CHRISTOPHE STRICKER

Sur la caractérisation des semi-martingales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 523-525
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__523_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités

1979/80

SUR LA CARACTERISATION DES SEMIMARTINGALES

par C. STRICKER

Cet exposé fait suite aux "Remarques sur la topologie des semimartingales", dont il reprend les notations et la liste de références (mais il n'utilise pas la topologie des semimartingales). Nous nous proposons de donner une démonstration de la forme forte du théorème de DELLACHERIE-MOKOBODZKI, suivant laquelle, si X est un processus permettant une intégration stochastique, on peut transformer X par changement de loi en une semimartingale appartenant à n'importe quelle classe $\mathcal{S}^p$ (ici on prend p=2 ; la forme faible transforme X en une quasimartingale) . Il nous semble en effet que toutes les démonstrations de ce théorème , y compris la très élégante démonstration de Lenglart [9], font appel à des outils très raffinés de théorie des semimartingales, alors que les nôtres sont élémentaires.

Précisons d'abord quelques notations : $\mathcal{E}$ désigne l'espace vectoriel des combinaisons linéaires d'indicatrices de rectangles de $R^+\times\Omega$ de la forme $]u,+\infty]\times A$ avec $A\in\mathcal{F}_u$; Si X est un processus adapté nous poserons $X^*=\operatorname{ess\,sup}_{t\in R} X_t$; Si $H=\Sigma A^i 1_{]t_i,t_{i+1}]}$ avec A^i $\mathcal{F}_{t_i}$ - mesurable , on définit l'intégrale élémentaire $H.X=\Sigma A^i(X_{t_{i+1}}-X_{t_i})$ et $H.X_t=H1_{]0,t]}.X$. Dorénavant H ou K désigneront des éléments de $\mathcal{E}$. L'énoncé suivant équivaut au th. de DELLACHERIE-MOKOBODZKI sous sa forme forte (établie par BICHTELER et DELLACHERIE) :

THEOREME 1 . Si l'ensemble $\{ (H.X)_\infty , |H|\leq 1 \}$ est borné dans L^0,il existe une loi Q équivalente à P telle que $\sup_{|H|\leq 1} E^Q[H.X_\infty]^2 < +\infty$.

La démonstration de ce théorème comportera plusieurs étapes .

LEMME 1 . L'ensemble $\{ (H.X)^* , |H|\leq 1 \}$ est aussi borné dans L^0 .

Démonstration . Supposons le contraire : il existe une suite (H^n) de $\mathcal{E}$ telle que $|H^n|\leq 1$ et que $P[(H^n.X)^* > n] > \varepsilon > 0$. Choisissons un ensemble dénombrable D tel que pour tout n :$(H^n.X)^*=\sup_{t\in D} |H^n.X|_t$ p.s . Pour tout n il existe un temps d'arrêt T_n ne prenant qu'un nombre fini de valeurs et tel que $P[|H^n.X|_{T_n} \geq n] > \varepsilon$. Il suffit de prendre $T_n = m \wedge \inf\{t \in \Delta, |H^n.X|_t \geq n\}$ où m est un entier assez grand et Δ une partie finie de D assez riche . Remarquant que $H^n.X_{T_n} = H^n 1_{]0,T_n]}.X_\infty$, on voit que cela contredit l'hypothèse du théorème .

LEMME 2 L'ensemble des variables aléatoires $\sum_\sigma (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$ est borné dans L^0 lorsque σ parcourt les subdivisions finies de $[0,\infty[$ et il en est de même de son enveloppe convexe .

Démonstration . Quitte à retrancher X_0 à X , on peut supposer $X_0 = 0$. Notons d'abord une conséquence évidente du lemme précédent : X^* est fini p.s. Ainsi les processus prévisibles élémentaires $H = \Sigma X_{u_i} 1_{]t_i,t_{i+1}]}$ avec $u_i \leq t_i$ sont majorés par X^* qui est p.s. fini . Donc la famille $(H.X_\infty)$ est bornée dans L^0 ainsi que son enveloppe convexe et il en est de même de l'enveloppe convexe de la famille $\Sigma(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$ car $\sum_{i=0}^{n-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 = X_{t_n}^2 - 2\sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$

LEMME 3 Il existe une loi Q équivalente à P telle que $\sup_{|H|\leq 1} E^Q|H.X_\infty| < +\infty$

Démonstration . D'après le théorème de NIKIŠIN [13] il existe une loi Q équivalente à P telle que $U = \sup_\sigma E[\Sigma(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2]$, $E[X^*]^2$ et $\sup_{|H|\leq 1} E[H.X_\infty]$ soient tous finis . En prenant $H = \Sigma 1_{C_i \times]t_i,t_{i+1}]}$ où $C_i = \{E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}] > 0\}$ (resp. $\{E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}] \leq 0\}$) on remarque que X est une quasimartingale, c'est-à-dire $\mathrm{Var}X = \sup_\sigma E[\Sigma|E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}]|] < +\infty$. Pour toute suite de variables aléatoires a_i appartenant à $\mathcal{F}_{t_i}$ on note $A_{t_j} = \sum_{i=0}^{j-1} a_i E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathcal{F}_{t_i}]$ et on pose $M_{t_j} = \sum_{i=0}^{j-1} a_i(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) - A_{t_j}$. On obtient aisément les inégalités suivantes (1) : $E[M_{t_n}]^2 \leq 4U$ et $E|A_{t_n}| \leq \mathrm{Var}X$. Il en résulte que l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{|H.X_\infty| , |H| \leq 1\}$ est aussi bornée dans L^0. Ainsi il existe une loi Q

(1) si $|a_i| \leq 1$

équivalente à P telle que $\sup_{|H|\leq 1} E^Q|H.X_\infty| < +\infty$.

Passons maintenant à la démonstration proprement dite du théorème 1. Comme $(M_{t_j})_{j=0,\dots,n}$ est une martingale discrète, l'inégalité classique de Doob montre que $E[M^*_{t_n}]^2 \leq 16U$. Soient H un processus prévisible élémentaire borné par 1 et Δ une partie finie de $[0,+\infty[$. On peut écrire $H = \Sigma a_i 1_{]t_i, t_{i+1}]}$ avec Δ contenu dans $\{t_0=0,\dots,t_n\}$. Alors $E[\sup_{t\in\Delta} |H.X_t|] \leq 4U^{\frac{1}{2}} + \mathrm{Var}X$. D'où un résultat meilleur que celui du lemme 3 : $\sup_{|H|\leq 1} E^Q|H.X|^* < +\infty$. En particulier l'enveloppe convexe de $\{(H.X)^*, |H| \leq 1\}$ est bornée dans L^0. Si $H = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 1_{]t_i,t_{i+1}]}$ et si $K = \sum_{j=0}^{n-1} a_j[\sum_{i=0}^{j-1} a_i(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})]1_{]t_j,t_{j+1}]}$, alors on a l'égalité évidente:

$$(H.X_\infty)^2 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i^2 (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 + 2(K.X_\infty)$$

. Comme $K^* \leq (H.X)^*$ si $|a_i| \leq 1$ pour tout i, l'ensemble des $K.X_\infty$ est borné dans L^0 ainsi que son enveloppe convexe d'après l'hypothèse du théorème 1. Il en est de même de l'enveloppe convexe de $\{(H.X_\infty)^2, |H| \leq 1\}$. Une nouvelle application du théorème de NIKIŠIN [13] permet d'affirmer l'existence d'une loi Q équivalente à P telle que $\sup_{|H|\leq 1} E^Q[H.X_\infty]^2 < +\infty$ et le théorème 1 est démontré.