

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CHANTHA YOEURP

Sur la dérivation stochastique au sens de Davis

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 399-412

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__399_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LA DERIVATION STOCHASTIQUE

AU SENS DE M.H.A. DAVIS

CH. YOEURF^(*)

Isaacson [2] a montré que si (B_t) est un mouvement brownien et (H_t) est un processus prévisible continu, alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, le rapport

$\frac{1}{B_{t+\varepsilon} - B_t} \int_t^{t+\varepsilon} H_s dB_s$ converge en probabilité vers H_t , quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Nous avons

donné un contre-exemple ([7]) prouvant que cette propriété devient fautive, en général, si on remplace le mouvement brownien par une martingale continue quelconque.

De son côté, M.H.A. Davis [1] a introduit une autre notion de dérivation stochastique par rapport à un mouvement brownien, en étudiant l'expression suivante :

$$\frac{1}{B_{T_t^\varepsilon} - B_t} \int_t^{T_t^\varepsilon} H_s dB_s, \text{ où } T_t^\varepsilon = \text{Inf}\{s > t / |B_s - B_t| \geq \varepsilon\}$$

L'objet de cet article est l'étude de cette notion de dérivation dans le cas d'une semi-martingale continue.

Notations et rappels :

On travaille sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ vérifiant les conditions habituelles. On utilise les notations suivantes :

\mathcal{L}^c : espace des martingales locales continues.

\mathcal{V} : espace des processus continus à droite, adaptés, à variation finie sur tout compact.

\mathcal{V}^c : sous-espace de \mathcal{V} , constitué de processus continus.

\mathcal{S} : espace des semi-martingales.

\mathcal{S}^c : espace des semi-martingales continues.

Pour tout processus continu adapté (X_t) et pour tout t.a. fini S , on introduit les t.a. suivants :

$$T_S^\varepsilon(X) = \text{Inf}\{s > S / |X_s - X_S| \geq \varepsilon\}$$
$$= \infty \text{ si } \{\cdot\} = \emptyset$$

$$T_S(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_S^\varepsilon(X)$$

(*) Université Paris VI - Laboratoire des Probabilités - Tour 56 - Couloir 46-56
3ème Etage - 4, Place Jussieu - 75230 PARIS CEDEX 05

Quand $S = 0$, on notera simplement $T^E(X), T(X)$. On omettra X , s'il n'y a pas de risque de confusion.

Supposons que $X = (X_t)$ soit une semi-martingale continue, et soit $H = (H_t)$ un processus prévisible càdlàg. Définissons $Y = (Y_t)$ et $K = (K_t)$, en posant : $Y_t = X_{S+t} - X_S$, $K_t = H_{S+t}$. Alors, Y et K sont respectivement semi-martingale nulle en 0 et processus prévisible càdlàg, relativement à la filtration (\mathcal{H}_{S+t}) . De plus, on a $T_S^E(X) = S + T^E(Y)$. Il est donc facile de voir que l'on a l'égalité suivante :

$$\frac{\int_S^{T_S^E(X)} H_s dX_s}{X_{T_S^E(X)} - X_S} \mathbb{1}_{(T_S^E(X) < \infty)} = \frac{\int_0^{T^E(Y)} K_s dY_s}{Y_{T^E(Y)}} \mathbb{1}_{(T^E(Y) < \infty)}$$

Ainsi, sans perdre de généralité, on peut se limiter à l'étude de la dérivation par rapport à X , au point 0, le résultat obtenu reste valable pour un t.a. fini S . Mais alors, on fera attention à ne pas supposer que $X_0 = 0$, lorsque (H_t) est de la forme $(h(X_t))$, comme dans la proposition (1-3).

On rappelle ici deux cas particuliers d'inégalités de normes pour les intégrales stochastiques ([6]), que l'on utilise dans la suite. Etant donné une martingale locale $M = (M_t)$ et un processus prévisible $H = (H_t)$, il existe des constantes universelles c_1 et c'_p , $p \in [1, \infty[$, telles que :

$$(1) \quad \left\| \int_0^\infty H_s dM_s \right\|_1 \leq c_1 \left\| \sup_{s \geq 0} |H_s| \right\|_2 \left\| M_\infty \right\|_2$$

$$(2) \quad \left\| \int_0^\infty H_s dM_s \right\|_p \leq c'_p \left\| \sup_{s \geq 0} |H_s| \right\|_p \left\| M \right\|_{BMO}$$

1 - Cas d'une martingale continue.

L'article [1] de M.H.A. Davis comporte en tout deux théorèmes.

Son premier résultat, relatif à la convergence presque sûre, reste encore vrai, si l'on remplace le temps constant t par un t.a. fini S , mais nous pensons qu'il n'en est pas de même pour son deuxième résultat, relatif à la convergence dans L^p .

Dans ce paragraphe, seule la proposition (1-4) se ramène au cas d'un mouvement brownien (par changement de temps) et utilise par conséquent le théorème 1 de Davis.

Proposition (1-1) :

Etant donnée $X = (X_t) \in \mathcal{L}^c$, nulle en 0, soient T^c et T les t.a. correspondants (voir les notations dans le paragraphe précédent).

Soit $H = (H_t)$ un processus prévisible càdlàg.

Alors, le rapport : $\frac{\int_0^{T^\varepsilon} H_s dX_s}{X_{T^\varepsilon}} \mathbb{1}_{(T=0, T^\varepsilon < \infty)}$ converge en probabilité vers

$H_0 \mathbb{1}_{(T=0)}$, quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Démonstration :

Notons d'abord que tout processus prévisible càdlàg est localement borné, de sorte que l'intégrale stochastique $\int_0^t H_s dX_s$ est bien définie.

Soit (T_n) une suite de t.a. tendant en croissant vers ∞ tels que $H_t - H_0$ soit borné par n , pour tout $t \in [0, T_n]$. Posons :

$$\delta^\varepsilon = \frac{\int_0^{T^\varepsilon} (H_s - H_0) dX_s}{X_{T^\varepsilon}} \mathbb{1}_{(T=0, T^\varepsilon < \infty)}$$

on peut écrire :

$$|\delta^\varepsilon| = \frac{1}{\varepsilon} \left| \int_0^{T^\varepsilon \wedge T_n} (H_s - H_0) dX_s \right| \mathbb{1}_{(T=0, T^\varepsilon < \infty, T^\varepsilon \leq T_n)} + \frac{1}{\varepsilon} \left| \int_0^{T^\varepsilon} (H_s - H_0) dX_s \right| \mathbb{1}_{(T=0, T^\varepsilon < \infty, T^\varepsilon > T_n)}$$

Le 2^e terme du 2^e membre de l'égalité converge en probabilité vers 0, quand $n \rightarrow \infty$, en effet :

$$P\{T=0, T^\varepsilon < \infty, T^\varepsilon > T_n\} \leq P\{T_n < T^\varepsilon < \infty\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Montrons que le 1^{er} terme du 2^e membre de l'égalité converge vers 0 en probabilité, quand $\varepsilon \rightarrow 0$; il y a en fait convergence dans L^p , $p \geq 1$. En effet, d'après l'inégalité (2) (voir les rappels), on a :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon} \left\| \int_0^{T^\varepsilon \wedge T_n} (H_s - H_0) dX_s \right\| \mathbb{1}_{(T=0, T^\varepsilon < \infty, T^\varepsilon \leq T_n)} \Big\|_p \\ & \leq \frac{c'}{\varepsilon} \left\| \sup_{s \in [0, T^\varepsilon \wedge T_n]} |H_s - H_0| \right\| \mathbb{1}_{(T=0)} \Big\|_p \left\| X^{T^\varepsilon} \right\|_{\text{BMO}} \end{aligned}$$

où X^{T^ε} désigne l'arrêté de X au t.a. T^ε .

$$\leq c'_p \left\| \sup_{s \in [0, T^\varepsilon \wedge T_n]} |H_s - H_0| \right\|_p, \text{ qui converge vers } 0, \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0,$$

d'après la convergence dominée et la continuité à droite de H . Pour finir, il suffit de remarquer que $H_0 \mathbb{1}_{(T^\varepsilon < \infty, T = 0)}$ converge vers $H_0 \mathbb{1}_{(T = 0)}$, quand $\varepsilon \rightarrow 0$. \square

On donne maintenant une condition sur H pour que la convergence dans la proposition (1-1) ait lieu dans L^p .

Proposition (1-2) :

Etant donnée $X = (X_t) \in \mathcal{L}^c$, nulle en 0, soient T^ε et T les t.a. correspondants.

Soit $H = (H_t)$ un processus prévisible càdlàg tel qu'il existe un t.a. $S > 0$ vérifiant : $\sup_{s \in [0, S]} |H_s| \in L^p$, $p \geq 1$.

Alors, le rapport :
$$\frac{\int_0^{T^\varepsilon} H_s dX_s}{X_{T^\varepsilon}} \mathbb{1}_{(T^\varepsilon < S, T = 0)}$$
 converge dans L^p vers

$H_0 \mathbb{1}_{(T = 0)}$, quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Remarque :

Supposer qu'il existe un t.a. $S > 0$ tel que $\sup_{s \in [0, S]} |H_s| \in L^p$ revient exactement à supposer que $H_0 \in L^p$. En effet, soit :

$$R = \inf\{s \geq 0 / |H_s - H_0| \geq k\}$$

$$= \infty \text{ si } \{\cdot\} = \emptyset.$$

Alors, R est un t.a. prévisible, strictement positif. Si (R_n) est une suite de t.a. qui l'annoncent, on pose :

$$S = \inf\{s > 0 / s \in \bigcup_n \llbracket R_n \rrbracket\}, \llbracket R_n \rrbracket \text{ désigne le graphe de } R_n$$

$$= \infty \text{ si } \{\cdot\} = \emptyset$$

on a immédiatement que $0 < S < R$ sur $\{R < \infty\}$, et que $\sup_{s \in [0, S]} |H_s - H_0| \leq k$. On en déduit que $\sup_{s \in [0, S]} |H_s| \leq k + |H_0|$ \square

Démonstration de la proposition (1-2).

Posons :

$$\delta^\varepsilon = \frac{1}{X_{T^\varepsilon}} \int_0^{T^\varepsilon} (H_s - H_0) dX_s \quad (T^\varepsilon < S, T = 0)$$

L'inégalité (2) permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \|\delta^\varepsilon\|_p &\leq \frac{c'_p}{\varepsilon} \sup_{s \in [0, T^\varepsilon \wedge S]} \|H_s - H_0\|_1 \quad (T = 0) \|\|_p \|X^{T^\varepsilon}\|_{\text{BMO}} \\ &\leq \frac{c'_p}{\varepsilon} \|\sup_{s \in [0, T^\varepsilon \wedge S]} \|H_s - H_0\|_1 \quad (T = 0)\|_p \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

d'après la convergence dominée et la continuité à droite de H .

Pour terminer, il suffit de remarquer que $H_0 \quad (T^\varepsilon < S, T = 0)$ converge vers $H_0 \quad (T = 0)$, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, car $S > 0$, par hypothèse. \square

Lorsque H_t est de la forme $h(X_t)$, où h est une fonction réelle uniformément continue, on a le résultat suivant (déjà remarqué par Davis [1]), qui est un peu meilleur que la proposition précédente :

Proposition (1-3) :

Etant donnée $X = (X_t) \in \mathcal{L}^c$, soient T^ε et T les t.a. correspondants.

Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue telle que $h(X_0) \in L^p$, $p \geq 1$.

Alors, le rapport : $\frac{1}{X_{T^\varepsilon} - X_0} \int_0^{T^\varepsilon} h(X_s) dX_s \quad (T^\varepsilon < \infty)$ converge dans L^p vers
 $h(X_0) \quad (T < \infty)$, quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Démonstration :

Posons :

$$\delta^\varepsilon = \frac{1}{X_{T^\varepsilon} - X_0} \int_0^{T^\varepsilon} (h(X_s) - h(X_0)) dX_s \quad (T^\varepsilon < \infty)$$

D'après l'inégalité (2), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \|\delta^\varepsilon\|_p &\leq \frac{c'_p}{\varepsilon} \|\sup_{s \in [0, T^\varepsilon]} |h(X_s) - h(X_0)|\|_p \|X^{T^\varepsilon}\|_{\text{BMO}} \\ &\leq \frac{c'_p}{\varepsilon} \|\sup_{s \in [0, T^\varepsilon]} |h(X_s) - h(X_0)|\|_p \end{aligned}$$

Comme h est uniformément continue, on a :

$$\forall \alpha > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } |x-y| \leq \eta \implies |h(x)-h(y)| \leq \alpha,$$

α et η étant ainsi fixés, pour tout $\varepsilon \leq \eta$, on a :

$$\forall s \in [0, T^\varepsilon], |X_s - X_0| \leq \varepsilon \leq \eta, \text{ donc } \sup_{s \in [0, T^\varepsilon]} |h(X_s) - h(X_0)| \leq \alpha.$$

Ce qui montre que le 2^e membre de l'inégalité précédente converge vers 0, quand $\varepsilon \rightarrow 0$. \square

Remarque :

Dans la démonstration précédente, on vient de voir que si l'on supprime l'hypothèse d'intégrabilité de $h(X_0)$, le rapport $\frac{1}{X_{T^\varepsilon} - X_0} \int_0^{T^\varepsilon} (h(X_s) - h(X_0)) dX_s$ ($T^\varepsilon < \infty$) converge toujours vers 0 dans L^p , pour tout $p \geq 1$. \square

La proposition suivante donne un critère pour que la convergence ait lieu presque sûrement :

Proposition (1-4) :

Etant donnée $X = (X_t) \in \mathcal{D}^c$, nulle en 0, soient T^ε et T les t.a. correspondants. On pose $c_t = \langle X, X \rangle_t$ et on définit (i_t) comme inverse à gauche de (c_t) .

Soit $H = (H_t)$ un processus prévisible càdlàg vérifiant la condition suivante : il existe deux constantes strictement positives α et k telles que

$$\limsup_{s \searrow 0} \frac{|H_s - H_0|}{s^\alpha} \leq k \quad \text{p.s.}$$

Alors, le rapport : $\frac{1}{X_{T^\varepsilon}} \int_0^{T^\varepsilon} H_s dX_s$ ($T^\varepsilon < \infty, T = 0$) converge p.s. vers

H_0 ($T = 0$), quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Démonstration :

Désignons par (j_t) l'inverse à droite de (c_t) et posons $b_t = X_{j_t}$. Alors, on sait que (b_t) est un mouvement brownien relativement à la filtration (\mathcal{F}_{j_t}) , et que $X_t = b_{c_t}$.

Soit :

$$\delta^\varepsilon = \frac{1}{X_{T^\varepsilon}} \int_0^{T^\varepsilon} (H_s - H_0) dX_s \quad (T^\varepsilon < \infty, T = 0).$$

La formule de changement de temps dans les intégrales stochastiques ([3], p. 390, formule (10)) permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\delta^\varepsilon &= \frac{1}{X_{T^\varepsilon}} \int_0^{T^\varepsilon} (H_s - H_0) db_{c_s} \mathbb{1}_{(T^\varepsilon < \infty, T = 0)} \\ &= \frac{1}{X_{T^\varepsilon}} \int_0^{c_{T^\varepsilon}} (H_{i_s} - H_0) db_s \mathbb{1}_{(T^\varepsilon < \infty, T = 0)}.\end{aligned}$$

Mais, sur $\{T^\varepsilon < \infty\}$, on a : $c_{T^\varepsilon} = \tau^\varepsilon \stackrel{\text{Déf.}}{=} \inf\{s \geq 0 / |b_s| \geq \varepsilon\}$.

On a donc :

$$|\delta^\varepsilon| \leq \frac{1}{\varepsilon} \left| \int_0^{c_{T^\varepsilon}} (H_{i_s} - H_0) db_s \right| \mathbb{1}_{(T = 0)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \text{ d'après le théorème 1 de}$$

Davis ([1]).

Remarque :

A la fin de la démonstration précédente, on ne voit pas très bien l'utilité de l'indicatrice $\mathbb{1}_{(T = 0)}$, laquelle est indispensable dans l'énoncé de la proposition (1-4). Cela provient des conventions faites au point 0 ($c_0 = i_0 = 0$), masquant ainsi une certaine difficulté qui apparaît clairement quand on considère un point t non nul. En effet, si on reprend la démonstration on obtient que sous

la condition $\limsup_{s \searrow 0} \frac{|H_{i_{c_t+s}} - H_{i_{c_t}}|}{s^\alpha} \leq k$, le rapport $\frac{1}{X_{T^\varepsilon} - X_t} \left(\int_0^{T^\varepsilon} H_s dX_s \right) \mathbb{1}_{(T_t^\varepsilon < \infty, T_t = t)}$

converge p.s. vers $H_{i_{c_t}} \mathbb{1}_{(T_t = t)}$, quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Il nous reste encore à prouver que

$H_{i_{c_t}} \mathbb{1}_{(T_t = t)} = H_t \mathbb{1}_{(T_t = t)}$. On a $i_{c_t} = t$ si t est un point de croissance à

gauche de c , mais $T_t = t$ signifie que t est un point de croissance à droite de c .

En fait, l'hypothèse sur H entraîne que $H_{i_{c_t}} = H_{i_{c_t+0}} = H_{j_{c_t}}$. Comme $j_{c_t} = t$

sur $\{T_t = t\}$, on a le résultat désiré. \square

Corollaire (1-5) :

Etant donnée $X = (X_t) \in \mathcal{L}^c$, soient T^ε et T les t.a. correspondants.

Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction telle que sur tout compact K de \mathbb{R} , h est lipschitzienne de rapport μ et d'ordre $\lambda > 0$, c'est-à-dire que :

$\forall x \in K, \forall y \in K, |h(x) - h(y)| \leq \mu |x - y|^\lambda$, λ et μ peuvent dépendre du compact K .

Alors, le rapport : $\frac{1}{X - X_0} \int_0^{T^\varepsilon} h(X_s) dX_s - 1$ ($T^\varepsilon < \infty$) converge p.s. vers
 $h(X_0) - 1$ ($T < \infty$), quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Preuve :

Il suffit de démontrer le corollaire sur chaque ensemble $\{|X_0| \leq n\}$, $n \in \mathbb{N}$.
 Pour cela, d'après la proposition (1-4), il s'agit de vérifier qu'il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $k > 0$ telles que

$$\limsup_{s \searrow 0} \frac{1}{s^\alpha} |h(X_{i_{c_0+s}}) - h(X_{i_{c_0}})| - 1 \quad (|X_0| \leq n) \leq k.$$

Mais, $X_{i_{c_0+s}} = b_{i_{c_0+s}} = b_{c_0+s}$ et $X_{i_{c_0}} = b_{c_0} = X_0$. Il revient donc à vérifier

$$\text{que } \limsup_{s \searrow 0} \frac{1}{s^\alpha} |h(b_{c_0+s}) - h(b_{c_0})| - 1 \quad (|b_{c_0}| \leq n) \leq k.$$

Cette condition est évidemment satisfaite, puisque h est lipschitzienne d'ordre

$$\lambda > 0 \text{ sur } \{|b_{c_0}| \leq n+1\} \text{ et que } \limsup_{s \searrow 0} \frac{|b_{c_0+s} - b_{c_0}|}{\sqrt{2s \operatorname{Log} \operatorname{Log} 1/s}} \leq 1. \quad \square$$

Ce corollaire peut se démontrer facilement sans passer par le mouvement brownien. Voici comment on procède :

On peut se restreindre à $\{|X_0| \leq m\}$, que nous n'écrivons pas, et on considère le compact $[-m-1, m+1]$, sur lequel h est lipschitzienne de rapport μ et d'ordre $\lambda > 0$. On pose :

$$\delta^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \sup_u \left| \int_0^{T^\varepsilon \wedge u} (h(X_s) - h(X_0)) dX_s \right|$$

A l'aide de l'inégalité de Tchebycheff et du lemme de Borel-Cantelli, on montre que la suite $\delta_n^{r_n}$, avec $r_n = \frac{1}{1/\lambda}$, converge p.s. vers 0.

Pour $\varepsilon > 0$, quelconque, mais assez petit, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $r_{n+1} \leq \varepsilon < r_n$. Alors, on a :

$$\delta^\varepsilon \leq \frac{r_n}{r_{n+1}} \delta_n^{r_n} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

c. q. f. d.

2 - Cas d'une semi-martingale continue.

Dans le cas général, la proposition (1-1) n'a pas d'analogue, cela provient du terme à variation finie (non monotone) de la semi-martingale. Par contre, on a le résultat suivant :

Proposition (2-1) :

Etant donnée $X = (X_t) \in \mathcal{J}^c$, soient T^ε et T les t.a. correspondants. Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction localement lipschitzienne.

Alors, le rapport : $\frac{1}{X_{T^\varepsilon} - X_0} \int_0^{T^\varepsilon} h(X_s) dX_s$ $\underset{(T^\varepsilon < \infty)}{1}$ converge en probabilité
vers $h(X_0)$ $\underset{(T < \infty)}{1}$, quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Démonstration :

Soit $X = M + A$ la décomposition canonique de X , et soit :

$$S_n = \text{Inf}\{s \geq 0 / |M_s - M_0| \geq n\}$$

$$= \infty, \text{ si } \{ \cdot \} = \emptyset$$

Il suffit de prouver que pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\delta^\varepsilon \stackrel{\text{Déf.}}{=} \frac{1}{X_{T^\varepsilon} - X_0} \left[\int_0^{T^\varepsilon \wedge S_n} (h(X_s) - h(X_0)) \mathbb{1}_{(|X_0| \leq m)} dX_s \right] \underset{(T^\varepsilon < \infty)}{1} \text{ converge}$$

vers 0 en probabilité, quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Pour cela, remarquons d'abord que X , M et A sont constants sur l'intervalle $[0, T]$. On a, en effet :

$$\forall s \geq 0, \forall \varepsilon > 0, |X_{T^\varepsilon \wedge s} - X_0| \leq \varepsilon$$

D'où, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient :

$$\forall s \geq 0, |X_{T \wedge s} - X_0| = 0.$$

Ce qui montre que X est constant sur $[0, T]$, et il en est de même pour M et A , d'après l'unicité de la décomposition canonique de X .

Cela étant, soit $\varepsilon \leq 1$ et soit k le rapport de lipschitz de h sur le compact $[-m-1, m+1]$. On a alors :

$$|\delta^\varepsilon| \leq \frac{1}{\varepsilon} \left| \int_0^{T^\varepsilon \wedge S_n} (h(X_s) - h(X_0)) \mathbb{1}_{(|X_0| \leq m)} dM_s \right| + \frac{1}{\varepsilon} \left| \int_0^{T^\varepsilon \wedge S_n} (h(X_s) - h(X_0)) \mathbb{1}_{(|X_0| \leq m)} dA_s \right|$$

$$\stackrel{\text{Déf.}}{=} a^\varepsilon + b^\varepsilon,$$

Montrons que a^ε converge vers 0 dans L^2 :

$$\begin{aligned} \|a^\varepsilon\|_2 &= \frac{1}{\varepsilon} \left\{ E \left(\int_0^{T^\varepsilon \wedge S_n} (h(X_s) - h(X_0))^2 \mathbb{1}_{(|X_0| \leq m)} d\langle M, M \rangle_s \right) \right\}^{1/2} \\ &\leq k \left\{ E \left(\int_0^{T^\varepsilon \wedge S_n} \langle M, M \rangle_s \right) \right\}^{1/2} \\ &= k \left\{ E \left(M_{T^\varepsilon \wedge S_n}^2 \right) \right\}^{1/2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} k \left\{ E \left(M_{T \wedge S_n}^2 \right) \right\}^{1/2} = 0, \end{aligned}$$

d'après la convergence dominée et la continuité à droite de M .

Montrons que b^ε converge p.s. vers 0 :

$$|b^\varepsilon| \leq \frac{k\varepsilon}{\varepsilon} \int_0^{T^\varepsilon} |dA_s| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} k \int_0^T |dA_s| = 0.$$

On a donc terminé la démonstration. \square

Remarque :

Comme on a pu voir dans la démonstration précédente, si X se réduit à un processus à variation finie (non monotone et non nul en 0), alors, dans la proposition (2-1), la convergence a lieu presque sûrement. \square

Lorsque le terme à variation finie de X est croissant (resp. décroissant), X est une sous-martingale locale (resp. sur-martingale locale). Dans ces conditions, on a l'analogie de la proposition (1-1) :

Proposition (2-2) :

Etant donnée $X = M + A \in \mathcal{D}^c + \mathcal{V}_+^c$ (resp. $X = M - A \in \mathcal{D}^c - \mathcal{V}_+^c$) une sous-martingale locale (resp. sur-martingale locale), nulle en 0, soit T^ε et T les t.a. correspondants.

Soit $H = (H_t)$ un processus prévisible càdlàg.

Alors, le rapport : $\frac{1}{X_{T^\varepsilon}} \int_0^{T^\varepsilon} H_s dX_s$ ($T^\varepsilon < \infty$, $T = 0$) converge en probabilité

vers H_0 ($T = 0$), quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Démonstration :

On fait la démonstration dans le cas où X est une sous-martingale locale ; le cas d'une sur-martingale locale se ramène au cas précédent en considérant son opposé.

Soit (S_n) une suite de t.a. tendant en croissant vers $+\infty$ tels que $(H_t - H_0)$ soit borné par n , pour tout $t \in [0, S_n]$. Il nous suffit de prouver que, pour tout

$n \in \mathbb{N}$, $\delta^\varepsilon \stackrel{\text{Déf.}}{=} \frac{1}{X_{T^\varepsilon}} \int_0^{T^\varepsilon \wedge S_n} (H_s - H_0) dX_s \mathbb{1}_{(T^\varepsilon < \infty, T = 0)}$ converge vers 0 en probabilité, quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Puisque $(X_{T^\varepsilon \wedge t})$ est une sous-martingale locale, il existe une constante c telle que ([4], théorème 3-2) :

$$\|A_{T^\varepsilon}\|_2 \leq c \left\| \sup_{s \geq 0} |X_{T^\varepsilon \wedge s}| \right\|_2 = c\varepsilon$$

On en déduit que :

$$\|M_{T^\varepsilon}\|_2 \leq \|X_{T^\varepsilon}\|_2 + \|A_{T^\varepsilon}\|_2 \leq (1+c)\varepsilon$$

Cela étant, revenons à δ^ε . On peut écrire :

$$|\delta^\varepsilon| \leq \frac{1}{\varepsilon} \left| \int_0^{T^\varepsilon \wedge S_n} (H_s - H_0) \mathbb{1}_{(T = 0)} dM_s \right| + \frac{1}{\varepsilon} \left| \int_0^{T^\varepsilon \wedge S_n} (H_s - H_0) \mathbb{1}_{(T = 0)} dA_s \right|$$

Déf.
= $a^\varepsilon + b^\varepsilon$.

Pour prouver que a^ε converge vers 0 dans L^1 , on utilise l'inégalité (1), qui permet d'écrire :

$$\|a^\varepsilon\|_1 \leq \frac{c_1}{\varepsilon} \left\| \sup_{s \in [0, T^\varepsilon \wedge S_n]} |H_s - H_0| \mathbb{1}_{(T = 0)} \right\|_2 \|M_{T^\varepsilon}\|_2$$

$$\leq c_1(1+c) \left\| \sup_{s \in [0, T^\varepsilon \wedge S_n]} |H_s - H_0| \mathbb{1}_{(T = 0)} \right\|_2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

d'après la convergence dominée et la continuité à droite de H .

Pour prouver que b^ε converge vers 0 dans L^1 , on utilise l'inégalité de Schwarz qui donne :

$$\|b^\varepsilon\|_1 \leq \frac{1}{\varepsilon} \left\| \sup_{s \in [0, T^\varepsilon \wedge S_n]} |H_s - H_0| \mathbb{1}_{(T = 0)} \right\|_2 \|A_{T^\varepsilon}\|_2$$

$$\leq c \left\| \sup_{s \in [0, T^\varepsilon \wedge S_n]} |H_s - H_0| \mathbb{1}_{(T = 0)} \right\|_2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

D'où le résultat désiré. \square

Dans le cas où H est à variation finie sur tout compact, la formule de changement de variables permet d'obtenir le joli résultat suivant, où la convergence a lieu presque sûrement :

Proposition (2-3) :

Etant donnée $X = (X_t) \in \mathcal{D}^c$, nulle en 0, soient T^ε et T les t.a. correspondants.

Soit $V = (V_t) \in \mathcal{V}$.

Alors, le rapport : $\frac{1}{X_{T^\varepsilon}} \int_0^{T^\varepsilon} V_s dX_s$ $\mathbb{1}_{(T^\varepsilon < \infty, T = 0)}$ converge presque sûrement

vers $V_0 \mathbb{1}_{(T = 0)}$, quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Démonstration :

Posons : $\delta^\varepsilon = \frac{1}{X_{T^\varepsilon}} \int_0^{T^\varepsilon} (V_s - V_0) dX_s$ $\mathbb{1}_{(T^\varepsilon < \infty, T = 0)}$

Par intégration par parties, il vaut :

$$\delta^\varepsilon = \frac{1}{X_{T^\varepsilon}} \left[(V_{T^\varepsilon} - V_0) X_{T^\varepsilon} - \int_0^{T^\varepsilon} X_s dV_s \right] \mathbb{1}_{(T^\varepsilon < \infty, T = 0)}$$

Donc, on obtient la majoration suivante :

$$|\delta^\varepsilon| \leq (|V_{T^\varepsilon} - V_0| + \int_0^{T^\varepsilon} |dV_s|) \mathbb{1}_{(T = 0)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

d'après la continuité à droite de V . \square

Remarque :

Contrairement à ce qu'on pourrait croire, le fait que X se réduit à un processus à variation finie (non monotone) ne simplifie pas les choses : on ne sait pas

démontrer que le rapport $\frac{1}{X_{T^\varepsilon}} \int_0^{T^\varepsilon} H_s dX_s$ $\mathbb{1}_{(T^\varepsilon < \infty, T = 0)}$ converge en probabilité

vers $H_0 \mathbb{1}_{(T = 0)}$, sauf dans le cas où H est une semi-martingale, car alors, on

peut appliquer la formule d'intégration par parties. \square

Nous terminons ce paragraphe en étudiant le cas où X est de la forme
 $X_t = M_t + \int_0^t \phi_s d\langle M, M \rangle_s$, où $(M_t) \in \mathcal{M}^c$ et où (ϕ_t) est un processus prévisible
 càdlàg. On dit alors que X est un processus du type d'Itô généralisé.

Proposition (2-4) :

Etant donné $X_t = M_t + \int_0^t \phi_s d\langle M, M \rangle_s$ un processus du type d'Itô généralisé
nul en 0, soient T^ε et T les t.a. correspondants.

Soit $H = (H_t)$ un processus prévisible càdlàg.

Alors, le rapport : $\frac{1}{X} \int_0^{T^\varepsilon} H_s dX_s$ l ($T^\varepsilon < \infty, T = 0$) converge en probabilité
vers H_0 l ($T = 0$), quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Démonstration :

Soit $L = \zeta \left(- \int_0^\cdot \phi_s dM_s \right)$, l'exponentielle de la martingale locale continue

$-\int_0^t \phi_s dM_s$, qui vaut 1 en 0. Soit (S_n) une suite croissante de t.a., tendant

P-p.s. vers $+\infty$, et tels que L^{S_n} soit une martingale uniformément intégrable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $Q^n = L^{S_n}$.P. Alors, Q^n est une probabilité équivalente à P , et d'après le théorème de Girsanov ([5] p. 377), $(X_t^{S_n})$ est une martingale locale sous la loi Q^n . Définissons maintenant :

$$T^{\varepsilon, n} = \inf\{s \geq 0 / |X_s^{S_n}| \geq \varepsilon\}$$

$$= \infty \text{ si } \{.\} = \emptyset$$

$$T^n = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T^{\varepsilon, n}$$

Alors, d'après la proposition (1-1), l'expression suivante :

$$\frac{1}{\varepsilon} \left| \int_0^{T^{\varepsilon, n} \wedge S_n} (H_s - H_0) dX_s^{S_n} \right| \mathbb{1}_{\{T^{\varepsilon, n} < \infty, T^n = 0\}}$$

converge vers 0 en probabilité sous la loi Q^n , donc aussi sous la loi P .

D'autre part, on a $T^{\varepsilon, n} \wedge S_n = T^\varepsilon \wedge S_n$, car : $T^{\varepsilon, n} = T^\varepsilon$ sur l'ensemble

$\{T^{\varepsilon, n} \leq S_n\} \equiv \{T^\varepsilon \leq S_n\}$. Donc finalement, $\frac{1}{\varepsilon} \left| \int_0^{T^\varepsilon \wedge S_n} (H_s - H_0) dX_s \right| \mathbb{1}_{\{T^\varepsilon \leq S_n, T = 0\}}$

converge vers 0 en probabilité sous la loi P . D'où le résultat désiré, puisque $S_n \nearrow +\infty$.

BIBLIOGRAPHIE :

- [1] M.H.A. DAVIS : On stochastic differentiation, SIAM, Theory of Probability and its applications, vol. 20, N° 4 (1975).
- [2] D. ISAACSON : Stochastic integrals and derivatives, Ann. Math. Stat., 40 (1969), p. 1610-1616.
- [3] Y. LE JAN : Martingales et changements de temps. Sém. Proba. XIII, Lect. Notes in Math. N° 721, Springer Verlag (1979).
- [4] E. LENGLART, D. LEPINGLE, M. PRATELLI : Présentation unifiée de certaines inégalités de la théorie des martingales. Sém. Proba. XIV, Lect. Notes in Math. N° 784, Springer Verlag (1980).
- [5] P.A. MEYER : Un cours sur les intégrales stochastiques. Sém. Proba. X, Lect. Notes in Math. N° 511, Springer Verlag (1976).
- [6] P.A. MEYER : Inégalités de normes pour les intégrales stochastiques. Sém. Proba. XII, Lect. Notes in Math. N° 649, Springer Verlag (1978).
- [7] CH. YOEURP : Sur la dérivation des intégrales stochastiques. Sém. Proba. XIV, Lect. Notes in Math. N° 784, Springer Verlag (1980).