JEAN SPILIOTIS

Sur les travaux de Krylov en théorie de l'intégrale stochastique

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 388-398
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__388_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1979/80

SUR LES TRAVAUX DE N.V. KRYLOV EN THEORIE DE L'INTEGRALE STOCHASTIQUE

par Jean SPILIOTIS

On se propose dans cet exposé de donner une vue d'ensemble sur les travaux déjà anciens, mais remarquables, de N.V. Krylov, concernant l'existence de densités pour la loi de certaines variables aléatoires construites à partir d'intégrales stochastiques. Ces travaux ont été publiés dans l'ordre suivant :

[1]. On Ito's stochastic integral equations . Theor. Prob. Appl. 14, 1969.
[2]. An inequality in the theory of stochastic integrals. Theor. Prob. Appl. 16, 1971.
[3]. On the uniqueness of the solution of Bellmann's equation. Izv. Akad. Nauk SSSR, 5, 1971.
[4]. Control of a solution of a stochastic integral equation. Theor. Prob. Appl. 17, 1972.
[5]. Some estimates of the probability density of a stochastic integral. Izv. Akad. Nauk, 38, 1974.

L'article [1] est un précurseur, et nous ne l'examinerons pas. Du point de vue du probabiliste, les articles fondamentaux sont [2] et [5]. On voit dans les titres que certains articles se réfèrent aux intégrales stochastiques, d'autres à la théorie du contrôle : on ne peut les séparer, d'où la difficulté de la lecture de ces articles, car ils renvoient les uns aux autres, utilisant les inégalités de la théorie du contrôle pour estimer des intégrales stochastiques, et vice-versa.

La traduction du livre de Krylov
[6]. Controlled diffusion processes.
est annoncée pour Février 1980 (Springer-Verlag).

Nous allons analyser ici les résultats des articles [2] et [5], puis donner des idées très sommaires sur leur démonstration.

RESULTATS FONDAMENTAUX DE L'ARTICLE [2]

On se place sur $\mathbb{R}^n$ (coordonnées x^i, $i=1,\dots,n$), et on considère le mouvement brownien à n dimensions $B_t=(B_t^i)$ issu de 0. On considère un processus X_t à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, donné comme intégrale stochastique

$$X_t^i = X_0^i + \Sigma_j \int_0^t a_{js}^i(\omega)dB_s^j(\omega) + \int_0^t b_s^i(\omega)ds \tag{1}$$

Signalons tout de suite une originalité du point de vue de Krylov : il s'agit ici d'<u>intégrales stochastiques</u>, et non d'<u>équations différentielles</u>

stochastiques . On fait sur les coefficients les hypothèses suivantes

- La matrice (prévisible) $a_s=(a^i_{js}(\omega))$ a ses coefficients bornés en valeur absolue par une constante M (voir commentaire plus bas).

On pose $\delta_s(\omega) = \det(a_s(\omega))^2$; c'est un nombre positif.

- On a $|b^i_s| \leqq \beta\delta_s^{1/n}$.

On considère maintenant un ouvert borné U de $\mathbb{R}^n$, et l'on désigne par τ le temps de rencontre du complémentaire de U

$$\tau = \inf\{\ t : X_t \notin U\ \} \qquad (\tau = 0 \text{ si } X_0 \notin U) .$$

Le résultat principal de l'article est alors le suivant :

THEOREME 1. On a pour toute fonction f

$$E[\ \int_0^\tau |f(X_s)|\delta_s^{1/n}ds\ ] \leqq c\|f\|_{L^n} \tag{2}$$

où la constante c dépend : de la dimension n, du diamètre de U, de la constante β figurant dans les hypothèses.

La constante M n'intervient nulle part dans les majorations : elle n'intervient que pour assurer que les intégrales stochastiques considérées ont un sens, et le théorème 1 admet donc des généralisations faciles, que nous ne détaillerons pas.

Interprétons ces résultats lorsque X est solution d'une équation différentielle stochastique : on a $a^i_{js}= a^i_j(X_s)$, $b^i_s = b^i(X_s)$, où les fonctions $a^i_j(x)$, $b^i(x)$ sont boréliennes sur U, et, en principe, uniformément bornées - mais cette condition n'est pas vraiment nécessaire, localement bornées suffit - mais le gain en généralité est un peu illusoire : si les coefficients sont trop grands, on ne pourra pas s'assurer que l'équation différentielle stochastique admet une solution non explosive, ce que nous avons implicitement supposé. Faisons de plus une hypothèse de non dégénérescence uniforme

$$\delta(x) = \det(a(x))^2 \geqq \lambda > 0 \tag{3}$$

L'hypothèse concernant les b_i sera satisfaite dès que les b_i seront uniformément bornés. Dans la formule (2), l'hypothèse (3) permet de se débarasser du poids $\delta_s^{1/n}$ sous l'intégrale. Quant au processus X lui-même, c'est une diffusion ; si l'on prend $X_0=x$, l'écriture habituelle du côté gauche de la formule (2) est (après suppression du coefficient $\delta^{1/n}$)

$$V(x,f) = E^x[\int_0^\zeta f(X_s)ds\ ] \qquad \text{pour f positive}$$

où on a écrit ζ et non τ pour exprimer que c'est la durée de vie de la diffusion sur U : c'est le potentiel de Green de la diffusion dans l'ouvert

U. Ainsi, la formule (2) entraîne que l'opérateur potentiel de Green applique $L^n(U)$ dans $L^\infty(U)$ - le résultat est un peu plus précis, l'inégalité ayant lieu partout, et non presque partout. Mais la formule (2) est beaucoup plus riche :

- elle s'applique aux coefficients $a^i_j(x,t)$ dépendant du temps, i.e. aux équations paraboliques ;
- le coefficient $\delta_s^{1/n}$ dans la formule permet de se passer entièrement de l'hypothèse (3), permettant par exemple à la diffusion de dégénérer au bord.

Citons aussi deux résultats de l'article [1], moins fins que le théorème 2, mais utiles. Le premier affirme que si la matrice a_s satisfait à une condition (que nous énonçons plutôt ici dans le langage du th. 2)

(4) $\quad |a^i_{js}| \leqq M \ , \ |b^i_s| \leqq M \ , \ \delta_s \geqq m > 0$

(entraînant l'ellipticité de la forme quadratique $\Sigma\, a^i_{ks} a^j_{\ell s} \delta^{k\ell} \xi_i \xi_j$), on peut remplacer (2) par une estimation sur tout $\mathbb{R}^n$ du type

(5) $$E[\int_0^\infty e^{-\lambda s}|f(X_s)|ds\ ] \leqq c\|f\|_{L^n} \qquad (\lambda>0)$$

(En théorie du potentiel, cela correspond au remplacement d'un potentiel de Green par un λ-potentiel. La constante c dépend de λ, M, m, n).

Le second dit que, si u est une fonction appartenant à l'espace de Sobolev W^2_n (n est la dimension), le processus $u(X_t)$ est une semimartingale, et on a une "formule d'Ito" pour ce processus. Nous donnerons des détails plus loin.

LE THEOREME FONDAMENTAL DE [5]

La condition sur les b^i est remplacée par la suivante, moins restrictive lorsque a peut dégénérer :

(6) $$|b_s| \leqq \beta\ tr(a_s a_s^*)$$

où β est une constante, et a_s^* est la matrice transposée de a_s . On pose aussi

(7) $$\varphi_t = \frac{1}{2}\int_0^t tr(a_s a_s^*)ds$$

On va généraliser aussi le théorème 1 en considérant une fonction f(s,x), et non plus seulement f(x). Cela explique l'intégration sur $\mathbb{R}^{n+1}$ et non $\mathbb{R}^n$.

THEOREME 2. <u>On se donne</u> $\lambda>0$, <u>et</u> $p\geqq n+1$. <u>On a</u>

(8) $$E[\int_0^\infty e^{-\lambda t-\lambda\varphi_t}|f(t,X_t)|\,\delta_t^{1/n+1}dt|\ \leqq c(\ \int|f(t,x)|^p e^{-\gamma t}dx\ )^{1/p}$$

<u>où</u> c <u>ne dépend que de</u> p,λ,n , <u>et</u> $\gamma>0$ <u>ne dépend que de</u> λ <u>et</u> β.

Il est absolument impossible de présenter même une esquisse de la démonstration de ce théorème, mais nous allons essayer de présenter sommairement le théorème 1 et ses variantes.

DEMONSTRATION DU THEOREME 1 : PARTIE PROBABILISTE

A) Nous allons d'abord travailler dans le cas où U est la boule de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^n$. Plus généralement, nous posons

(8) $$C_r = \{ x : |x| < r \} \text{ dans } \mathbb{R}^n .$$

Nous considérons une fonction f nulle hors de C_1 et il suffit de traiter le cas où f est positive et continue . Nous posons simplement $\|f\|_{L^n} = \|f\|$.

B) Soit a une matrice (n,n), b un vecteur, et soit $X_t^{a,b}$ le processus

(9) $$X_t^{a,b} = x + a(B_t) + bt$$

c'est une diffusion - dégénérée si la matrice a l'est - de générateur

(10) $$L^{ab} = \frac{1}{2}\Sigma\, a^i_k a^j_\ell \delta^{k\ell} D_i D_j + \Sigma b^i D_i \quad (\text{ on posera } \alpha^{ij} = \Sigma\, a^i_k a^j_\ell \delta^{k\ell})$$

Si b = 0 , on écrira simplement L^a, X^a. D'autre part, on posera comme plus haut $\delta(a) = (\det(a))^2$.

C) Tout l'article de Krylov repose maintenant sur le lemme suivant, que nous commenterons en appendice. Rappelons que toutes les dérivées partielles secondes d'une fonction concave, au sens des distributions, sont des mesures, et qu'un opérateur elliptique (même dégénéré) à coefficients constants appliqué à une fonction concave donne une mesure ≤ 0 (1).

LEMME 1. Soit f une fonction continue, positive, nulle hors de C_1. Il existe une fonction concave z sur $\mathbb{R}^n$ possédant les propriétés suivantes

1) z est positive dans C_2
2) $|z(x)-z(y)| \leq K|x-y|\,\|f\|$
3) $K\|f\| \geq z(x) \geq -K|x|\,\|f\|$
4) Pour toute matrice a , $L^a(z)+k\delta(a)^{1/n}f\,dx$ est une mesure ≤ 0 .

Les notations K et k désignent des constantes qui ne dépendent que de la dimension de l'espace.

Ce résultat analytique étant admis, nous en déduisons l'étape probabiliste la plus importante :

LEMME 2. Quels que soient la matrice a et le vecteur b, le processus

(11) $$Y_t = z(X_t^{ab}) + k\delta(a)^{1/n}\int_0^t f(X_s^{ab})ds - K\|f\|\,|b|\,t$$

est une surmartingale.

DEMONSTRATION. Soient $\bar{z}$ et $\bar{f}$ les régularisées de z et f par une même fonction $\varphi \in C_c^\infty$. Nous avons

$$\bar{z}(X_t^{ab})+k\delta(a)^{1/n}\int_0^t \bar{f}(X_s^{ab})ds = \int_0^t L^{ab}\bar{z}(X_s^{ab})ds + \int_0^t k\delta(a)^{1/n}\bar{f}(X_s)ds + M_t$$

1. Voir les remarques sur les fonctions convexes en appendice.

où M_t est une martingale : cela provient du fait que $\bar{z}$ est une fonction C^∞ à croissance au plus linéaire (condition 3) du lemme 1) et que L^{ab} est le générateur du processus X^{ab} . D'autre part, d'après la condition 4) du lemme 1, la fonction $L^a\bar{z} + k\delta(a)^{1/n}\bar{f}$, régularisée d'une mesure négative, est négative. Le côté droit s'écrit donc

$$\int_0^t \Sigma\, b^i D_i \bar{z}(X_s^{ab})ds \quad + \text{ surmartingale}$$

Pour évaluer ce terme, nous appliquons la propriété 2) du lemme 1 : z est lipschitzienne de rapport $K\|f\|$, cela passe à $\bar{z}$, et donc $\Sigma\, b^i D_i \bar{z} \leqq K|b|\,\|f\|$. Ainsi le côté droit s'écrit

$$K\|f\|\,|b|\,t \; + \text{ surmartingale}$$

D'où la formule (11) avec $\bar{z}$, $\bar{f}$ au lieu de z, f . Il ne reste plus qu'à faire converger les régularisations.

D) Nous passons maintenant aux intégrales stochastiques : a_s et b_s sont des matrices prévisibles, f est continue, positive, nulle hors de C_1, z est comme dans le lemme 1, et X est donné par les intégrales stochastiques (1) - la condition que a_s et b_s soient bornés par M n'intervient toujours que pour affirmer que les intégrales stochastiques ont un sens, car les majorations sont indépendantes de M.

LEMME 3. <u>Le processus</u>

$$z(X_t) + k\int_0^t \delta(a_s)^{1/n} f(X_s)ds - K\|f\|\int_0^t |b_s|ds \tag{12}$$

<u>est une surmartingale</u>.

DEMONSTRATION. Laissant fixes le brownien (B_t), les fonctions f et z, nous faisons varier les processus prévisibles a_s et b_s (les coefficients restant toujours bornés par M pour plus de sécurité). La théorie usuelle des intégrales stochastiques montre que $X_t \in L^2$ est fonction continue de a et b, pour la norme

$$\Big(\Sigma \int_0^t (a^i_{js})^2 ds \Big)^{1/2} + \Sigma \int_0^t |b^i_s|ds$$

et comme f est continue bornée, z continue à croissance au plus linéaire, les v.a. (12) sont fonctions continues de (a,b), à valeurs dans L^2. Il suffit donc d'établir le lemme 3 pour des processus (a,b) formant un ensemble dense pour la norme ci-dessus, et on choisit des processus <u>étagés</u> du type suivant : (t_n) désignant la p-ième subdivision dyadique de $\mathbb{R}_+$, on a sur $[t_n, t_{n+1}[$

$$a^i_{js}(\omega) = a^i_j(\omega) \;,\quad b^i_s(\omega) = b^i(\omega)$$

ces matrices dépendant de ω, mais non de s. Ensuite, il suffit de démontrer la propriété de surmartingale sur chaque intervalle $[t_n, t_{n+1}[$. Conditionnant par $\underline{\underline{F}}_{t_n}$, on se ramène sur cet intervalle à traiter le cas où a^i_j, b^i sont des constantes, et alors on est ramené au lemme 2 .

Nous désignons maintenant par T le temps de rencontre de $\mathbb{R}^n\backslash C_2$. Nous écrivons comme au début δ_s pour $\delta(a_s)=(\det(a_s))^2$.

LEMME 4. <u>On a (indépendamment de la position initiale</u> X_0)

(13) $\quad kE[\int_0^T \delta_s^{1/n} f(X_s)ds\ ] \leqq K\|f\|(1+E[\int_0^T |b_s|ds])$

DEMONSTRATION. Nous écrivons la propriété de surmartingale du lemme précédent, entre les temps d'arrêt bornés 0 et $t\wedge T$:

$$kE[\int_0^{t\wedge T}\delta_s^{1/n}f(X_s)ds\ ] \leqq E[z(X_0)]-E[z(X_{t\wedge T})]+ K\|f\|E[\int_0^{t\wedge T}|b_s|ds]$$

Nous majorons $E[z(X_0)]$ par $K\|f\|$, $-E[z(X_{t\wedge T})]$ par 0 (lemme 1, propriétés 3) et 1), et nous faisons enfin tendre t vers l'infini.

E) L'hypothèse relative aux coefficients b^i n'est pas encore intervenue. Nous nous en occupons à présent. Le théorème 1 sera démontré (dans le cas où $U=C_1$) si nous avons le résultat suivant :

LEMME 5. <u>Supposons</u> $|b_s|\leqq\beta\delta_s^{1/n}$. <u>Alors</u> $E[\int_0^T|b_s|] \leqq \gamma$, <u>constante qui dépend seulement de la dimension et de</u> β .

DEMONSTRATION. Krylov utilise une fonction $u\in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, qui dans C_3 (par exemple) est concave, positive, et satisfait à la propriété

(14) $\qquad L^{ab}u + c|b| \leqq 0 \quad (c , \text{ constante } > 0)$

pour toute matrice a et tout vecteur b tel que $|b|\leqq\beta\delta(a)^{1/n}$. Admettant l'existence d'une telle fonction, on voit (cf. lemme 2) que, pour de tels a,b

$$u(X^{ab}_{t\wedge T}) + c|b|t\wedge T \quad \text{est une surmartingale}$$

et alors (lemme 3)

$$u(X_{t\wedge T}) + c\int_0^{t\wedge T}|b_s|ds \quad \text{est une surmartingale si } |b_s|\leqq\beta\delta_s^{1/n} .$$

Mais alors on a $cE[\int_0^T|b_s|ds] \leqq E[u(X_0)]-E[u(X_T)] \leqq E[u(X_0)]$, qui est borné uniformément pour $X_0\in C_2$.

Reste à construire u . La formule (14) s'écrit

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\ a^i_k a^j_{\ell}\delta^{k\ell}D_{ij}u + b.\text{grad}u + c|b| \leqq 0$$

Or on a(1) $\Sigma\ \alpha^{ij}\gamma_{ij} \geqq n(\det(\alpha))^{1/n}(\det(\gamma))^{1/n}$ si α et γ sont positives. Donc le premier terme à gauche est $\leqq -\frac{n}{2}\delta(a)^{1/n}(\det(-D_{ij}u))^{1/n}$. Pour finir, il suffit donc que

$$-\tfrac{n}{2}(\det(-D_{ij}u))^{1/n}+\beta|\text{grad}u|+c \leqq 0$$

Krylov construit une fonction de la forme $u(x)=h(|x-x_0|)$, où x_0 est un point hors de C_3 : les calculs des $D_{ij}u$, grad u... sont alors relativement simples en coordonnées polaires, et nous laisserons les détails de côté.

1. Se ramener à une base où α et γ sont diagonales.

F) Nous avons travaillé jusqu'à maintenant sur C_1 ; exprimons les résultats analogues pour C_r, en désignant par T_r le premier temps de rencontre de $\mathbb{R}^n \backslash C_r$ (ou C_{2r} ; peu importe). Soit f une fonction positive nulle hors de C_r, et soit $\overline{f}(x)=f(rx)$, nulle hors de C_1 ; soit $\overline{X} = \frac{1}{r}X$, processus associé par (1) aux matrices $\overline{a}_s = a_s/r$, $\overline{b}_s=b_s/r$, qui satisfont aux mêmes hypothèses (avec le même coefficient β). Nous avons $\det(a_s)^2=r^{2n}\det(\overline{a}_s)^2$

$$E[\int_0^{T_r} f(X_s)\delta_s^{1/n}ds] = r^2 E[\int_0^{\overline{T}} \overline{f}(\overline{X}_s)\overline{\delta}_s^{1/n}ds] \leqq cr^2 \|\overline{f}\|_{L^n}$$

Mais $(\int f^n(rx)dx)^{1/n} = \frac{1}{r}(\int f^n(x)dx)^{1/n}$, donc il reste simplement un facteur r . Revenant alors au théorème 1 (dont la démonstration est achevée, car tout ouvert borné U est contenu dans une boule de rayon diam(U)), on voit que la constante au second membre peut s'écrire $c = c(\beta,n)\mathrm{diam}(U)$.

QUELQUES APPLICATIONS DU THEOREME 1

Nous allons commencer par rechercher des majorations globales du type (5). Nous désignerons par $\mathcal{P}_x$ la classe des processus

$$X_t = x + \Sigma \int_0^t a^i_{js}dB^j_s + \Sigma \int_0^t b^i_s ds$$

issus du point x, et satisfaisant à des conditions du type

(15) $$|a^i_{js}| \leqq M \quad , \quad |b^i_s| \leqq M \; , \quad \delta(a_s) \geqq m>0 \quad (1)$$

et nous noterons $\mathcal{P}$ la réunion $\cup_x \mathcal{P}_x$. Le résultat démontré plus haut nous dit que, en désignant maintenant par τ_x le temps de rencontre du complémentaire de la boule $C_1(x)$ de centre x et de rayon 1, on a pour tout $X\in\mathcal{P}$

(16) $$E[\int_0^{\tau_x} f(X_s)ds] \leq c\|f\|_{L^n} \qquad (\text{ pour tout } x\in\mathbb{R}^n) .$$

(la condition (15) nous a permis de faire disparaître le facteur $\delta_s^{1/n}$, et la condition $|b_s|\leqq \beta\delta_s^{1/n}$ est satisfaite pour β assez grand). Nous nous proposons d'établir une majoration globale :

THEOREME 3. <u>Soit</u> $\lambda > 0$. <u>Alors on a pour tout processus</u> $X\in\mathcal{P}$ <u>et toute fonction</u> $f\geqq 0$

(17) $$E[\int_0^\infty e^{-\lambda s}f(X_s)ds] \leqq c\|f\|_{L^n}$$

(c dépend de M,m,λ et de la dimension de l'espace).

On se ramène aussitôt au cas où f est continue bornée. Alors la fonctioı

$$v(x)=v_f(x) = \sup_{Y\in\mathcal{P}_x} E[\int_0^\infty e^{-\lambda s}f(Y_s)ds]$$

est bornée sur $\mathbb{R}^n$, et nous poserons $V = \sup_x v(x)$. L'étude de cette fonction est très importante en théorie du contrôle optimal, mais nous ne

1. Contrairement à ce qui se passait plus haut, la constante M intervient explicitement dans les raisonnements de ce paragraphe.

l'aborderons pas ici. Nous écrivons

$$v(x) = \sup_{Y\in\mathcal{P}_x} E[\int_0^{\tau_x} e^{-\lambda s}f(Y_s)ds + e^{-\lambda\tau_x}\int_0^{\infty} e^{-\lambda s}f(Z_s)ds\ ]$$

où $Z_s=Y_{\tau_x+s}$. Mais nous avons (1) $Z\in\mathcal{P}_{Y_{\tau_x}}$ conditionnellement à $\underline{\underline{F}}_{\tau_x}$, donc

$$E[\int_0^{\infty} e^{-\lambda s}f(Z_s)ds\ ] \leqq V$$

et par conséquent, grâce à (16)

$$v(x) \leqq c\|f\|_{L^n} + V \sup_{Y\in\mathcal{P}_x} E[e^{-\lambda\tau_x}]$$

Passons au sup en x, et posant $\gamma_\lambda = \sup_x \sup_{Y\in\mathcal{P}_x} E[e^{-\lambda\tau_x}]$

$$V(1-\gamma_\lambda) \leqq c\|f\|_{L^n}$$

et tout revient à démontrer que $\gamma_\lambda<1$ pour tout $\lambda>0$.

Prenons x=0, posons $\tau_0=\tau$, appliquons la formule d'Ito à $e^{-\lambda t}u(Y_t)$ où $u\in C_c^\infty$ vaut $1-|x|^2$ dans la boule unité. Nous avons

$$0 = e^{-\lambda\tau}u(Y_\tau) = 1 + M_\tau - \int_0^\tau \lambda e^{-\lambda s}u(Y_s)ds - 2\Sigma\int_0^\tau e^{-\lambda s}b_s^iY_s^i ds - \int_0^\tau e^{-\lambda s}\alpha_s ds$$

où le terme α_s provenant des dérivées secondes vaut $\sum_{i,j}(a_{js}^i)^2$, et où M_t est une martingale locale, correspondant à la partie brownienne de l'intégrale stochastique. Il n'y a aucune difficulté à intégrer cette relation, et $E[M_\tau]$ disparaît. Il reste donc

$$1 = E[\int_0^\tau e^{-\lambda s}(\lambda u(Y_s) + 2\Sigma\, b_s^iY_s^i + \alpha_s\ )ds\ ]$$

Comme on a (15), et $|Y|\leqq 1$ sur $[0,\tau[$, cela entraîne l'existence d'une constante k, dépendant seulement de λ et M, telle que

$$1 \leqq E[k\int_0^\tau e^{-\lambda s}ds\ ] = \frac{k}{\lambda}(1-E[e^{-\lambda\tau}])$$

Ce qui a été fait pour τ vaut pour tout τ_x, et c'est le résultat cherché.

COROLLAIRE. <u>Sous les mêmes hypothèses</u>, <u>on a</u> $E[\int_0^t f(X_s)ds] \leqq e^{\lambda t}c\|f\|_{L^n}$.

Krylov étudie aussi dans [1] la validité d'une " formule d'Ito"

$$(18)\qquad u(X_t) = u(X_0) + \Sigma\int_0^t a_{js}^i D_i u(X_s)dB_s^j + \Sigma\int_0^t D_i u(X_s)b_s^i ds + \frac{1}{2}\Sigma\int_0^t D_{ij}u(X_s)a_{ks}^i a_{\ell s}^j \delta^{k\ell}\, ds$$

pour des fonctions u qui ne sont pas de classe C^2, mais appartiennent à

---

1. En fait, il y a là une petite difficulté : si l'on pose $B_s' = B_{\tau_x+s} - B_{\tau_x}$, $a_s' = a_{\tau_x+s}$, $b_s' = b_{\tau_x+s}$, les processus a_s', b_s' sont prévisibles par rapport à une filtration <u>plus riche</u> que la filtration naturelle du brownien B_s'. Dans notre définition <u>de v(x) ou</u> $\mathcal{P}_x$, il aurait donc fallu permettre l'adjonction à $\underline{\underline{F}}_0$ d'une tribu séparable indépendante des processus.

un espace de Sobolev convenable : rappelons brièvement ce dont il s'agit.

D'abord le problème de la formule (18) est local : on peut donc se borner à étudier des fonctions u à support dans une boule C_r fixée. On fera l'hypothèse que u appartient à l'espace de Sobolev W^2_n , c'est à dire à la complétion de C^∞_c pour la norme

$$[\![v]\!] = \|v\|_{L^n} + \Sigma_i \|D_i v\|_{L^n} + \Sigma_{ij} \|D_{ij}v\|_{L^n}$$

Si l'on choisit des $v_k \in C^\infty_c$ (on peut les prendre à support dans C_r) qui convergent vers u au sens de cette norme, on peut montrer

- que les $D_i v$ convergent vers $D_i u$ dans tout L^p (p fini)
- que les v_k convergent uniformément vers u p.p., de sorte que u est égale p.p. à une fonction continue (sur ces points, voir Dunford-Schwartz , vol II, p. 1680 et p. 1684).

Dans ces conditions, la démonstration de (18) est très simple : on écrit la formule d'Ito pour les v_n , et on remarque que les $(D_i v_n - D_i u)^2$, $|D_i v_n - D_i u|$, $|D_{ij} v_n - D_{ij} u|$ convergent vers 0 dans L^n. On applique alors le corollaire ci-dessus, pour montrer que chacun des termes de la formule (18) pour v_n converge vers le terme correspondant pour u.

APPENDICE : SUR LES FONCTIONS CONVEXES

On a vu le rôle capital joué par le lemme 1. Nous allons essayer de faire comprendre la signification de ce lemme, sans prétendre le démontrer complètement.

Soit d'abord $\zeta(x)$ une fonction convexe de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$. Soit $u \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, et x un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Ecrivant que la fonction $\zeta(u+tx)$ est convexe en t, de classe C^2, et admet donc une dérivée seconde positive à l'origine, nous obtenons

$$\Sigma_{ij}\, x^i x^j D_{ij}\zeta(u) \geqq 0 \tag{1}$$

Notons L_x l'opérateur $\Sigma_{ij}\, x^i x^j D_{ij}$; il est clair, par un argument d'indépendance linéaire , que tout opérateur D_{ij} est combinaison linéaire à coefficients réels d'un nombre fini d'opérateurs L_x, les vecteurs x et les coefficients utilisés nous important peu .

Il résulte de (1) que les $D_{ii}\zeta(u)$ sont positifs, que leur somme $\Delta\zeta(u)$ est positive. Utilisant au point u un système d'axes orthonormés qui met la matrice $(D_{ij}\zeta(u))$ sous forme diagonale, on voit que

$$\det(D_{ij}\zeta(u)) \geqq 0 \ , \ \sqrt[n]{\det(D_{ij}\zeta(u))} \leqq \frac{1}{n}\Delta\zeta(u) \ . \tag{2}$$

Considérons maintenant une fonction convexe, non nécessairement de classe C^2. Toutes les distributions $L_x\zeta$ sont des mesures positives, absolument continues par rapport à $\Delta\zeta$. Il résulte de ce qui précède que toutes les distributions $D_{ij}\zeta$ sont des mesures réelles, absolument continues par rapport à $\Delta\zeta$: ainsi

$$D_{ij}\zeta = \lambda_{ij}\Delta\zeta$$

où les λ_{ij} sont des fonctions boréliennes bornées. Le fait que toute distribution $L_y\zeta = (\Sigma_{ij}\ y^i y^j \lambda_{ij})\Delta\zeta$ soit positive, pour y rationnel, entraîne que la forme $\Sigma_{ij}\ \lambda_{ij}(x)y^i y^j$ est positive, pour $\Delta\zeta$-presque tout x, et l'on peut associer à ζ la mesure positive

$$\mu_\zeta = (\det(\lambda_{ij}))^{1/n}\Delta\zeta \leqq \frac{1}{n}(\Sigma_i\ \lambda_{ii})\Delta\zeta = \frac{1}{n}\Delta\zeta$$

Si l'on avait utilisé une autre mesure que $\Delta\zeta$ pour calculer les densités λ_{ij} , on aurait abouti à la même mesure μ_ζ (en particulier, si ζ est de classe C^2, μ_ζ est la mesure $(\det(D_{ij}\zeta(x))^{1/n}\,dx$). Noter aussi que $\zeta \mapsto \mu_\zeta$ n'est pas linéaire, mais que $\mu_{t\zeta} = t\mu_\zeta$.

Si z est une fonction <u>concave</u>, nous nous permettrons de noter μ_z la mesure positive μ_{-z} .

Passons à la signification du lemme 1. Ce que fait Krylov consiste formellement à résoudre un problème de Dirichlet non linéaire

$$(3) \qquad \begin{array}{l} (\det(-D_{ij}z))^{1/n} = f \quad \text{dans } \mathbb{R} \text{ entier} \quad (\text{ou : } \mu_z(dx)=f(x)dx) \\ z \text{ concave}, \quad z=0 \text{ sur le bord de } C_2 \end{array}$$

(les problèmes de ce genre sont dits " de Monge-Ampère"). Supposant z de classe C^2, montrons la relation entre (3) et la propriété cruciale 4) du lemme 1 : on a d'après (3)

$$L^a(z)+ k\delta(a)^{1/n}f = \Sigma\ \alpha^{ij}D_{ij}(z) +k(\det(\alpha^{ij}))^{1/n}\ (\det(-D_{ij}z))^{1/n}$$

avec $\alpha^{ij}=\Sigma\ a^i_k a^j_l \delta^{kl}$. Or nous avons utilisé déjà l'inégalité suivante, généralisation de l'inégalité entre les moyennes arithmétique et géométrique :

$$\Sigma\ \alpha^{ij}D_{ij}(-z) \geqq n(\det(\alpha))^{1/n}(\det(-D_{ij}z))^{1/n}$$

et donc la propriété 4) du lemme 1 sera satisfaite dès que $k \leqq n$. Les autres conditions du lemme 1 apparaissent comme des estimations simples concernant la solution de (3). Le raisonnement ci-dessus peut être rendu rigoureux pour une fonction concave non nécessairement de classe C^2, en travaillant sur les densités par rapport à la mesure $-\Delta z(dx)+dx$.

Mais en fait, Krylov ne résout pas l'équation (3) : il en construit des solutions approchées z^i, qui sont des fonctions concaves polyédrales (i.e. des enveloppes inférieures de fonctions affines en nombre fini), et qu'il fait converger vers la solution désirée. On s'attend à un raisonnement du genre suivant : on se donne des polyèdres convexes Q_i dans $\mathbb{R}$, contenant la boule C_1 (ou même $C_{3/2}$) et croissant vers C_2 ; on se donne des mesures μ_i à support fini $S_i \subset C_1$, convergeant vaguement vers la mesure

$f(x)dx$, et on cherche à construire z_i, fonction concave polyédrale, telle que $\mu_{z_i}=\mu_i$, l'ensemble des points extrémaux du sous-graphe de z_i étant contenu dans S_i, et z_i étant nulle sur le bord de Q_i . Or ce n'est pas ainsi que procède Krylov : il prend bien les Q_i comme on l'a dit, mais les mesures μ_i qu'il considère convergent vaguement vers $f^n(x)dx$, et les fonctions polyédrales z_i, nulles sur le bord de Q_i, possèdent une propriété différente : soit Σ_i le sous-graphe de z_i ; alors

- l'ensemble des points extrémaux de Σ_i est contenu dans S_i
- pour tout $x \in S_i$, le volume euclidien de l'ensemble des $p \in \mathbb{R}^n$ tels que $p.(y-x) \geqq z_i(y)-z_i(x)$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ est égal à $\mu_i\{x\}$.

Les références que donne Krylov sont malheureusement introuvables dans les bibliothèques non spécialisées en ouvrages soviétiques.

NOTE SUR LES EPREUVES (Novembre 80). Le livre [6] de Krylov n'est toujours pas paru en traduction anglaise. En revanche, on peut trouver en traduction anglaise :

A.V. Pogorelov. The Minkowski Multidimensional Problem. Winston and Sons, Washington DC , 1978 (distribué par Halsted Press, J. Wiley, N

Ce livre contient tous les résultats nécessaires sur l'équation de Monge-Ampère.