

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CHRISTOPHE STRICKER

Sur deux questions posées par Schwartz

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 490-492

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__490_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR DEUX QUESTIONS POSEES PAR L. SCHWARTZ

par C. Stricker

Dans [1] SCHWARTZ a montré la proposition suivante :

Soient X une semimartingale continue, A un ouvert de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) X est croissante par morceaux sur A .
- 2) X est équivalente sur A à un processus adapté càdlàg croissant.

Si X n'est pas continue, 2) \Rightarrow 1) est toujours trivialement vraie, mais 1) n'implique pas 2). Voici un contre-exemple.

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ un espace probabilisé filtré et X un processus.

On dit que X est croissant par morceaux (resp. équivalent à un processus Y) sur un ouvert aléatoire A si pour presque tout ω et pour tout intervalle

$[a, b]$ contenu dans la coupe $A(\omega)$ de A , $X(\omega)$ est croissant (resp. $X(\omega) - Y(\omega)$ est constant) sur $[a, b]$. Supposons qu'il existe une suite strictement croissante de temps d'arrêt (T_n) totalement inaccessibles à valeurs dans $[0, 1]$.

Soit X la martingale de carré intégrable purement discontinue dont les sauts sont : $\Delta N_{T_i} = \frac{1}{i}$. Notons B^i le processus croissant : $B^i = \frac{1}{i} 1_{[T_i, +\infty[}$ et

soit \tilde{B}^i sa projection duale prévisible. Sur chaque intervalle $[T_i, T_{i+1}[$, $N_t = N_{T_i} - \tilde{B}_t^{i+1}$. Ainsi la martingale $X = -N$ est croissante par morceaux sur l'ouvert $A = \bigcup_i]T_i, T_{i+1}[$ mais il n'existe pas de processus croissant adapté

C équivalent à X sur A . En effet, raisonnons par l'absurde et supposons que C existe. Chaque \tilde{B}^i est croissant sur $[T_{i-1}, T_i[$, continu au point T_i , nul avant T_{i-1} et constant après T_i . Or $C \geq 1_A$. $C = \sum_i \tilde{B}^i$ qui est prévisible et croissant, donc localement intégrable. Par arrêt nous pouvons supposer que $E[1_A \cdot C_\infty] < \infty$. Comme \tilde{B}^i est la projection duale prévisible de B_i , il en

résulte que $E[1_A \cdot C_\infty] = E[\sum_i B_\infty^i]$; donc $\sum_i B_\infty^i$ converge, ce qui est absurde car

$$\sum_i \Delta N_{T_i} = +\infty !$$

Ce contre-exemple permet de répondre par la négative à une deuxième question de SCHWARTZ [2] . Est-ce qu'une semimartingale X définie sur $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ qui est continue sur un ouvert aléatoire A est équivalente (sur A) à une semimartingale continue ? Pour cela il suffit de prendre par exemple la filtration naturelle d'un processus de Poisson et de remplacer l'intervalle $[0, 1]$ par $[0, +\infty]$. Toutes les martingales locales sont purement discontinues, et donc les seules semimartingales continues sont les processus adaptés continus à variation bornée. Reprenons la semimartingale X et l'ouvert A précédents et supposons que X soit équivalente sur A à un processus à variation bornée C . Dans ce cas $1_A \cdot C = \sum_i \tilde{B}_i$, ce qui est absurde !

Toutefois si l'ouvert A est accessible on a une réponse positive.

PROPOSITION 1. Soit X une semimartingale sur $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ qui est continue sur un ouvert accessible A . Alors elle est équivalente sur A à une semimartingale continue.

DEMONSTRATION. Pour tout rationnel h nous posons $D_h = \inf\{t \geq h, t \notin A\}$.

Comme A est un ouvert accessible, D_h est un temps d'arrêt accessible. Ainsi il existe une suite (T_n) de temps d'arrêt prévisibles à graphes deux à deux disjoints qui recouvrent les graphes des temps d'arrêt D_h lorsque h parcourt les rationnels. Soient $B = \bigcup_{h \in \mathbb{Q}}]h, D_h]$, $C = \bigcup_n [T_n]$ et $Y = 1_{B \setminus C} \cdot X$.

La semimartingale Y est continue : en effet si T est un temps d'arrêt ,

$$\Delta Y_T = 1_{B \setminus C}(T) \Delta X_T = 0 \text{ car } B \setminus C \text{ est inclus dans } A \text{ et } X \text{ est continue sur } A .$$

Il reste à vérifier que X est bien équivalente à Y sur A . Restreignons la loi P à l'ensemble $\{D_h > u > h\}$, h et u étant deux rationnels fixés. Pour $h \leq t \leq u$, $Y_t - Y_h = X_t - X_h - \sum_n \Delta X_{T_n} 1_{\{t \geq T_n > h\}}$, la série convergeant en

probabilité. Comme X est continue sur $[h, u]$, $Y_t - Y_h = X_t - X_h$ et les deux semimartingales X et Y sont équivalentes.

PROPOSITION 2. Soit X une semimartingale accessible. Il existe un plus grand ouvert A tel que X soit équivalente sur A à une semimartingale continue.

DEMONSTRATION. Pour tout h rationnel, nous posons : $D_h = \inf\{t \geq h, X_t \neq X_{t-}\}$ et $A = \bigcup_{h \in \mathbb{Q}^+}]h, D_h[$. Comme A est le plus grand ouvert sur lequel X est continue, il suffit de démontrer que X est équivalente sur A à une semimartingale continue Y . Il existe une suite de temps d'arrêt prévisibles (T_n) qui recouvre la partie accessible des temps d'arrêt D_h lorsque h parcourt les rationnels positifs. Soient $B = \bigcup_h]h, D_h]$, $C = \bigcup_n [T_n$ et $Y = 1_{B \cup C} \cdot X$. On vérifie comme avant que la semimartingale Y est continue car X ne saute qu'à des temps d'arrêt accessibles. De même X est équivalente à Y sur A .

=====:

REFERENCES

- [1] SCHWARTZ L. : Semimartingales sur des variétés et martingales conformes sur des variétés analytiques complexes. Lecture Notes in M. n° 780 page 26 (1980).
- [2] SCHWARTZ L. : Article à paraître.