5°) Puisque Z (resp. $\overline{Z}$) est une semi-martingale pour P (resp. R), les inégalités (9.1) et (9.2) sont valables pour tout processus prévisible borné b.

Soit $\varepsilon > o$ et soit b un processus $\mathbf{B}^{\mathbf{H}}$-prévisible borné (en norme) par 2α. Soit m un entier tel que $\varepsilon_m \leq \frac{1}{\alpha}$ où ε_m est défini comme à la section 7. Rappelons que $\mathcal{K}'_m$ a été défini à la section 7 et que l'on a posé (à la section 8), $\mathcal{K}'_m(\omega) := \{f : (f,\omega) \in \mathcal{K}'_m\}$.

On pose :

$$(9.3) \qquad b_m(\omega,t) := \sup_{f \in \mathcal{K}'_m(\omega)} ||b(f,\omega,t)||$$

et

$$(9.4) \qquad \mu := \left[4\, q^2\alpha^2\, \varepsilon_m + q\, E_P\, \{ \int_V b_m^2(\omega,t)\; dQ_t(\omega) \}\right]^{1/2}$$

En se souvenant que $R(k)(\mathcal{K}'_m) \geq 1-\varepsilon_m$ et que $R(\mathcal{K}'_m) \geq 1-\varepsilon_m$, les inégalités (9.1) et (9.2) impliquent alors :

$$(9.5) \qquad |E_{R(k)}\, \{< g, \int_V b(\overline{X})\; d\overline{Z}>\}| \leq \mu$$

et

$$(9.6) \qquad |E_R\, \{< g, \int_V b(\overline{X})\; d\overline{Z}>\}| \leq \mu$$

6°) On pose :

$$\beta(1,n,k) := E_R\, \{< g, \int_V [a(\overline{X})-a_n(\overline{X})]\; d\overline{Z}>\}$$

$$\beta(2,n,k) := [E_R - E_{R(n+k)}]\, \{< g, \int_V a_n(\overline{X})\; d\overline{Z}>\}$$

$$\beta(3,n,k) := E_{R(n+k)} \{< g, \int_V (a_n - a_{n+k})(\bar{x})\ d\bar{Z} >\}$$

$$\beta(4,n,k) := \left[E_{R(n+k)} - E_R\right] \{< g, \bar{X}_{V-} >\}$$

$$\gamma(V,g) := E_R \{< g, \int_V a(\bar{X})\ d\bar{Z} - \bar{X}_{V-} >\}$$

Puisque $E_{R(n+k)} \{< g, \bar{X}_{V-} - \int_V a_{n+k}(\bar{X})\ d\bar{Z} >\} = 0$

(par construction de X^{n+k}), on a :

$$\sum_{j=1}^{4} \beta(j,n,k) = \gamma(V,g)$$

7°) On se propose maintenant de prouver que $\gamma(V,g) = 0$. Pour cela, il suffit de prouver que, quel que soit j, $\lim_{n,k} \beta(j,n,k) \leqslant 2\varepsilon$.

Or, $\lim_{n} \beta(1,n,k) \leqslant \varepsilon$ compte tenu de l'inégalité (9.6) et de la propriété (8.1). De même, il existe n' tel que, quel que soit k,

$\beta(3,n',k) \leqslant 2\varepsilon$

(propriété (8.1) et inégalité (9.5)).

Par ailleurs, n' étant fixé, la convergence en règle implique que $\lim_{k\to\infty} \beta(2,n',k) = 0$ (pour n' fixé, $a_{n'}$ est un processus "étagé").

Enfin on a $\lim_{n,k} \beta(4,n,k) = 0$ (convergence en règle)

soit, $\gamma(V,g) = 0$.

8°) L'ensemble $G^{\mathbf{H}}$ étant dense dans $L^{\infty}_{\mathbf{H}}(D^{\mathbf{H}} \times \Omega, \mathcal{D}^{\mathbf{H}} \times \mathcal{F}, R)$, on a aussi

$\bar{X}_{V-} = \int_V a(\bar{X})\ d\bar{Z}$ R-p.s.

ce qui implique $\bar{X} = \int a(\bar{X})\ d\bar{Z}$

à la R-indistingabilité près.

10. REMARQUES

Pour simplifier l'exposition, on n'a pas cherché, dans ce papier, à donner les hypothèses les plus générales ; bien entendu, il serait possible de généraliser le théorème de la section 9 de multiples façons ; donnons-en quelques exemples.

1°) Meyer a considéré l'équation $dX = dV + b(X)\,dZ$ où V est un processus cadlag adapté (notamment V peut correspondre aux conditions initiales). Dans ce cas, Jacod et Ménin ont noté qu'on peut se ramener à l'équation ici considérée en posant $\bar{X} = X-V$ et $a(\bar{X}) = b(\bar{X}+V)$; précisons que, suivant les cas, il peut y avoir intérêt à effectuer ce changement de variable avant, ou après l'introduction de la notion de règle (et donc de solution faible).

2°) Jacod et Mémin ont remarqué que la propriété (ii) dans le théorème 9 impliquait la conservation de la martingalité (pour une martingale M quelconque) et des "caractéristiques locales" de Z ; précisons que cette propriété (ii) implique en fait beaucoup plus : notamment, elle implique la conservation des "caractéristiques locales" de n'importe quel processus défini sur la base initiale.

Toutes ces propriétés se vérifient facilement ; par exemple, $\bar{M}$ est une martingale si et seulement si

$$(10.1)\qquad E_R\{< g, \int_{]s,t]} Y\, d\bar{M} >\} = 0 \quad \text{pour tout processus prévisible } Y$$

et pour tout élément g de $G_s^{\mathbf{H}}$; si $\bar{M}(f,\omega) = M(\omega)$ où M est une martingale par rapport à la base initiale $\mathbf{B}^I$, l'égalité 10.1 se vérifie immédiatement pour tout processus Y appartenant à $\mathcal{E}^L$ et donc pour tout processus prévisible borné Y (comme dans la preuve du théorème 9).

3°) Au niveau des applications, il est très rare que le processus a soit uniformément borné ; il y a lieu de considérer la notion de solution maximale introduite dans [MeP-1] (cf. aussi [MeP-2]) et donc d'utiliser la proposition de la section 5 ; dans [MeP-2], la construction de la solution maximale utilise l'unicité des solutions locales ; en fait, on peut se passer de l'unicité en utilisant l'axiome du choix (cf. [MeP-1]), comme dans le cas déterministe.

4°) Le fait que $\mathbf{H}$ soit un espace de dimension finie semble jouer un rôle fondamental ; par contre, les méthodes ici proposées, qui reposent sur la propriété de π^*-domination, peuvent être étendues au cas où Z est à valeurs dans un espace de Banach.

11. COMMENTAIRES

Il nous semble utile d'apporter quelques précisions "historiques" :

a) L'introduction de la notion de convergence en règle pour étudier l'existence d'une solution "faible" d'une équation différentielle stochastique est due à l'auteur ; des notions analogues, quoique moins précises, avaient été introduites précédemment pour des problèmes complètement différents (cf. [Ren-1], [Ren-2], [Sch], etc...) cf. aussi dans un cadre différent et beaucoup plus restrictif [BaC] et [Mey-2].

b) Aux détails près et sauf en ce qui concerne l'utilisation du lemme de la section 3 et du théorème de la section 6, les preuves données dans ce papier sont à peu près les mêmes que celles données par l'auteur dans [Pel-5]. Par contre, dans [Pel-5], le processus a était supposé remplir une condition de continuité pour la topologie de Skorohod, ce qui n'était pas satisfaisant.

c) Le preprint [JaM-1] dont je dispose (et qui comporte quelques inexactitudes) apporte plusieurs améliorations à [Pel-5], notamment le lemme de la section 3 et surtout le théorème de la section 6 - ce lemme et ce théorème étant d'ailleurs présentés assez différemment dans [JaM-1]. Le théorème de la section 6 est fondamental parce qu'il permet de remplacer la continuité pour la topologie de Skorohod par la continuité pour la topologie de la convergence uniforme, ce qui est beaucoup plus satisfaisant à tous points de vue.

Malheureusement, [JaM-1] n'utilise pas la méthodologie introduite dans [Pel-5] et reprise ici ; plus précisément, [JaM-1] utilise fondamentalement la notion de "caractéristiques locales" et la notion de "solution du problème des martingales", c'est à dire un arsenal technique énorme (cf. [Jac]) parfaitement inutile dans notre contexte et probablement non généralisable au cas où Z est à valeurs dans un espace de Banach.

BIBLIOGRAPHIE

[Ald] D.J. ALDOUS, *Limit theorems for subsequences of arbitrarily-dependent sequences of random variables*, Z. für Wahr. 40, 59-82, 1977.

[AlE] D.J. ALDOUS, G.K. EAGLESON, *On mixing and stability of limit theorems*, Annals of Probab. 6, 325-331, 1978.

[BaC] J.R. BAXTER, R.V. CHACON, *Compactness of stopping times*, Z. für Wahr. 40, 169-182, 1977.

[Bil] P. BILLINGSLEY, *Convergence of probability measures*, Wiley and sons, New-York, 1968.

[Del-1] C. DELLACHERIE, *Un survol de la theorie de l'intégrale stochastique*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Helsinki, 1978.

[Del-2] C. DELLACHERIE, *Convergence en probabilité et topologie de Baxter Chacon*, Sém. Proba. Strasbourg XII, Lect. Notes in Math. 649, 424, Springer, Berlin, 1978.

[DeM] C. DELLACHERIE, P.A. MEYER, *Probabilités et potentiel I*, (2ème édition), Hermann, Paris, 1976.

[Jac] J. JACOD, *Calcul stochastique et problèmes de martingales*, Lect. Notes in Math. 724, Springer Verlag, Berlin, 1979.

[JaM-1] J. JACOD, J. MEMIN, *Existence of weak solutions for stochastic differnetial equations driven by semimartingales*, Preprint.

[JaM-2] J. JACOD, J. MEMIN, *Sur un type de convergence intermédiaire entre la convergence en loi et la convergence en probabilités*, Sém. Proba XV (même Lecture Notes).

[Kry] KRYLOW, *Quasi diffusion processes*, Theory of probability and applications, 1966.

[MeP-1] M. METIVIER, J. PELLAUMAIL, *Notions de base sur l'intégrale stochastique*, Séminaire de Probabilités de Rennes, 1976.

[MeP-2] M. METIVIER, J. PELLAUMAIL, *Stochastic integration*, Academic Press 1980.

[Mey-1] P.A. MEYER, *Inégalités de normes*, in Lecture Notes n° 649, Springer Verlag.

[Mey-2] P.A. MEYER, *Convergence faible et compacité des temps d'arrêt, d'après Baxter et Chacon*, Sém. Proba. XII, 411-423, Lect. Notes in Math. 649, Springer Verlag, Berlin, 1978.

[Pel-1] J. PELLAUMAIL, *Sur l'intégrale stochastique et la décomposition de Doob-Meyer,* Astérisque n° 9, Soc. Math. France, 1973.

[Pel-2] J. PELLAUMAIL, *On the use of group-valued measures in stochastic processes,* Symposia Mathematica, vol. XXI, 1977.

[Pel-3] J. PELLAUMAIL, *Convergence en règle,* C.R.A.S. 290 (A), 289-291, 1980.

[Pel-4] J. PELLAUMAIL, *Solutions faibles pour des processus discontinus,* C.R.A.S. 290 (A), 431-433, 1980.

[Pel-5] J. PELLAUMAIL, *Weak solutions for π^*-processes,* Preprint, Vancouver, janvier 1980.

[Pri] P. PRIOURET, *Processus de diffusion et équations différentielles stochastiques,* dans Lecture Notes n° 390, Springer Verlag, 1974.

[Pro] Yu. V. PROKHOROV, *Probability distributions in functional spaces,* Uspelin Matem. Nank., N.S. 55, 167, 1953.

[Ren-1] A. RENYI, *On stable sequences of events,* Sankhya Ser. A, 25, 293-302, 1963.

[Ren-2] A. RENYI, *Probability theory,* North Holland, Amsterdam, 1970.

[Sch] M. SCHAL, *Conditions for optimality in dynamic programming and for the limit of n-stages optimal policies to be optimal,* Z. für Wahr. 32, 179-196, 1975.

[Sko] A.V. SHOROKHOD, *Limit theorems for stochastic processes,* Theo. Proba. and Appl. 1, 261-290 (SIAM Translation), 1956.

[Str] C. STRICKER, *Quasimartingales, martingales locales, semimartingales et filtrations,* Z. für Wahr. 39, 55-63, 1977.

[StV-1] D.W. STROOCK, S.R.S. VARADHAN, *Diffusion processes with continuous coefficients,* com. in Pure and Appl. Math., vol. 22, 1969.

[StV-2] D.W. STROOCK, S.R.S VARADHAN, *Multidimensional diffusion processes,* Springer Verlag (Grundlehren S. 233), Berlin 1979.