SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CHRISTOPHE STRICKER

Quelques remarques sur la topologie des semimartingales. Applications aux intégrales stochastiques

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 499-522

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__499_0>

QUELQUES REMARQUES SUR LA TOPOLOGIE DES SEMIMARTINGALES. APPLICATIONS AUX INTEGRALES STOCHASTIQUES

par Christophe STRICKER

La topologie des semimartingales a été introduite par EMERY [4] dans l'étude de la stabilité des équations différentielles stochastiques. Elle sert aussi dans la théorie de l'intégrale stochastique par rapport à des processus prévisibles non localement bornés [1] et dans les problèmes de prolongement de semimartingales définies dans des ouverts [12] et [14].

La topologie des semimartingales jusqu'à l'infini se définit de manière naturelle par la distance à l'origine : $d(0,X) = \sup_H E[1 \wedge |1_H \cdot X_\infty|]$, H parcourant une algèbre qui engendre la tribu prévisible. En s'inspirant de méthodes dues à Yor et perfectionnées par Lenglart, nous retrouvons les principaux théorèmes d'Emery sans utiliser des distances auxiliaires compliquées, ni le théorème du graphe fermé. Ceci nous permet de donner une condition suffisante, englobant celle de MEMIN [10], pour que la décomposition canonique des semimartingales spéciales soit une opération continue. Grâce à ces résultats, nous donnons une démonstration plus simple d'un théorème de prolongement des semimartingales établi dans [14].

La deuxième partie de cet article est consacrée à l'étude des intégrales stochastiques de processus prévisibles non localement bornés, notion introduite par JACOD [7]. L'utilisation systématique des résultats du premier paragraphe permet de simplifier l'exposition de cette théorie et d'obtenir de nouveaux résultats.

Dans la troisième partie, nous examinons certains rapports entre les intégrales stochastiques définies précédemment et les processus croissants contrôlant les semimartingales au sens de Métivier et Pellaumail [11].

1. La topologie des semimartingales.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ un espace probabilisé filtré, vérifiant les conditions habituelles. Pour tout processus càdlàg X et tout temps d'arrêt T, on définit de nouveaux processus par :

$$X_t^* = \sup_{s \leq t} |X_s| ,$$

$$X^T = X\, 1_{[0,T]} + X_T\, 1_{]T,+\infty[} \quad \text{(arrêt à } T\text{)},$$

$$X^{T-} = X\, 1_{[0,T[} + X_{T-}\, 1_{[T,+\infty[} \quad \text{(arrêt à } T-\text{)}.$$

L'espace des variables aléatoires sera muni de la quasinorme : $\|U\|_{L^0} = E[1 \wedge |U|]$. Nous dirons qu'une propriété a lieu prélocalement (resp. localement) s'il existe une suite de temps d'arrêt (T_n) tendant stationnairement vers $+\infty$ et telle que pour tout n, X^{T_n-} (resp. X^{T_n}) satisfasse à cette propriété.

On désigne par $\mathcal{S}^p$ l'ensemble des semimartingales spéciales X de décomposition canonique $X = M + A$ vérifiant : $\|X\|_{\mathcal{S}^p} = \|[M,M]_\infty^{\frac{1}{2}} + \int_0^\infty |dA_s|\|_{L^p} < +\infty$.

Yor a montré que cette norme était encore équivalente à la norme :

$$\|X\| = \sup_{|H| \leq 1} \|H \cdot X\|_{L^p} .$$

$\mathcal{S}$ est l'espace des semimartingales jusqu'à l'infini, c'est-à-dire les semimartingales X pour lesquelles il existe une suite de temps d'arrêt T_n tendant stationnairement vers $+\infty$ avec $X^{T_n-} \in \mathcal{S}^1$ pour tout n. Cet espace vectoriel sera muni de la topologie définie par la distance : $d(X, Y) = \sup_H \|1_H \cdot (X-Y)_\infty\|_{L^0}$, H parcourant une algèbre $\mathcal{G}$ qui engendre la tribu prévisible $\mathcal{P}$. En réalité, cette distance ne dépend pas de l'algèbre choisie $\mathcal{G}$.

LEMME 1.1. $d(X, Y) = \sup_{H \in \mathcal{P}} \|1_H \cdot (X-Y)_\infty\|_{L^0}$.

Démonstration. On considère l'ensemble $\mathcal{P}' = \{H \in \mathcal{P} ,\ d(X, Y) \geq E[1 \wedge |1_H \cdot (X-Y)|]\}$.

Cet ensemble contient par hypothèse une algèbre engendrant la tribu prévisible $\mathcal{P}$; il est stable par convergence monotone d'après le théorème de convergence dominée des intégrales stochastiques. Le théorème des classes monotones entraîne que $\mathcal{P}' = \mathcal{P}$.

Voici le deuxième lemme technique :

LEMME 1.2. <u>La distance</u> $d'(X, Y) = \sup_{H \in \mathcal{P}} \|(1_H \cdot (X - Y))^*_\infty\|_{L^0}$ <u>est équivalente à</u> d.

<u>Démonstration</u>. Comme $d' \geq d$, il suffit de démontrer que si (X^n) est une suite de $\mathcal{S}$ qui converge vers 0 pour d , il en est de même pour d' . Supposons le contraire : il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite (encore notée X^n) tels que $d'(0, X^n) > \varepsilon$ pour tout n . Ainsi il existe pour tout n un ensemble prévisible H_n vérifiant $P[(1_{H_n} \cdot X)^*_\infty > \frac{\varepsilon}{2}] \geq \frac{\varepsilon}{2}$. Posons $T_n = \inf\{t, |1_{H_n} \cdot X_t| > \frac{\varepsilon}{2}\}$. Alors si $K_n = H_n \cap [0, T_n]$, $P[|1_{K_n} \cdot X_\infty| \geq \frac{\varepsilon}{2}] \geq \frac{\varepsilon}{2}$, donc $d(0, X^n) \geq (\frac{\varepsilon}{2})^2$ pour tout n , ce qui est absurde.

Nous commencerons par donner quelques propriétés très simples, mais utiles, de la topologie des semimartingales, qui avaient été établies par EMERY [4], grâce à d'autres méthodes. Rappelons qu'un changement de temps est un processus croissant brut j_t tel que pour chaque t , j_t soit un temps d'arrêt. Nous noterons d'une barre l'opération de changement de temps : $\bar{X}_t = X_{j_t}$, $\bar{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_{j_t}$, $\bar{\mathcal{S}}$ est l'espace des semimartingales jusqu'à l'infini par rapport à la filtration $(\bar{\mathcal{F}}_t)$, etc...

PROPOSITION 1.3. <u>L'application</u> $X \longrightarrow \bar{X}$ <u>de</u> $\mathcal{S}$ <u>dans</u> $\bar{\mathcal{S}}$ <u>est continue</u>.

<u>Démonstration</u>. Soit $k_t = \inf\{s, j_s \geq t\}$. On a l'équivalence : $t \leq j_s \Longleftrightarrow k_t \leq s$. Prenons un processus de la forme : $H = h_0 1_{\{0\}} + \sum_i h_i 1_{]t_i, t_{i+1}]}$ $(h_0 \in \mathcal{F}_0$, $0 = t_0 < t_1 \ldots \leq +\infty$, $h_i \in \bar{\mathcal{F}}_{t_i})$. Alors si kH désigne le processus (H_{k_t}) , on a :

$$kH = h_0 1_{\{0\}} + \sum_i h_i 1_{]j_{t_i}, j_{t_{i+1}}]} \quad (h_0 \in \mathcal{F}_0 , h_i \in \mathcal{F}_{j_{t_i}}) ,$$

qui est prévisible par rapport à $(\mathcal{F}_t)$. On vérifie immédiatement que :

$H\cdot\bar{X}_\infty = (kH)\cdot X_\infty$ p.s. Par classe monotone, on étend l'égalité précédente à tous les processus $(\mathcal{F}_t)$ prévisibles bornés. Donc l'application $X \longrightarrow \bar{X}$ de $\mathcal{S}$ dans $\bar{\mathcal{S}}$ est continue, compte tenu de la distance définissant la topologie des semimartingales.

PROPOSITION 1.4. Soit Q une loi de probabilité absolument continue par rapport à P. La convergence dans $\mathcal{S}(P)$ entraîne la convergence dans $\mathcal{S}(Q)$ vers la même limite. En particulier, si P et Q sont équivalentes, les deux espaces topologiques $\mathcal{S}(P)$ et $\mathcal{S}(Q)$ sont les mêmes.

Démonstration. Il est maintenant bien connu que si X est une P-semimartingale et si H est un processus prévisible borné, X est aussi une Q-semimartingale et l'intégrale stochastique $H\cdot X$ calculée sous P est aussi une version de l'intégrale stochastique calculée sous Q. Comme la distance est invariante par translation, il suffit de considérer une suite (X^n) convergeant vers 0 dans $\mathcal{S}(P)$ et de supposer qu'elle ne converge pas dans $\mathcal{S}(Q)$ vers 0. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer de plus qu'il existe une suite d'ensembles prévisibles (H_n) et un $\varepsilon > 0$ tels que pour tout n, $Q(A_n) \geq \varepsilon$ où $A_n = \{|1_{H_n}\cdot X^n_\infty| \geq \varepsilon\}$. Soit $f = \frac{dQ}{dP}$. Comme $f \in L^1(P)$ et que $P(A_n)$ tend vers 0 par hypothèse, on arrive à une absurdité et (X^n) converge aussi vers 0 dans $\mathcal{S}(Q)$.

On sait, grâce à un théorème de Jacod et Meyer, que l'ensemble des lois de probabilités sous lesquelles un processus donné X est une semimartingale est dénombrablement convexe. L'énoncé suivant dans lequel on suppose toujours donné l'espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ montre que cela s'étend à la convergence des semimartingales.

PROPOSITION 1.5. Soient (P_k) une suite de probabilités telles que $\Sigma\, \lambda_k P_k = P$ (avec $\Sigma\, \lambda_k = 1$) et (X^n) une suite de semimartingales qui converge dans tout $\mathcal{S}(P_k)$. Alors (X^n) converge dans $\mathcal{S}(P)$.

Démonstration. D'après le lemme 1.2, la suite (X^n) converge uniformément en probabilité pour toute loi P_k et donc aussi pour P . Ainsi, nous pouvons choisir un processus càdlàg adapté X tel que $\lim_n X^n = X$ dans $\mathcal{S}(P_k)$ pour tout k . X est aussi une P-semimartingale d'après le théorème de Jacod-Meyer et par définition même de la distance d , (X^n) converge aussi vers X dans $\mathcal{S}(P)$.

COROLLAIRE 1.6. <u>La convergence prélocale dans</u> $\mathcal{S}$ <u>entraîne la convergence dans</u> $\mathcal{S}$.

<u>Démonstration</u>. Soient (T_n) une suite de temps d'arrêt tendant <u>stationnairement</u> vers $+\infty$ et (X^P) une suite de semimartingales. Supposons que pour tout n , $(X^P)^{T_n -}$ converge dans $\mathcal{S}$ et montrons que (X^P) converge dans $\mathcal{S}$. Soit n_o le premier entier n tel que $P[T_n = +\infty] > 0$. Pour $k \geq n_o$, désignons par P_k la restriction de P à $\{T_k = +\infty\}$. La suite (X^P) converge évidemment dans tout $\mathcal{S}(P_k)$ et donc d'après la proposition précédente, elle converge aussi dans $\mathcal{S}(P)$.

PROPOSITION 1.7 (<u>Théorème de convergence dominée de Lebesgue</u>). <u>Soient</u> X <u>une semimartingale et</u> (H^n) <u>une suite de processus prévisibles majorés par un processus prévisible localement borné</u> K . <u>Si la suite</u> (H^n) <u>converge simplement vers un processus</u> H , <u>les semimartingales</u> $H^n \cdot X$ <u>convergent dans</u> $\mathcal{S}$ <u>vers</u> $H \cdot X$.

<u>Démonstration</u>. Par prélocalisation ou par changement de loi, on peut supposer que X et $K \cdot X$ sont dans $\mathcal{S}^2$. La démonstration est alors évidente et nous ne la ferons pas.

Dorénavant, nous travaillerons avec la distance d' qui est plus commode et nous nous proposons de démontrer directement le théorème fondamental dû à EMERY [4].

THEOREME 1.8. $\mathcal{S}$ <u>est complet</u>. <u>Si</u> (X^n) <u>est une suite convergente de</u> $\mathcal{S}$, <u>il existe une sous-suite de</u> (X^n) <u>qui converge prélocalement dans tout</u> $\mathcal{S}^p$, $p \geq 1$.

<u>Démonstration</u>. Soit (X^n) une suite de Cauchy de $\mathcal{S}$. On extrait une sous-suite que nous noterons encore X^n telle que $d'(X^{n+1}, X^n) \leq \frac{1}{2^n}$. Posons : $Y^n = X^{n+1} - X^n$. Pour toute suite (H^n) d'ensembles prévisibles $\sum_n (1_{H^n} \cdot Y^n)^*_\infty < +\infty$ d'après le lemme de Borel-Cantelli. En particulier $\sum_n (Y^n)^*_\infty < +\infty$; considérons les temps d'arrêt $T_p = \inf\{t, \sum_n (Y^n)^*_t \geq p\}$, alors $\sum_n (Y^n)^*_{T_p -} \leq p$. Désormais nous fixons p et arrêtons toutes les semimartingales Y^n à l'instant T_{p-}. Pour alléger les notations, nous appelons encore Y^n ces semimartingales arrêtées : elles sont spéciales, de décomposition canonique $Y^n = M^n + A^n$. Soit ε^n un processus prévisible à valeurs dans $\{-1, 1\}$ tel que $|dA^n| = \varepsilon^n\, dA^n$. On pose $H^n = 1_{\{\varepsilon^n = 1\}}$, $K^n = 1 - H^n$, $B^n = H^n \cdot A^n$ et $C^n = K^n \cdot A^n$; ce sont des processus <u>croissants</u> prévisibles. Les séries $\sum_n (H^n \cdot Y^n)^*_\infty$ et $\sum (K^n \cdot Y^n)^*_\infty$ convergent p.s. Soit $R_k = \inf\{t, \sum (H^n \cdot Y^n)^*_t \vee \sum (K^n . Y^n)^*_t \geq k\}$. Comme $|H^n| \leq 1$, $|K^n| \leq 1$ et $\sum_n (Y^n)^*_\infty \leq p$, on a :

$$\sum_n (H^n . Y^n)^*_{R_k} \vee \sum_n (K^n . Y^n)^*_{R_k} \leq k + p .$$

Le lemme suivant [17] montrera que la série $\sum_n Y^n_{t \wedge R_k}$ converge dans tout $\mathcal{S}^r$ $(r \geq 1)$ pour tout k, ce qui entraîne aisément les résultats du théorème 1.

LEMME 1.9. <u>Pour tout</u> $r \geq 1$, <u>il existe deux constantes</u> c_r <u>et</u> c'_r <u>telles que pour toute sous-martingale locale</u> X (<u>c'est-à-dire</u> $X = M + A$, <u>où</u> M <u>est une martingale locale et</u> A <u>un processus croissant prévisible</u>), <u>on ait</u> :

$$c_r \|X\|_{\mathcal{S}^r} \leq \|X^*_\infty\|_{L^r} \leq c'_r \|X\|_{\mathcal{S}^r} .$$

Esquissons la démonstration de ce lemme lorsque $r = 1$. Par arrêt, on suppose que M est une martingale uniformément intégrable nulle en 0 et $E[A_\infty] < +\infty$. On a $E[X^*_\infty] \geq E[X_\infty] = E[A_\infty]$ et le lemme s'ensuit. Pour $r > 1$, on applique le lemme de Garsia.

REMARQUES 1.10.

a) EMERY [4] a défini la topologie des semimartingales par la distance $d''(X, Y) = \sup_{|H| \leq 1} \|(H \cdot (X - Y))^*_\infty\|_{L^0}$, le sup portant sur l'ensemble des processus prévisibles bornés par 1 . On peut démontrer par un argument analogue à celui du lemme 1.2 que d , d' et d'' définissent bien la même topologie. C'est aussi un corollaire immédiat du théorème 1.8 car la convergence prélocale dans un $\mathcal{S}^p$ entraîne la convergence pour les distances d , d' et d'' .

b) Si les semimartingales X^n sont prévisibles, le processus croissant prévisible $\Sigma\,(Y^n)^*_t$ est localement borné et on obtient une convergence <u>locale</u> dans $\mathcal{S}^r$ pour tout $r \geq 1$. Ceci entraîne en particulier que la décomposition canonique de X est une fonction continue de X pour la topologie des semimartingales, X parcourant l'espace vectoriel fermé des semimartingales prévisibles. A ce propos, notons que si X est prévisible et à variation bornée sur $[0,+\infty]$, alors $d(0,X) = E[1 \wedge \int_0^\infty |dX_s|]$. Ainsi on retrouve simplement le résultat suivant de Meyer : l'espace vectoriel $\mathcal{G}$ des processus prévisibles à variation bornée sur $[0,+\infty]$ est fermé dans $\mathcal{S}$, et cette topologie restreinte à $\mathcal{G}$ peut être définie par la distance à l'origine : $d(0,A) = E[1 \wedge \int_0^\infty |dA_s|]$.

c) Soient D un processus croissant localement intégrable fixé et $\mathcal{S}'_D$ l'ensemble des semimartingales X telles que $|\Delta X| \leq D$. MEMIN [10] a démontré que $\mathcal{S}'_D$ est fermé dans $\mathcal{S}$ et que si (X^n) est une suite convergente de $\mathcal{S}'_D$, alors il existe une sous-suite convergeant <u>localement</u> dans $\mathcal{S}^1$, ce qui entraîne à nouveau que la décomposition canonique est continue sur $\mathcal{S}'_D$.

Le théorème précédent permet de retrouver facilement ce résultat, la convergence prélocale étant évidemment équivalente à la convergence locale dans ce cas.

Nous nous proposons maintenant de généraliser les résultats b) et c) . Soient D un processus croissant localement intégrable fixé et $\mathcal{S}''_D$ l'ensemble des semimartingales spéciales X dont la décomposition canonique $X = M + A$ vérifie la condition : $|\Delta M| \leq D$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, nous supprimons l'indice D dans $\mathcal{S}''_D$.

THEOREME 1.11. $\mathcal{S}''$ <u>est fermé dans</u> $\mathcal{S}$ <u>et si</u> (X^n) <u>est une suite convergente</u>

de $\mathcal{S}''$, il existe une sous-suite convergeant localement dans $\mathcal{S}^1$. En outre, la topologie de $\mathcal{S}''$ peut être définie par la distance :

$$d''(X, Y) = \|[M, M]_\infty^{\frac{1}{2}} + \int_0^\infty |dA_s|\|_{L^0} ,$$

où $M+A$ est la décomposition canonique de $X-Y$. En particulier, la décomposition canonique est continue sur $\mathcal{S}''$.

Avant de passer à la démonstration de ce théorème, notons que b) et c) sont des cas particuliers. En effet, si X est une semimartingale prévisible, X est spéciale, de décomposition canonique $X=M+A$ avec M continue. L'espace des semimartingales prévisibles est donc égal à $\mathcal{S}''_0$. On retrouve ainsi b) . De même si $|\Delta X| \leq D$, nous pouvons supposer par arrêt que $E[D_\infty] < +\infty$. Soit $X=M+A$ la décomposition canonique de la semimartingale spéciale X . Si T est un temps d'arrêt totalement inaccessible, $\Delta M_T = \Delta X_T$, si T est un temps d'arrêt prévisible, $\Delta M_T = \Delta X_T - E[\Delta X_T \mid \mathcal{F}_{T-}]$. D'où : $|\Delta M| \leq D+D'$ avec $D'_t = \sup\limits_{s \leq t} |E[D_\infty|\mathcal{F}_s]|$ qui est localement intégrable. On retrouve ainsi c) .

Démonstration du théorème 1.11. Par un premier arrêt, nous pouvons supposer que $E[D_\infty] < +\infty$. Soit (X^n) une suite de Cauchy de $\mathcal{S}''$. On peut en extraire une sous-suite convergeant prélocalement dans $\mathcal{S}^1$. Nous la noterons encore (X^n) . Soit (T_p) une suite croissante de temps d'arrêt tendant stationnairement vers $+\infty$ telle que $(X^n)^{T_p-}$ converge dans $\mathcal{S}^1$ lorsque n tend vers $+\infty$. Rappelons que X^n est spéciale de décomposition canonique $X^n = M^n + A^n$. Fixons p , posons $T=T_p$ et arrêtons tous les processus à l'instant T . Soient $k \geq p$ et $E_k = \{T = T_k < +\infty\}$. On a :

$$(X^n - X^m)_t^{T_k-} + \Delta(M^n - M^m)_T \, 1_{\{t \geq T_k\} \cap E_k} = (M^n - M^m)_t + (A^n - A^m)_t^{T_k-} .$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on peut choisir k assez grand pour que $\int_{E_k} 2D_\infty dP \leq \varepsilon$ et par conséquent :

$$E[|\Delta(M^n - M^m)|_T \, 1_{E_k}] \leq \varepsilon .$$

Comme $\|(X^n - X^m)^{T_k-}\|_{\mathcal{S}^1}$ tend vers 0 lorsque n et m tendent vers $+\infty$, on en déduit en introduisant la densité,

$$\varepsilon_{n,m} = \frac{|d(A^n - A^m)|}{d(A^n - A^m)}$$

(cf. la démonstration du théorème 1.8 et du lemme 1.9) que $\int_0^{T_k^-} |d(A^n - A^m)|$ tend vers 0 lorsque $n \to \infty$ et $m \to +\infty$. D'où

$$\lim_{n,m} \int_0^\infty |d(A^n - A^m)| = 0 \quad \text{p.s.}$$

car les temps d'arrêt T_p tendent stationnairement vers $+\infty$. Ainsi la suite (A^n) converge au sens de la topologie des semimartingales vers un processus prévisible A à variation bornée sur $[0, +\infty]$ (remarque b). Donc (M^n) converge aussi pour la topologie des semimartingales vers une limite M . Mais (A^n) (resp. M^n) vérifie les conditions des remarques b) (resp. c)) et donc, on peut en extraire une nouvelle sous-suite qui converge localement dans $\mathcal{S}^1$. En particulier M est une martingale locale telle que $|\Delta M| \leq D$ et $\mathcal{S}''$ est fermé dans $\mathcal{S}$, ce qui établit la partie i) du théorème ainsi que la continuité de la décomposition canonique. Montrons maintenant que si (X^n) est une suite de $\mathcal{S}''$ qui converge pour l'une des distances, alors elle contient une sous-suite qui converge aussi pour l'autre. Si (X^n) converge vers 0 pour la topologie des semimartingales, on en extrait une sous-suite (X^{n_k}) qui converge localement vers 0 dans $\mathcal{S}^1$; donc (X^{n_k}) converge aussi vers 0 pour d''' . Réciproquement, on remarque d'abord que si (X^n) tend vers 0 pour d''' , alors (A^n) tend vers 0 pour la topologie des semimartingales. Comme pour la démonstration du théorème 1, on extrait une sous-suite (M^{n_k}) telle que $\Sigma[M^{n_k}, M^{n_k}]_\infty^{\frac{1}{2}} < +\infty$ et on introduit les temps d'arrêt

$$T_p = \inf\{t \,,\, Y_t = \sum_k [M^{n_k}, M^{n_k}]_t \geq p\} .$$

Comme $\lim_{k\to\infty} \Delta M^{n_k}_{T_p} = 0$ et que $|\Delta M| \leq D$, on en déduit que $\lim_{k\to\infty} E[M^{n_k}, M^{n_k}]^{\frac{1}{2}} = 0$ et (M^{n_k}) converge vers 0 localement dans $\mathcal{S}^1$, donc aussi vers 0 pour la topologie des semimartingales, ce qui achève la démonstration du théorème.

Voici une application de notre définition de la topologie des semimartingales. Nous avions déjà établi ce résultat dans [14] par une démonstration plus compliquée, qui fait appel à des résultats d'analyse fonctionnelle de Maurey et Pisier.

THEOREME 1.12. Soient (A_n) une suite d'ensembles prévisibles et (X^n) une suite de semimartingales jusqu'à l'infini, telles que $X^n = 1_{A_n}\cdot X^{n+1}$ et que pour tout ensemble prévisible K, la suite $(1_K\cdot X^n)_\infty$ converge en probabilité vers une variable aléatoire $J(K)$. Alors la suite (X^n) converge pour la topologie des semimartingales vers une semimartingale X telle que $1_{A^c}\cdot X = 0$ où $A = \liminf_n A_n$.

Notons d'abord qu'on peut supposer que la suite (A_n) est croissante, de réunion A. En effet, comme $X^n = 1_{A_n}\cdot X^{n+1}$, la semimartingale X^n est portée par l'ensemble $B_n = \bigcap_{m\geq n} A_m$. Or la suite B_n tend en croissant vers $\liminf A_n$. Dorénavant nous supposerons que la suite (A_n) est croissante, de réunion A.

Pour démontrer le théorème, nous aurons besoin d'un lemme auxiliaire analogue au lemme 1 d'EMERY [5]. Par souci de complétude, nous allons donner une démonstration détaillée de ce résultat, contenue dans [14]. Il existe une loi Q équivalente à P telle que toutes les semimartingales X^n appartiennent à l'espace normé $\mathcal{M}\oplus\mathcal{a}$: autrement dit, pour la loi Q, X^n est spéciale de décomposition canonique $X^n = M^n + A^n$, M^n appartenant à l'espace vectoriel $\mathcal{M}$ des martingales de carré intégrable muni de la norme $\|M^n\|^2_{\mathcal{M}} = E[M^n, M^n]_\infty$, A^n appartenant à l'espace vectoriel $\mathcal{a}$ des processus à variation intégrable muni de la norme $\|A^n\|_{\mathcal{a}} = E[\int_0^\infty |dA^n|]$. $\tilde{\mathcal{P}}$ désigne la tribu quotient de la tribu prévisible $\mathcal{P}$ par la relation d'équivalence : $A\sim B$ si et seulement si pour tout n, $1_A\cdot X^n = 1_B\cdot X^n$. On pose :

$$\|X^n\| = \|M^n\|_{\mathcal{M}} + \|A^n\|_{\mathcal{a}} ,$$

$$d(A, B) = \sum_n \frac{\|(1_A - 1_B)\cdot X^n\|}{2^n(1+\|X^n\|)} \quad \text{pour tout } A, B \in \tilde{\mathcal{P}} ,$$

$$J^n(A) = (1_A\cdot X^n)_\infty \quad \text{pour tout } A\in\tilde{\mathcal{P}} ,$$

$$J(A) = \lim_{n\to\infty} J^n(A) \text{ , la limite étant prise en probabilité.}$$

On désigne par L^0 l'espace vectoriel topologique des variables aléatoires p.s. finies, muni de la topologie de la convergence en probabilité avec la quasinorme $\|U\|_{L^0} = E[1 \wedge |U|]$.

LEMME 1.13. d <u>est une distance sur</u> $\tilde{\mathcal{P}}$ <u>pour laquelle</u> $\tilde{\mathcal{P}}$ <u>est complet. Les applications</u> J^n <u>de</u> $\tilde{\mathcal{P}}$ <u>dans</u> L^0 <u>sont continues pour tout</u> n <u>et</u> J <u>est aussi continue</u>.

<u>Démonstration</u>. d est évidemment une distance sur $\tilde{\mathcal{P}}$. Si (B_n) est une suite de Cauchy pour d , c'est aussi une suite de Cauchy dans

$$L^2(\mathcal{P}, \sum_n \frac{d[M^n, M^n]\ dQ}{2^n(1+\|X^n\|)}) \cap L^1(\mathcal{P}, \sum_n \frac{|dA^n|\ dQ}{2^n(1+\|X^n\|)}) .$$

Donc (1_{B_n}) converge dans $L^2(\ldots) \cap L^1(\ldots)$ vers l'indicatrice d'un ensemble prévisible B . Par conséquent (B_n) converge aussi vers B dans $\tilde{\mathcal{P}}$. Les applications J^n sont lipschitziennes, donc continues. Il en résulte que J admet aussi un point de continuité. Comme J est additive, on vérifie aisément que J est continue partout.

Nous abordons maintenant la deuxième étape de notre démonstration du théorème 1.12.

Par hypothèse, pour tout $m \geq n$, $X^n = 1_{A_n} \cdot X^m$ et par conséquent, pour tout $K \in \mathcal{P}$, $J(K \cap A_n) = (1_{A_n \cap K} \cdot X^m)_\infty$. D'où : $|1_K \cdot (X^m - X^n)_\infty| = |J[K \cap (A^m \setminus A^n)]|$. Comme (A^n) tend en croissant vers A , $d(K \cap (A^m \setminus A^n), \emptyset)$ tend <u>uniformément</u> vers 0 lorsque n et m tendent vers $+\infty$. Il en est de même pour $J(K \cap (A^m \setminus A^n))$ grâce à la continuité de J . Ainsi la suite (X^n) est une suite de Cauchy pour la topologie des semimartingales qui est complète : la suite (X^n) converge et le théorème est démontré.

Grâce au théorème 1.11, nous avons le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1.14. <u>Si, outre les hypothèses du théorème 1.12, chaque</u> X^n <u>est</u>

spéciale de décomposition canonique $X^n = M^n + A^n$ et s'il existe un processus croissant D localement intégrable vérifiant $|\Delta M^n| \leq D$ pour tout n, alors X est aussi spéciale de décomposition canonique $X = M + A$ et M^n converge vers M, A^n vers A.

En particulier, si X est une semimartingale et si pour tout n, $X_t^n = (X_t - X_{1/n})\, 1_{\{t \geq 1/n\}}$ est un processus à variation finie prévisible (resp. appartient à l'espace des martingales locales continues $\mathcal{L}^c$), alors X est à variation finie prévisible (resp. $X \in \mathcal{L}^c$). Toutefois, il existe des semimartingales X telles que X^n soit pour tout n une martingale locale (resp. un processus à variation finie) sans que X le soit. On prend par exemple une suite de variables aléatoires de Rademacher Z_n et on pose : $X_t = \sum_{1/n \leq t} \frac{Z_n}{n}$. X est évidemment une martingale de carré intégrable pour sa filtration naturelle, mais n'est pas à variation finie. Pour un exemple de semimartingale X telle que X^n soit une martingale locale pour tout n mais que X ne le soit pas, on pourra consulter EMERY [3].

Rappelons le théorème fondamental de MEMIN [10].

THEOREME 1.15. Soit (X^n) une suite de Cauchy de $\mathcal{S}$. On peut en extraire une sous-suite (notée encore (X^n)) et trouver une probabilité Q équivalente à P de densité bornée, telles que la sous-suite (X^n) soit une suite de Cauchy dans $\mathcal{S}^p(Q)$ pour tout $p \geq 1$.

Démonstration. D'après le théorème 1.8. on peut extraire une sous-suite (notée encore (X^n)) qui (X^n) converge prélocalement dans tout $\mathcal{S}^p$. Il en résulte que pour tout $p \geq 1$ l'enveloppe convexe de $\{ |H\cdot X_\infty^n|^p, |H| \leq 1$ et $n \in N\}$ est bornée dans L^0, et donc d'après un théorème de NIKISIN [13] qui a été amélioré par Dellacherie, Meyer, Mokobodzki et Yan dans le Séminaire XIV, il existe une loi Q équivalente à P telle que (X^n) soit bornée dans tout $\mathcal{S}^p(Q)$. Le lemme de La Vallée-Poussin assure l'intégrabilité uniforme de la famille des variables aléatoires $|H\cdot X_\infty^n|^p$ pour tout p fixé. Ainsi la suite (X^n) est de Cauchy dans $\mathcal{S}^p(Q)$.

Voici une extension du lemme 3 de [12] à l'espace $\mathcal{S}$.

THEOREME 1.16. Soient (Z^n) une suite de semimartingales jusqu'à l'infini et (A_n) des ensembles prévisibles deux à deux disjoints tels que $1_{A_n} . Z^n = Z^n$ pour tout n. Alors la suite $X^n = \sum_{i=1}^{n} Z^i$ est bornée dans $\mathcal{S}$ si et seulement si elle converge dans $\mathcal{S}$.

Démonstration : Si la suite (X^n) converge dans $\mathcal{S}$ elle est évidemment bornée dans $\mathcal{S}$. Réciproquement, supposons la suite (X^n) bornée dans $\mathcal{S}$. EMERY a établi dans [3] que l'application qui à X associe $[X,X]$, était continue de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$. (On peut aussi le voir immédiatement en notant que si (Y^n) est une suite convergente dans $\mathcal{S}$, on peut en extraire une sous-suite convergente dans $\mathcal{S}^2$ d'après le théorème 1). Par conséquent, la suite $[X^n,X^n]$ est aussi bornée dans $\mathcal{S}$. Comme $[X^n,X^n] = \sum_{i=1}^{n} [Z^n,Z^n]$, elle converge p.s. Par prélocalisation nous pouvons supposer que $E \sum_{i=1}^{\infty} [Z^n,Z^n]_\infty < +\infty$. Les semimartingales Z^n sont spéciales, de décomposition canonique $Z^n = M^n + A^n$. En vertu de l'inégalité $E[M^n,M^n] \leq 4E[Z^n,Z^n]$ la série $\sum_{i=1}^{\infty} M^n$ converge dans $\mathcal{H}^2$. Ainsi la suite de processus prévisibles à variation finie $\sum_{i=1}^{n} A^i$ est aussi bornée dans $\mathcal{S}$. Les mesures aléatoires A^i et A^j étant étrangères pour $i \neq j$, la série $\sum_{i=1}^{\infty} A^i$ converge aussi dans $\mathcal{S}$ d'après le théorème 1.11.

2. Applications aux intégrales stochastiques.

Soit X une semimartingale. Jacod (et indépendamment Yen) a déterminé la plus vaste classe raisonnable d'intégrales prévisibles par rapport à X, c'est-à-dire l'ensemble des processus prévisibles H tels qu'il existe une décomposition $X = M + A$ vérifiant :

i) M est une martingale locale ;

ii) A est un processus adapté à variation finie ;

iii) $(H^2 \cdot [M,M])^{\frac{1}{2}}$ est localement intégrable ;

iv) $\int_0^t |H_s| \, |dA_s|$ est fini pour tout t.

On pose alors $H \cdot X = H \cdot M + H \cdot A$, où $H \cdot M$ et $H \cdot A$ sont les intégrales stochastiques usuelles. Il existe aussi une deuxième définition plus sophistiquée que nous avions donnée dans [1]. Nous noterons H^n le processus tronqué $H 1_{\{|H| \geq n\}}$.

DEFINITION 2.1. Soit X une semimartingale. On dit que le processus prévisible H est X-intégrable si la suite $(H^n \cdot X)$ converge dans $\mathcal{S}$. Dans ce cas, on note $H \cdot X$ la limite. L'ensemble des processus prévisibles X-intégrables est noté $L(X)$.

PROPRIETES EVIDENTES 2.2.

a) Si H est intégrable au sens de Jacod par rapport à X , H est aussi intégrable par rapport à X au sens de la définition 2.1. En effet, si X est à variation finie et si $\int_0^\infty |H_s| \, |dX_s| < +\infty$, H est évidemment X-intégrable par définition de la distance d , et de plus $H \cdot X$ est l'intégrale de Stieltjes usuelle. De même si X est une martingale locale et si le processus croissant $A_t = (\int_0^t H_s^2 \, d[X,X])^{\frac{1}{2}}$ est localement intégrable, H est X-intégrable et $H \cdot X$ est l'intégrale stochastique usuelle au sens des martingales locales. Pour le démontrer, il suffit de noter qu'il existe une suite de temps d'arrêt (T_k) tendant stationnairement vers $+\infty$ (par hypothèse) tels que $E[A_{T_k}] < +\infty$ et on vérifie aussitôt que $(H^n \cdot X)^{T_k}$ converge dans $\mathcal{H}^1$.

b) Comme $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel topologique, on a l'inclusion $L(X) \cap L(Y) \subset L(X+Y)$.

c) Si Q est absolument continue par rapport à P , un processus prévisible H , X-intégrable sous P , le reste sous Q et l'intégrale stochastique $H \cdot X$ calculée sous P est une version de celle calculée sous Q .

d) Si H est X-intégrable, on a $\Delta(H \cdot X) = H \, \Delta X$. En effet, $\Delta(H^n \cdot X) = H^n \, \Delta X$ et quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $H^n \cdot X$ converge uniformément grâce à la distance d' , ce qui entraîne $\Delta(H \cdot X) = H \, \Delta X$ par passage à la limite.

e) Considérons un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F}^\circ)$, une filtration $(\mathcal{F}_t^\circ)$

continue à droite, un processus càdlàg adapté X et un processus prévisible fini H. On sait que l'ensemble des lois de semimartingales pour X, i.e. des lois P telles que X soit une semimartingale pour P et la filtration $(\mathcal{F}_t^P)$ complétée habituelle de $(\mathcal{F}_t^\circ)$ est dénombrablement convexe (voir [7]).

La proposition 1.5 montre que l'ensemble des lois P qui sont des lois de semimartingales pour X et telles que $H \in L(X, P)$ est aussi dénombrablement convexe.

f) Il en résulte que l'appartenance à $L(X)$ est une propriété prélocale : supposons qu'il existe des temps d'arrêt T_k tendant stationnairement vers $+\infty$, des processus $J_k \in L(X)$ tels que $H = J_k$ sur $[0, T_k[$. Alors on a $H \in L(X)$ et $H \cdot X = J_k \cdot X$ sur $[0, T_k[$.

g) Soit $(\mathcal{G}_t)$ une filtration satisfaisant aux conditions habituelles, contenant $(\mathcal{F}_t)$ et telle que X soit encore une semimartingale par rapport à $(\mathcal{G}_t)$. Soit H un processus prévisible par rapport à $(\mathcal{F}_t)$. Si H est X-intégrable par rapport à $(\mathcal{G}_t)$, il l'est par rapport à $(\mathcal{F}_t)$ et les deux intégrales stochastiques sont égales. Ce résultat est évident, compte tenu de la définition de la topologie des semimartingales.

h) Pour que H soit X-intégrable, il faut et il suffit que la suite $Y^n = H1_{\{|H| \leq n\}} \cdot X$ soit bornée dans $\mathcal{S}$. En effet, il suffit d'appliquer le théorème 1.16 aux semimartingales $Z^n = H1_{\{n < H \leq n+1\}} \cdot X$.

Voici un complément à notre étude des ensembles bornés de $\mathcal{S}$. Soient (X^n) une suite de semimartingales, (H^n) une suite de processus prévisibles majorés par un processus prévisible H et X une semimartingale telle que H soit X-intégrable et que $X^n = H^n \cdot X$ pour tout n. On vérifie immédiatement que la suite (X^n) est bornée dans $\mathcal{S}$, si bien que (X^n) converge dans $\mathcal{S}$ si et seulement si pour tout $A \in \mathcal{P}$, la suite $(1_A \cdot X^n)_\infty$ converge dans L°.

Nous dirons que H est <u>compatible avec la décomposition</u> $X = M + A$ si $H \cdot M$ et $H \cdot A$ existent au sens usuel.

UN CONTRE-EXEMPLE 2.3.

Nous allons construire ici un processus croissant A (borné par 1) et un processus prévisible positif H, tel que le processus croissant $\int_0^t H_s\, dA_s$ soit p.s. fini, mais que le processus $\int_0^t H_s\, dB_s$ ne soit pas p.s. fini, B désignant la projection duale prévisible de A. Autrement dit, H est compatible avec la décomposition $A = 0 + A$, mais non avec la décomposition canonique $A = (A - B) + B$. Cet exemple a été trouvé avec l'aide d'Emery.

Nous reprenons l'exemple de Dellacherie ([2], p. 63) : $\Omega = \mathbb{R}_+$, $\underline{\underline{F}}^\circ$ est la tribu borélienne de $\mathbb{R}_+$ ($\underline{\underline{F}}^\circ$ est donc la tribu engendrée par S sur Ω), P est la loi de densité e^{-t} par rapport à la mesure de Lebesgue dt. Pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$, nous désignerons par $\underline{\underline{F}}^\circ$ la tribu engendrée par $S \wedge t$, et par $(\underline{\underline{F}}_t)_{t \geq 0}$ la filtration complétée, qui est continue à droite. Nous posons $A_t = I_{\{t \geq T\}}$.

Soit K une v.a. positive, et soit $U_t = KI_{\{t \geq S\}}$: montrons que le processus croissant U est localement intégrable si et seulement si $E[U_t] < \infty$ pour tout t. La condition est évidemment suffisante. Si U est localement intégrable, il existe des $T_n \uparrow \infty$ tels que $E[U_{T_n}] < \infty$; a fortiori, $E[U_{T_n \wedge S}] < \infty$, mais d'après Dellacherie [1], on peut écrire $T_n \wedge S = t_n \wedge S$ p.s., où t_n est une constante. Il est clair que $t_n \uparrow \infty$ et que $E[U_{t_n}] = E[U_{t_n \wedge S}] < \infty$ pour tout n.

Nous choisissons alors K finie, telle que U ne soit pas localement intégrable. Par exemple, $K(\omega) = \frac{1}{\omega}$.

Comme S est $\underline{\underline{F}}_{S-}$-mesurable et engendre $\underline{\underline{F}}$, on a $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}_{S-}$. Donc il existe un processus prévisible positif H tel que $K = H_{S-}$, et l'on peut écrire $U = H \cdot A$. Soit B la projection duale prévisible de A : <u>le processus croissant</u> $H \cdot B$ <u>ne peut être à valeurs finies</u>, car étant prévisible et nul en 0, il serait localement intégrable, et $H \cdot A$ le serait aussi.

REMARQUE 2.4. Soit M la martingale locale $A - B$; on a $[M, M] = A$ et le processus croissant $\int_0^t H_s^2\, d[M,M]_s$ est donc à valeurs finies. Cependant les martingales locales $(H_\wedge n)\cdot M$ ne convergent pas vers une semimartingale. Cela répond par la négative à une question de Meyer.

Le théorème suivant, dû à Jeulin [8], donne une condition suffisante pour que H soit compatible avec la décomposition canonique de la semimartingale spéciale X .

THEOREME 2.5. Soit X une semimartingale spéciale de décomposition canonique $X = M+A$ et soit H un processus prévisible X-intégrable. Alors $H\cdot X$ est spéciale si et seulement si $H\cdot M$ existe au sens des martingales locales et $H\cdot A$ au sens de Stieltjes. En particulier, si X est à variation finie prévisible et si H est X-intégrable, $H\cdot X$ est une intégrale de Stieljes.

Démonstration. X et $Y = H\cdot X$ sont spéciales si et seulement s'il existe un processus croissant D localement intégrable tel que $|\Delta X| \vee |\Delta Y| \leq D$. Dans ce cas $|\Delta(H^n\cdot X)| \leq D$ et on conclut que la décomposition canonique de $Y^n = H^n\cdot M + H^n\cdot A$ converge vers la décomposition canonique de Y , ce qui entraîne l'existence de $H\cdot M$ et $H\cdot A$ au sens habituel. En effet $H\cdot A$ existe au sens usuel puisque l'espace vectoriel des processus prévisibles à variation finie est fermé dans $\mathcal{S}$ et $H\cdot M$ existe car le crochet $[H^n\cdot M\, ,\, H^n\cdot M]$ tend en croissant vers le crochet de la partie martingale locale de Y .

Voici un corollaire important qui montre que notre définition et celle de Jacod sont équivalentes :

COROLLAIRE 2.6. Si H appartient à $L(X)$, le processus

$$U_t = \sum_{0\leq s\leq t} \Delta X_s\, 1_{\{|H_s\, \Delta X_s| > 1 \text{ ou } |\Delta X_s| > 1\}}$$

est à variation bornée. Soit Z la semimartingale $X-U$, dont les sauts sont bornés par 1 et soit $Z=M+A$ sa décomposition canonique. Alors les trois intégrales stochastiques $H\cdot U$, $H\cdot M$ et $H\cdot A$ existent au sens usuel et leur somme est $H\cdot X$.

Démonstration. Nous désignons par Y la semimartingale $H \cdot X$. Comme Y et X sont des processus càdlàg , il n'y a qu'un nombre fini de sauts pour lesquels on a $|\Delta X| > 1$ ou $|\Delta Y| > 1$. Donc U existe (c'est une somme finie !) et $H \cdot U$ existe. Ainsi $H \cdot Z$ existe par différence et $|\Delta(H \cdot Z)| = |H \Delta Z| \leq 1$. D'après le théorème 2.5, $H \cdot A$ et $H \cdot M$ existent puisque $H \cdot Z$ est aussi spéciale.

Remarques 2.7. Ce corollaire est un résultat technique essentiel. Voici quelques conséquences immédiates et fort utiles :

a) Soient H et K appartenant à $L(X)$. Alors $(H+K) \in L(X)$ et $(H+K) \cdot X = H \cdot X + K \cdot X$.

b) Soient H et K deux processus prévisibles. Supposons $H \in L(X)$. Alors $K \in L(H \cdot X)$ si et seulement si $(KH) \in L(X)$ et dans ce cas $K \cdot (H \cdot X) = (KH) \cdot X$.

c) Soient H un processus X-intégrable, K^n et K des processus prévisibles, majorés en valeur absolue par $|H|$ et tels que K^n converge simplement vers K . Alors tous ces processus sont X-intégrables et $K^n \cdot X$ tend vers $K \cdot X$ dans $\mathcal{S}$.

d) On suppose donné un espace mesurable $(U, \mathcal{U})$ et on considère des applications $X : (u, t, \omega) \longrightarrow X_t^u(\omega)$ à valeurs réelles sur $U \times R^+ \times \Omega$. Nous dirons que X est mesurable sans autre précision pour exprimer la mesurabilité de X par rapport à $\mathcal{U} \otimes \mathcal{B}(R^+) \otimes \mathcal{F}$. Nous interprétons toujours X comme une famille, indexée par u , de processus stochastiques $X^u = (X_t^u)_{t \geq 0}$ et nous considérons la phrase "le processus X^u dépend mesurablement de u " comme équivalente à " X est mesurable". Soit $(P_u)_{u \in \mathcal{U}}$ une famille de lois telles que pour tout $A \in \mathcal{F}$, l'application $u \longrightarrow P_u(A)$ soit mesurable par rapport à $\mathcal{U}$ et qu'il existe une même tribu séparable $\mathcal{G}$ dont la $(\mathcal{F}, P_u)$ complétion soit égale à $\mathcal{F}$ pour tout $u \in \mathcal{U}$. D'après [15] on sait que si (X^u) est une famille de P_u-semimartingales spéciales dépendant mesurablement de u , la décomposition canonique dépend aussi mesurablement de u . Si $(H^u)_{u \in \mathcal{U}}$ est une famille de processus prévisibles dépendant mesurablement du paramètre u et si pour tout u , H^u est X^u-intégrable, le théorème 2.5 montre qu'on peut choisir une version de $H^u \cdot X^u$ dépendant mesurablement de u .

3. Intégrales stochastiques et processus contrôlant X .

Soient X une semimartingale et A un processus croissant. Nous dirons d'après Métivier et Pellaumail que A contrôle X si l'on a pour tout processus H prévisible borné et tout temps d'arrêt T :

$$(*)\qquad E[\sup_{t<T}(\int_0^t H_s\,dX_s)^2] \le E[A_{T-}\int_0^{T-} H_s^2\,dA_s] \qquad (A_{0-}=0)\ .$$

EMERY [6] a montré que X^n converge vers 0 dans $\mathcal{S}$ si et seulement si les X^n sont respectivement contrôlés par des processus croissants A^n tels que A^n_∞ converge vers 0 en probabilité. La proposition suivante donne une caractérisation analogue des ensembles bornés de $\mathcal{S}$.

PROPOSITION 3.1. Un sous-ensemble $\mathcal{X}$ de $\mathcal{S}$ est borné si et seulement s'il existe un ensemble $\mathcal{G}$ de processus croissants contrôlant $\mathcal{X}$ tel que l'ensemble $\{A_\infty\ ,\ A\in\mathcal{G}\}$ soit borné dans L^0 .

Démonstration. Supposons l'ensemble des variables aléatoires A_∞, A appartenant à $\mathcal{G}$, borné dans L^0. $\varepsilon>0$ étant fixé , il existe un réel c tel que $P[A_\infty \ge c] \le \varepsilon$ pour tout $A\in\mathcal{G}$. Si $T=\inf\{t, A_t \ge c\}$, si A contrôle X et si $Y=X^{T-}$, alors $\sup_{H\le 1} E|H\cdot Y_\infty|^2 \le c^2$. Prenons $d=c/\sqrt{\varepsilon}$. Alors $P[|H\cdot Y_\infty| \ge d] \le \varepsilon$ et $P[|H\cdot X_\infty| \ge d] \le 2\varepsilon$ car $P[A_\infty \ge c] \le \varepsilon$. Ainsi il existe un réel d tel que $P[|H\cdot X_\infty| \ge d] \le 2\varepsilon$ pour tout $X\in\mathcal{X}$ et tout processus prévisible H borné par 1. Donc $\mathcal{X}$ est borné dans $\mathcal{S}$. Passons à la réciproque de la proposition . Si $\mathcal{X}$ est borné dans $\mathcal{S}$, l'ensemble $\{[X,X]_\infty\ ,\ X\in\mathcal{X}\}$ est borné dans L^0 et il en est de même pour l'ensemble $B=\{\sum_s |\Delta X_s|\, 1_{\{|\Delta X_s|\ge 1\}}\ ,\ X\in\mathcal{X}\}$. Soient $\bar{X}_t = X_t - \sum_{s\le t}\Delta X_s\, 1_{\{|\Delta X_s|\ge 1\}}$ et $\bar{\mathcal{X}}=\{\bar{X}\ ,\ X\in\mathcal{X}\}$. Comme l'ensemble B est borné dans L^0 , l'ensemble $\bar{\mathcal{X}}$ est borné dans $\mathcal{S}$. Si $\bar{X}$ appartient à $\bar{\mathcal{X}}$, $\bar{X}$ est à sauts bornés par 1 , si bien que $\bar{X}$ est une semimartingale spéciale de décomposition canonique $\bar{X} = M+V$, M étant une martingale locale localement de carré intégrable et V un processus prévisible à variation finie. La décomposition canonique est une opération continue sur $\bar{\mathcal{X}}$ d'après le théorème 1.11. Ainsi l'ensemble $\{\int_0^\infty |dV| + [M,M]_\infty + \langle M,M\rangle_\infty \ , \ \bar{X}\in\bar{\mathcal{X}}\}$ est borné dans L^0 ($\langle M,M\rangle$ désigne la projection duale prévisible du processus croissant $[M,M]$; celle-ci existe car $[M,M]$ est localement intégrable). D'après l'inégalité de Métivier-Pellaumail [11], le processus

$$A_t = 3(1 + 4[M,M]_t + 4\langle M,M\rangle_t + \int_0^t |dV_s| + \sum_{s\leq t} |\Delta X_s| \, 1_{\{|\Delta X_s|\geq 1\}})$$

contrôle la semimartingale X et l'ensemble des variables aléatoires A_∞ est borné dans L^0 lorsque X parcourt l'ensemble $\mathcal{S}$.

Voici un corollaire immédiat :

PROPOSITION 3.2. <u>Soient</u> X <u>une semimartingale</u>, A <u>un processus croissant contrôlant</u> X <u>et</u> H <u>un processus prévisible tel que</u> $\int_0^\infty H_s^2 \, dA_s < +\infty$. <u>Alors</u> H <u>est</u> X-<u>intégrable</u>.

<u>Démonstration</u>. Le processus croissant $B_t = \int_0^t (H_s^2+1) \, dA_s$ contrôle les semimartingales $Y^n = H \, 1_{\{|H|\leq n\}}\cdot X$. Cet ensemble est donc borné dans $\mathcal{S}$ et d'après la propriété 2.2f, H est X-intégrable.

On peut maintenant se poser le problème de la réciproque. Soit H un processus prévisible et X une semimartingale telle que $H\in L(X)$. Existe-t-il un processus croissant A contrôlant X tel que $\int_0^\infty H_s^2 \, dA_s$ soit fini ? Lorsque X est à variation finie, il semble que le meilleur contrôle possible soit donné par $A_t = \int_0^t |dX|$, ce qui rend la réciproque douteuse ! Toutefois, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 3.3 <u>Si</u> $H\in L(X)$, <u>il existe un processus croissant</u> A <u>contrôlant</u> X <u>tel que</u> $\int_0^\infty |H_\lambda| \, |dA_\lambda| < +\infty$.

Démonstration. Soit E l'ensemble $\{(s,\omega)\ ,\ |H_s\ \Delta X_s|\vee|\Delta X_s|>1\}$. Comme H est X-intégrable , cet ensemble est à coupe finie pour presque tout ω . Ainsi le processus $U_t = \sum_{0\le s\le t} \Delta X_s\, 1_E(s,\omega)$ est à variation bornée et $\int_0^\infty |H|\ |dU| < +\infty$. Grâce à l'inégalité de Schwartz, on vérifie aisément que U est contrôlé par $B_t = \int_0^\cdot |dU_s|$ et que $Y = X-U$ est spéciale . Si $Y = M + C$ est la décomposition canonique de Y , le théorème 2.5 montre que $H\cdot M$ et $H\cdot C$ existent au sens usuel . Comme $|H\Delta Y| \le 1$ on a même mieux ; la martingale locale $H\cdot M$ est localement de carré intégrable en vertu de l'inégalité suivante de [16] : si T est un temps d'arrêt , $E[\ H^2\cdot[M,M]_T\ ] \le 4\ E[\ H\cdot Y\ ,\ H\cdot Y\ ]_T$.

En outre $|\Delta Y| \le 1$ implique aussi que la martingale locale M est localement de carré intégrable . On en déduit que $\langle H\cdot M, H\cdot M\rangle$ et $\langle M,M\rangle$ existent et que $H^2\cdot\langle M,M\rangle = \langle H\cdot M,\ H\cdot M\rangle$. D'après l'inégalité de Métivier- Pellaumail [11], on sait que le processus $A_t = 4(\ \langle M,M\rangle_t + [\ M,M\ ]_t + \int_0^\infty |dU| + 1)$ contrôle la semimartingale X . De plus $\int_0^\infty |H|dA < +\infty$.

REMARQUE. On trouvera d'autres applications de la topologie des semimartingales dans la monographie de Jeulin <u>Semimartingales et grossissement d'une filtration</u> (Lecture Notes in Math., vol. 833). Soient $(\mathcal{F}_t)$ et $(\mathcal{G}_t)$ deux filtrations telles que pour tout t on ait $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$, et supposons que toute $\mathcal{F}$-semimartingale soit une $\mathcal{G}$-semimartingale ; on peut alors montrer que l'application identique de $\mathcal{S}(\mathcal{F})$ dans $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ est continue, mais on ignore s'il existe une loi Q équivalente à P telle que l'application identique soit continue de $\mathcal{S}^p(\mathcal{F},P)$ dans $\mathcal{S}^p(\mathcal{G},Q)$. A ce sujet, on peut se demander si, étant donnée une partie bornée K de $\mathcal{S}$, il existe une loi Q équivalente à P pour laquelle K soit bornée dans $\mathcal{S}^p$ ($p\geq 1$).

4. La topologie des martingales locales.

Nous avons vu que l'espace des martingales locales n'est pas en général un sous-espace fermé de $\mathcal{S}$, ce qui a amené EMERY à définir une autre topologie sur l'espace des martingales locales . Si A est un processus croissant localement intégrable, on note $\tilde{A}$ sa projection duale prévisible. On désigne par $\mathcal{M}^p_{loc}$ l'espace vectoriel des martingales locales localement de puissance p-ième intégrables muni de la quasi-norme $\|M\|_p = E[\,1\wedge(\widetilde{M^{*}})^p_\infty]$ .EMERY a montré que $\mathcal{M}^1_{loc}$ est un espace vectoriel métrisable complet (Métrisabilité de quelques espaces de processus aléatoires paru dans les Lecture Notes in M. 784 p. 140–147) et la question se pose : est-ce que $\mathcal{M}^p_{loc}$ est aussi complet pour $p > 1$?

THEOREME 4.1. <u>L'espace</u> $\mathcal{M}^p_{loc}$ <u>est complet pour tout</u> $p \geq 1$.

<u>Démonstration</u> . Soit (M^n) une suite de Cauchy de $\mathcal{M}^p_{loc}$. On peut en extraire une sous-suite encore notée (M^n) telle que $P[\tilde{C}^n_\infty \geq (\frac{1}{2})^n] \leq (\frac{1}{2})^n$ où $C^n_t = [(M^{n+1} - M^n)^*]^p_t$. Ainsi la série $\Sigma\tilde{C}^n_t$ converge p.s. pour tout $t \leq +\infty$ et la somme est un processus croissant prévisible , donc localement borné . Par arrêt nous pouvons supposer que cette série est majorée par une constante a . Comme $E[\tilde{C}^n_\infty] \leq (\frac{1}{2})^n(1+a)$ et que les espérances $E[\tilde{C}^n_\infty]$ et $E[C^n_\infty]$ sont égales , la série $\Sigma\, E[C^n_\infty]^{1/p}$ converge aussi , si bien que la suite (M^n) converge dans $\mathcal{M}^p$ et le théorème est démontré .

REFERENCES

[1] CHOU C.S., MEYER P.A. et STRICKER C. : Sur les intégrales stochastiques de processus prévisibles non bornés. Lecture Notes in Math., 784, p. 128-139 (1980).

[2] DELLACHERIE C. : Capacités et processus stochastiques. Springer, 1972.

[3] EMERY M. : Compensation de processus à V.F. non localement intégrable. Lecture Notes in Math., 784, p. 152-160 (1980).

[4] EMERY M. : Une topologie sur l'espace des semimartingales. Séminaire de Probabilités XIII, Lecture Notes in Math., 721, p. 260-280 (1979).

[5] EMERY M. : Un théorème de Vitali-Hahn-Saks pour les semimartingales. Z. W. 51, p. 95-100 (1980).

[6] EMERY M. : Equations différentielles stochastiques. La méthode Métivier-Pellaumail. Lecture Notes in Math., 784, p. 118-124 (1980).

[7] JACOD J. : Calcul stochastique et problème de martingales. Lecture Notes in Math., 714, Springer (1979).

[8] JEULIN T. : Comportement des semimartingales dans un grossissement de filtration. Z.W. 52, 149-182 (1980).

[9] LENGLART E. : Appendice à l'exposé : présentation unifiée de certaines inégalités de la théorie des martingales. Lecture Notes in Math., 784, p. 49-52 (1980).

[10] MEMIN J. : Espace de semimartingales et changement de probabilités. Z.W. 52, p. 9-39 (1980).

[11] METIVIER M. et PELLAUMAIL J. : Stochastic integration. Ecole Polytechnique de Paris, rapport interne n° 44.

[12] MEYER P.A. et STRICKER C. : Sur les semimartingales au sens de Laurent Schwartz. A paraître dans Advances in Mathematics.

[13] NIKIŠIN E.M. : Resonance theorems and superlinear operators. Uspehi. Mat. Nauk. 25, 1970, p. 125-187 de la traduction anglaise.

[14] STRICKER C. : Prolongement des semimartingales. Lecture Notes in Math., 784, p. 104-111 (1980).

[15] STRICKER C. et YOR M. : Calcul stochastique dépendant d'un paramètre. Z.W. 45, 109-133 (1978).

[16] STRICKER C. : Quasimartingales, martingales locales, semimartingales et filtration naturelle. Z.W. 39, p. 55-63 (1977).

[17] YOR M. : Les inégalités de sous-martingales comme conséquence de la relation de domination. Stochastics, vol. 3, n° 1, p. 1-17 (1979).

Institut de Recherche
Mathématique Avancée
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG Cédex