MARC YOR

Sur certains commutateurs d'une filtration

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 526-528
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__526_0>

SUR CERTAINS COMMUTATEURS D'UNE FILTRATION

M.Yor.

1. Enoncé du problème.

$\mathfrak{X} = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ est un espace de probabilité filtré usuel. On suppose $\mathcal{F}_0$ triviale, et $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty (\overset{\text{déf}}{=} \bigvee_t \mathcal{F}_t)$.

On se pose la question de caractériser toute sous-tribu $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$, supposée $(\mathcal{F}, P)$ complète, telle que :

(C) pour tout $(\mathcal{F}_t)$ temps d'arrêt T, $E^{\mathcal{F}_T} E^{\mathcal{G}} = E^{\mathcal{G}} E^{\mathcal{F}_T}$, la notation $E^{\mathcal{U}}$ désignant l'opérateur d'espérance conditionnelle (sous P) par rapport à la tribu $\mathcal{U}$, défini sur $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Ce problème a été complètement résolu sous l'hypothèse suivante ([1] et [2])

(T) : $\mathfrak{X}$ admet une martingale totalisatrice, c'est-à-dire :

il existe une $(\mathcal{F}_t)$ martingale de carré intégrable (M_t) telle que toute variable $U \in L^2(\mathcal{F}_\infty, P)$ puisse s'écrire $U = E(U) + \int_0^\infty u_s dM_s$, avec (u_t) processus $(\mathcal{F}_t)$ prévisible tel que $E\left[\int_0^\infty u_s^2 \, d\langle M\rangle_s\right] < \infty$.

On résoud ici le problème précédent, sans aucune hypothèse sur $\mathfrak{X}$, répondant ainsi à une question de K.Carne et N.Varopoulos.

2. Rappels (d'après [2]).

On dit que $\mathcal{G}$ vérifie l'hypothèse $(\mathcal{H}_u)$ (u : pour universel) relativement à $\mathfrak{X}$ si, pour toute probabilité Q équivalente à P (sur $\mathcal{F}$), et tout $t \geq 0$, on a :

$$E_Q^{\mathcal{F}_t} E_Q^{\mathcal{G}} = E_Q^{\mathcal{G}} E_Q^{\mathcal{F}_t}.$$

Théorème (R1) : $(\mathcal{H}_u)$ est vérifiée si, et seulement si, il existe un $(\mathcal{F}_t)$ temps d'arrêt S tel que $\mathcal{F}_{S-} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}_S$.

Lemme (R2) : Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité complet, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{U}$ deux sous-tribus de $\mathcal{F}$, supposées $(\mathcal{F}, P)$ complètes.

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1) pour toute probabilité Q équivalente à P (sur $\mathcal{F}$), $E_Q^{\mathcal{G}} E_Q^{\mathcal{U}} = E_Q^{\mathcal{U}} E_Q^{\mathcal{G}}$.

2) (i) $E_P^{\mathcal{G}} E_P^{\mathcal{U}} = E_P^{\mathcal{U}} E_P^{\mathcal{G}}$

et (ii) pour toutes $g \in b\mathcal{G}$, $u \in b\mathcal{U}$, $(g - E_P^{\mathcal{U}}(g))u \in b\mathcal{G}$.

3) Résolution du problème.

Si $x \in L^1(\mathcal{F}, P)$, on note $(x_t)_{t\geq 0}$ une version càdlàg de $(E_P(x/\mathcal{F}_t))$.

Soit donc $\mathcal{G}$ vérifiant (C). De façon à pouvoir appliquer le théorème (R1), on va montrer que la seconde assertion du lemme (R2) est vérifiée avec $\mathcal{U} = \mathcal{F}_t$, pour tout $t \geq 0$.

(i) est vérifiée (prendre T=t dans (C)).

Il reste à montrer (ii). Fixons t, et associons à $g \in b\mathcal{G}$, $u \in b\mathcal{U}$, les martingales : $M_s = g_s - g_{t\wedge s}$; $N_s = u_{t\wedge s}$ $(s \geq 0)$.

On a : $(g - E_P^{\mathcal{U}}(g))u = M_\infty N_\infty$

$$= \int_0^\infty N_{s-} dM_s + \int_0^\infty M_{s-} dN_s + [M,N]_\infty .$$

Le processus (M_s) étant nul sur $[0,t]$, et (N_s) constant sur $[t,\infty[$, on a :

$$(g - E_P^{\mathcal{U}}(g))u = \int_0^\infty N_{s-} dM_s = \int_t^\infty N_{s-} dg_s .$$

En conséquence, (ii) sera, a fortiori, vérifiée, une fois le lemme suivant obtenu.

<u>Lemme</u> : <u>Supposons que</u> $\mathcal{G}$ <u>vérifie</u> (C).
<u>Soit</u> $x \in L^2(\mathcal{F},P)$, <u>et</u> $g = E^{\mathcal{G}}(x)$.
<u>Alors, pour tout processus prévisible borné</u> (p_s), <u>on a</u> :

$$E^{\mathcal{G}}\left[\int_0^\infty p_s dx_s\right] = \int_0^\infty p_s dg_s \quad , \quad \text{P.p.s.}$$

<u>Démonstration du lemme</u> : L'égalité cherchée découle immédiatement de (C) lorsque p est un processus prévisible élémentaire, c'est-à-dire un processus de la forme $p = \Sigma\lambda_i 1_{]S_i,S_{i+1}]}$, avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$, et (S_i) une suite finie, croissante, de $(\mathcal{F}_t)$ temps d'arrêt.

Le cas général s'en déduit en approchant p, processus prévisible borné, dans $L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+, \mathcal{P}, d\langle x_\cdot\rangle_s + d\langle g_\cdot\rangle_s)$ par une suite de processus prévisibles élémentaires, bornés ($\mathcal{P}$ désigne la tribu prévisible sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$, associée à $(\mathcal{F}_t)$). □

On peut maintenant énoncer le

<u>Théorème</u> : <u>une sous-tribu</u> $\mathcal{G}$ <u>de</u> $\mathcal{F}$, $(\mathcal{F},P)$ <u>complète</u>, <u>vérifie</u> (C) <u>si, et seulement si il existe un</u> $(\mathcal{F}_t)$ <u>temps d'arrêt</u> S <u>tel que</u>

$$\mathcal{F}_{S-} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}_S .$$

<u>Démonstration du théorème</u> :

- Les arguments précédents montrent, à l'aide du théorème (R1), que si $\mathcal{G}$ vérifie (C), il existe un $(\mathcal{F}_t)$ temps d'arrêt S tel que $\mathcal{F}_{S-} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}_S$.
- Inversement, supposons l'existence d'un tel temps d'arrêt S. Soit maintenant T un temps d'arrêt, et $f_T \in L^1(\mathcal{F}_T,P)$. On a :

$$E^{\mathcal{G}}(f_T) = E^{\mathcal{G}}\left[f_T 1_{(T<S)} + f_T 1_{(S\leq T)}\right]$$

Les processus $f_T 1_{]T,\infty]}$ et $1_{[0,T]}$ étant prévisibles, les variables $f_T 1_{(T<S)}$ et $1_{(S\leq T)}$ sont $\mathcal{F}_{S-}$ mesurables. On a donc, d'après l'hypothèse :

$$E^{\mathcal{G}}(f_T) = f_T 1_{(T<S)} + E^{\mathcal{G}}(f_T)\, 1_{(S\leq T)} .$$

Toujours d'après l'hypothèse, $E^{\mathcal{G}}(f_T)$ est $\mathcal{F}_S$-mesurable, et finalement, $E^{\mathcal{G}}(f_T)$ est $\mathcal{F}_T$ mesurable.

□

Remarques :

(1) Ainsi, les propriétés (C) et ($\mathcal{H}_u$) sont équivalentes, ce qui ne semble pas immédiat a priori.

(2) Si (T) est vérifiée, et S est un ($\mathcal{F}_t$) temps d'arrêt, il découle de [1] et [2] que les tribus $\mathcal{G}$, ($\mathcal{F}$,P) complètes, comprises entre $\mathcal{F}_{S-}$ et $\mathcal{F}_S$, sont les tribus : $\mathcal{G}_B = \{C \in \mathcal{F}_S \mid \exists\, C_{S-} \in \mathcal{F}_{S-},\ C \cap B = C_{S-} \cap B\}$ où $B \in \mathcal{F}_{S-}$ est tel que S_B soit prévisible.

Corollaire :

Si toute ($\mathcal{F}_t$,P) martingale est continue, les seules sous-tribus $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$, ($\mathcal{F}$,P) complètes, qui vérifient (C), sont les tribus $\mathcal{F}_S$, avec S ($\mathcal{F}_t$) temps d'arrêt.

Références :

[1] M.Yor : Remarques sur la représentation des martingales comme intégrales stochastiques.
Sém. Proba. Strasbourg XI, Lect. Notes in Maths 581 (1977)

[2] T.Jeulin et M.Yor : Nouveaux résultats sur le grossissement des tribus.
Ann. Scient. ENS. 4ième série, t.11, 1978, p.429-443.