

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CLAUDE DELLACHERIE

ÉRIK LENGART

**Sur des problèmes de régularisation, de recollement et
d'interpolation en théorie des martingales**

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 328-346

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__328_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR DES PROBLEMES DE REGULARISATION, DE RECOLLEMENT
ET D'INTERPOLATION EN THEORIE DES MARTINGALES
par C. Dellacherie et E. Lenglart

Soit $(\Omega, \underline{\mathbb{F}}, P)$ un espace probabilisé complet muni d'une filtration $\underline{\mathbb{F}} = (\underline{\mathbb{F}}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ne vérifiant pas nécessairement les conditions habituelles (on suppose toutefois, pour simplifier, que $\underline{\mathbb{F}}$ est la complétée de $\underline{\mathbb{F}}_\infty = \bigvee_t \underline{\mathbb{F}}_t$) ; les processus que nous considérerons seront à valeur dans \mathbb{R} . Nous dirons qu'une famille Θ de temps d'arrêt de $\underline{\mathbb{F}}$ est une chronologie si elle contient 0, est stable pour sup et inf (finis) et contient une suite (T_n) telle que $T_n \geq n$; dans cette introduction nous noterons Θ_c (resp Θ_b) la chronologie usuelle formée des temps constants finis (resp des temps d'arrêt bornés). Etant donnée une chronologie Θ , nous dirons qu'une famille $\mathbb{X} = (X(T))_{T \in \Theta}$ de v.a. indexée par Θ (soit encore, une application \mathbb{X} de Θ dans L^0) est un Θ -système si elle vérifie la condition de compatibilité

(C) $X(S) = X(T)$ p.s. sur $\{S = T\}$ pour tout $S, T \in \Theta$

et la condition d'adaptation

(A) $X(T)$ est $\underline{\mathbb{F}}_T$ -mesurable pour tout $T \in \Theta$

Nous dirons qu'un processus optionnel $X = (X_t)$ agrège le Θ -système $\mathbb{X} = (X(T))_{T \in \Theta}$ si on a $X_T = X(T)$ p.s. pour tout $T \in \Theta$. Tout processus optionnel se désagrège évidemment en un Θ -système, mais l'opération inverse, beaucoup plus délicate, n'est pas toujours possible : pour $\Theta = \Theta_c$, la notion de Θ -système coïncide avec celle de processus adapté et l'agrégation de \mathbb{X} revient alors à trouver une modification optionnelle de ce processus, ce qui est possible ssi \mathbb{X} est une application mesurable de \mathbb{R}_+ dans un sous-espace séparable de L^0 (pour voir cela, appliquer un théorème classique de Doob - IV.30 de [4] - pour obtenir un processus mesurable, puis le théorème de projection optionnelle) ; pour $\Theta = \Theta_b$, on sait, grâce au théorème de section optionnelle, qu'il y a au plus une agrégation possible (à l'indistinguabilité près), et un théorème profond et difficile de Mokobodzki (voir [9]) assure que si (\mathbb{X}^n) est une suite de Θ_b -systèmes agrégeables telle que $\lim X^n(T)$ existe dans L^0 (i.e. en probabilité) pour tout $T \in \Theta_b$, alors le Θ_b -système limite \mathbb{X} est encore agrégeable. Par ailleurs, nous montrons dans [3] que, sous les conditions habituelles, tout Θ -système \mathbb{X} "s.c.s. à droite" (i.e. vérifiant $X(T) \geq \limsup X(T_n)$ p.s. pour

tout $T \in \Theta$ et toute suite (T_n) dans Θ décroissant vers T) peut être agrégé par un processus optionnel à trajectoires s.c.s. à droite.

Dans l'article présent, nous nous intéressons à l'agrégation de systèmes X se comportant comme une surmartingale, ou une quasimartingale, ou encore une semimartingale. Nous nous contenterons pour le moment de définir ce que nous appellerons une Θ -surmartingale : c'est, pour une chronologie Θ donnée, un Θ -système X vérifiant comme il se doit la condition

(S) $X(T)$ est intégrable pour tout $T \in \Theta$ et on a

$$X(S) \geq E[X(T) | \mathcal{F}_S] \text{ p.s. pour tout } S, T \in \Theta \text{ avec } S \leq T$$

Pour $\Theta = \Theta_c$, on retrouve la notion de surmartingale ; rappelons par ailleurs qu'un processus X est appelé une surmartingale forte s'il est optionnel et s'il se désagrège en une Θ_b -surmartingale. Ecrivons maintenant, dans notre jargon, deux résultats tirés de [5] :

- 1) toute Θ_c -surmartingale X peut être agrégée en une surmartingale forte
- 2) toute Θ_b -surmartingale X peut être agrégée en une surmartingale forte

Dans le premier cas, il s'agit d'une régularisation : le système X est en fait un processus, dont le processus X est une excellente modification (non unique en général). Dans le second cas, il s'agit d'un recollement : le processus X recolle les données temporelles $X(T)$, de manière unique d'après le théorème de section. Nous établirons entr'autres le résultat suivant, contenant 1) et 2) comme cas particulier

0) Etant donnée une chronologie Θ , toute Θ -surmartingale X peut être agrégée par une surmartingale forte X

Nous dirons, dans ce cas général, qu'il s'agit d'une interpolation : les données temporelles $X(T)$, pour $T \in \Theta$, peuvent en effet être insuffisantes pour déterminer le processus X , même à une modification près.

Maintenant que notre titre est élucidé dans le contexte "optionnel", parlons du cadre dans lequel nous allons effectivement nous placer. Comme il nous a paru intéressant d'étudier aussi le cas "prévisible" (les éléments de Θ sont prévisibles, $X(T)$ est \mathcal{F}_{T-} -mesurable pour tout $T \in \Theta$ et on doit agréger par un processus prévisible), et, pourquoi pas, le cas "accessible", etc, nous nous sommes décidés finalement à tout écrire dans le cadre naturel des tribus de Meyer introduites dans [7] : cela permet d'unifier le langage et les démonstrations, sans d'ailleurs compliquer la situation (la tribu optionnelle sans les conditions habituelles est aussi délicate

à manipuler que la tribu de Meyer la plus générale). Aussi commencerons nous par exposer succinctement une partie de [7] (en l'éducorant quelque peu), exposition poursuivie à l'intérieur de l'article au fur et à mesure de nos besoins. Nous n'interdisons cependant pas au lecteur de ne s'intéresser qu'au cas optionnel (ou prévisible) sous les conditions habituelles.

Deux mots enfin sur les démonstrations : nous n'introduisons pas, à proprement parler, d'idées nouvelles, mais nous devons utiliser, non sans invention, une bonne part de l'arsenal de la théorie des martingales et de la théorie générale des processus - ce qui est bien naturel pour un problème d'agrégation...

§1. TRIBUS DE MEYER

Nous continuons à travailler à partir d'un espace probabilisé complet (Ω, \mathbb{F}, P) muni d'une filtration $\mathbb{F} = (\mathbb{F}_t)$ telle que \mathbb{F} soit la complétée de $\mathbb{F}_\infty = \bigvee_t \mathbb{F}_t$, quoique, à bien des égards, il soit plus naturel de définir intrinséquement la notion de tribu de Meyer sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ sans faire intervenir a priori une filtration (cf [7]).

- 1 DEFINITION. Nous dirons qu'une tribu \underline{A} sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ est une tribu de Meyer (relative à \mathbb{F}) si elle est engendrée par une famille de processus càdlàg adaptés contenant les processus continus adaptés.

Ainsi la tribu optionnelle \underline{O} , engendrée par tous les processus càdlàg adaptés, est la plus grande tribu de Meyer (relative à \mathbb{F}) tandis que la tribu prévisible \underline{P} , engendrée par tous les processus continus adaptés est la plus petite. En général, une tribu de Meyer (relative à \mathbb{F}) est, comme la tribu accessible ou celle introduite par Le Jan [6], une tribu engendrée par des processus càdlàg et située entre \underline{P} et \underline{O} .

Nous désignons désormais par \underline{A} une tribu de Meyer fixée (relative à notre filtration). Si T est un temps d'arrêt de (\mathbb{F}_{t+}) , alors l'intervalle stochastique $]T, +\infty[$ appartient à \underline{P} et donc à \underline{A} . Nous définissons maintenant la notion de temps d'arrêt de \underline{A} (en abrégé, \underline{A} -temps d'arrêt, ou \underline{A} -t.d'a.)

- 2 DEFINITION. Une v.a. T à valeurs dans $[0, +\infty]$ est un temps d'arrêt de \underline{A} si l'intervalle stochastique $]T, +\infty[$ appartient à \underline{A} .

Lorsque $\underline{A} = \underline{P}$ (resp $\underline{A} = \underline{O}$), on retrouve la définition des temps prévisibles (resp optionnels) de [4], auquel nous renvoyons le lecteur pour la terminologie adoptée ici sans explications. On montre que, si T est un \underline{A} -t.d'a. et X un processus \underline{A} -mesurable, alors le processus $X_{T-1} 1_{]T, +\infty[}$ est encore \underline{A} -mesurable ; en particulier l'arrêté

$X^T = X1_{[0, T[} + X_T 1_{[T, +\infty[}$ est encore \underline{A} -mesurable (cette propriété est encore vraie si on suppose seulement que T est un temps d'arrêt de (\mathbb{F}_{t+})).

Nous allons enfin associer à tout \underline{A} -temps d'arrêt T une sous-tribu de \mathbb{F}_∞ ; nous dirons qu'un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, défini jusqu'à l'infini, est \underline{A} -mesurable si $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est \underline{A} -mesurable et si X_∞ est une v.a. \mathbb{F}_∞ -mesurable.

3 DEFINITION. A tout \underline{A} -temps d'arrêt T on associe la tribu $\mathbb{F}_T^{\underline{A}}$ engendrée par les v.a. de la forme X_T quand X parcourt l'ensemble des processus \underline{A} -mesurables définis jusqu'à l'infini.

Lorsque $\underline{A} = \underline{O}$, on retrouve la tribu \mathbb{F}_T et, lorsque $\underline{A} = \underline{P}$, la tribu \mathbb{F}_{T-} (pour T prévisible, mais on peut définir $\mathbb{F}_T^{\underline{A}}$ pour toute v.a. $T \geq 0$). De manière générale, si T est un \underline{A} -temps d'arrêt, on a les inclusions $\mathbb{F}_{T-} \subseteq \mathbb{F}_T^{\underline{A}} \subseteq \mathbb{F}_T$ et l'égalité $\mathbb{F}_T^{\underline{A}} = \{H \in \mathbb{F}_\infty : T_H \text{ est un } \underline{A}\text{-t.d'a.}\}$ où, comme d'ordinaire, on a posé $T_H = T$ sur H et $T_H = +\infty$ sur H^c . On démontre que, si S et T sont des \underline{A} -temps d'arrêt et si H appartient à $\mathbb{F}_S^{\underline{A}}$, alors $A \cap \{S < T\}$ et $A \cap \{S < T\}$ appartiennent à $\mathbb{F}_T^{\underline{A}}$; en particulier, on a $\mathbb{F}_S^{\underline{A}} \subseteq \mathbb{F}_T^{\underline{A}}$ pour $S \leq T$ et, de manière générale, les ensembles $\{S < T\}$, $\{S \leq T\}$ et $\{S = T\}$ appartiennent à la fois à $\mathbb{F}_S^{\underline{A}}$ et $\mathbb{F}_T^{\underline{A}}$.

Nous pouvons maintenant énoncer les deux théorèmes fondamentaux de la théorie générale des processus

4 THEOREME DE SECTION. Soit B un élément de \underline{A} . Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un \underline{A} -temps d'arrêt T tel que B en contienne le graphe $[T]$ dans $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ et que l'on ait $P\{T < +\infty\} > P[\pi(B)] - \varepsilon$, où $\pi(B)$ est la projection de B sur Ω .

REMARQUE. Si T est un \underline{A} -t.d'a., alors $[T]$ appartient à \underline{A} . Réciproquement, le théorème de section entraîne que, si T est une v.a. ≥ 0 telle que $[T]$ appartienne à \underline{A} , alors T est p.s. égal à un \underline{A} -t.d'a., et égal à un \underline{A} -t.d'a. si \underline{A} est P -complète (i.e. si tout processus càdlàg indistinguable d'un processus \underline{A} -mesurable est \underline{A} -mesurable; nous renvoyons à [7] pour l'étude de cette notion importante qui permet, en considérant la P -complétée d'une tribu de Meyer, d'en ramener bien souvent l'étude au cas où la filtration \mathbb{F} vérifie les conditions habituelles).

5 THEOREME DE PROJECTION. Soit X un processus mesurable, borné ou positif. Il existe un processus \underline{A} -mesurable ${}^{\underline{A}}X$, unique à l'indistinguabilité près, tel que l'on ait ${}^{\underline{A}}X_T = E[X_T | \mathbb{F}_T^{\underline{A}}]$ p.s. pour tout \underline{A} -temps d'arrêt fini T . Ce processus est appelé la \underline{A} -projection de X .

REMARQUE. Ce théorème s'étend au cas où X est un processus mesurable

\underline{A} -projetable, i.e. tel que $E[|X_T| | \underline{F}_T^A]$ soit fini p.s. pour tout \underline{A} -temps d'arrêt fini T .

Nous ne donnons pas le théorème de projection duale car nous n'aurons pas à l'utiliser explicitement. Par contre, nous aurons grand besoin d'une variante d'un théorème d'analyse fonctionnelle dû à Meyer [8] (voir surtout [5]) ; nous ne chercherons pas ici à donner le meilleur énoncé possible.

6 THEOREME. Soit \mathbb{G} l'espace vectoriel de processus càdlàg jusqu'à l'infini engendré par les processus $1_{]T, +\infty]}$ où T parcourt l'ensemble des \underline{A} -temps d'arrêt, et soit J une forme linéaire positive sur \mathbb{G} vérifiant la condition suivante

Si (X^n) est une suite décroissante d'éléments positifs de \mathbb{G} telle que $\lim_n \sup_t |X_t^n| = 0$ p.s., alors on a $\lim_n J(X^n) = 0$.

Il existe deux processus \underline{A} -mesurables A et B définis jusqu'à l'infini, positifs, à trajectoires p.s. càdlàg et croissantes, tels que $A_0 = 0$ et que

$$J(X) = E\left[\int_{]0, +\infty[} X_s dA_s + \int_{]0, +\infty[} X_{s+} dB_s\right]$$

pour tout $X \in \mathbb{G}$; A peut être pris prévisible ($A+B$ est alors unique).

Nous terminons cet aperçu en définissant la notion de \underline{A} -surmartingale, qui généralise celle de surmartingale forte. Nous donnerons au moment opportun les définitions des \underline{A} -(quasi,semi)martingales.

7 DEFINITION. Un processus X est une \underline{A} -surmartingale s'il est \underline{A} -mesurable, si X_T est intégrable pour tout \underline{A} -t.d'a. T borné et si on a

$$X_S \geq E[X_T | \underline{F}_S^A] \text{ p.s.}$$

pour tout couple S, T de \underline{A} -t.d'a. bornés tel que $S \leq T$.

REMARQUE. Sous les conditions habituelles, toute \underline{Q} -martingale (i.e. toute martingale forte) est càdlàg (et réciproquement), mais ce n'est pas le cas en général ; même sous les conditions habituelles, il existe quantité de \underline{Q} -surmartingales non càdlàg. On peut montrer cependant que toute \underline{A} -surmartingale est làdlàg (ou presque : plus précisément, presque toutes ses trajectoires sont làdlàg).

§2. GENERALITES

Dans toute la suite de l'article, nous nous donnons une tribu de Meyer \underline{A} , et nous commençons par reprendre, avec des petites variantes et quelques compléments, les notions introduites dans l'introduction.

8 DEFINITION. Une famille Θ de temps d'arrêt de \underline{A} est une chronologie si elle contient 0, est stable pour les sup. et inf. finis, et contient une suite (T_n) telle que $\sup_n T_n = +\infty$.

Nous désignons dans toute la suite par Θ une chronologie fixée. Nous aurons souvent l'occasion d'utiliser le petit lemme suivant (dont la démonstration n'a pas été sans mal... ; merci, Jeulin !)

9 LEMME. Soient $T_1, \dots, T_n \in \Theta$. Il existe $S_1, \dots, S_n \in \Theta$ tels que

- a) $S_1 \leq S_2 \leq \dots \leq S_n$,
- b) $\bigcup_i [S_i] = \bigcup_i [T_i]$.

Nous dirons que S_1, \dots, S_n est un réordonnement de T_1, \dots, T_n .

DEMONSTRATION. C'est trivial pour $n=1$ (et même $n=2$). Raisonnons par récurrence, en supposant que l'on sache réordonner toute suite de longueur n fixée, et soit T_1, \dots, T_{n+1} une suite de longueur $n+1$. Désignons par S'_1, \dots, S'_n un réordonnement de T_1, \dots, T_n , puis, par S_2, \dots, S_n, S_{n+1} un réordonnement de $S'_2, \dots, S'_n, S'_1 \vee T_{n+1}$. Après avoir posé $S_1 = S'_1 \wedge T_{n+1}$, on vérifie sans peine que $S_1, S_2, \dots, S_n, S_{n+1}$ est un réordonnement de $T_1, T_2, \dots, T_n, T_{n+1}$.

REMARQUE. On peut aussi réordonner une suite infinie grâce à l'argument p. 49-50 de [2]. Ce dernier est aussi applicable à une suite finie de longueur n , mais a l'inconvénient de fournir alors une suite finie de longueur bien plus grande que n .

10 DEFINITION. Une famille $(X(T))_{T \in \Theta}$ de v.a. indexée par la chronologie Θ est un Θ -système (adapté à \underline{A}) si elle vérifie

- (C) $X(S) = X(T)$ p.s. sur $\{S = T\}$ pour tout $S, T \in \Theta$,
- (A) $X(T)$ est $\mathbb{F}_T^{\underline{A}}$ -mesurable pour tout $T \in \Theta$.

Le Θ -système X est une Θ -surmartingale si il vérifie de plus

- (S) $X(T)$ est intégrable pour tout $T \in \Theta$ et l'on a $X(S) \leq E[X(T) | \mathbb{F}_S^{\underline{A}}]$ p.s. pour tout $S, T \in \Theta$ avec $S \leq T$.

Enfin, un processus X défini jusqu'à l'infini agrège le Θ -système X (dans \underline{A}) si X est \underline{A} -mesurable et si l'on a

$$X_T = X(T) \text{ p.s. pour tout } T \in \Theta$$

Dans la suite, nous nous intéressons à des problèmes d'agrégation spéciaux que nous avons appelés problèmes d'interpolation : notre Θ -système X vérifie une propriété liée à la théorie des martingales (par exemple, X est une Θ -surmartingale) et nous cherchons à agréger X par un processus X de sorte que, τ désignant l'ensemble des \underline{A} -t.d'a., le τ -système engendré par X vérifie "l'extension naturelle" de la propriété satisfaite par X (par exemple, si X est une Θ -surmartingale, X doit être une \underline{A} -surmartingale). On notera que, pour $\Theta = \tau$, le théorème de section nous prive de toute liberté dans le choix de X ; mais ce n'est pas le cas dans le cas général.

11 Nous dirons qu'une v.a. T est un \underline{A} -temps d'arrêt Θ -étagé s'il existe une partition finie A_1, \dots, A_n de Ω et $T_1, \dots, T_n \in \Theta$ tels que l'on ait $A_i \in \mathcal{F}_{T_i}^A$ et $T = T_i$ sur A_i pour $i = 1, \dots, n$. Nous désignons par \mathcal{Q} l'ensemble des \underline{A} -t.d'a. Θ -étagés. Lorsque Θ contient le temps constant $+\infty$, ce que nous supposons à partir du §3, on voit aisément qu'un \underline{A} -t.d'a. T est Θ -étagé ssi son graphe $[T]$ est contenu dans la réunion des graphes $[T_i]$ d'une suite finie d'éléments de Θ et que \mathcal{Q} est alors la plus petite chronologie contenant la chronologie Θ et stable par découpage (i.e. $T \in \mathcal{Q}$ et $H \in \mathcal{F}_{T \wedge H}^A \Rightarrow T_H \in \mathcal{Q}$). Par ailleurs, on vérifie sans peine que tout Θ -système X se prolonge de manière essentiellement unique en un \mathcal{Q} -système. Comme tout processus X agrégeant X agrège aussi son extension en un \mathcal{Q} -système, nous commettrons l'abus de langage de considérer que X est lui-même un \mathcal{Q} -système. Cela n'amènera pas d'ambiguïté car on a l'extension suivante aux Θ -surmartingales du théorème d'arrêt de Doob pour les surmartingales et les temps d'arrêt étagés.

12 PROPOSITION. Toute Θ -surmartingale est encore une \mathcal{Q} -surmartingale.

DEMONSTRATION. Nous supposons pour simplifier que l'on a $+\infty \in \Theta$. Soit X une Θ -surmartingale, que nous prolongeons implicitement en un \mathcal{Q} -système. D'abord, il est clair que $X(T)$ est encore intégrable pour tout $T \in \mathcal{Q}$. Soient $S, T \in \mathcal{Q}$ tels que $S \leq T$; il nous faut vérifier que l'on a $X(S) \geq E[X(T) | \mathcal{F}_S^A]$ p.s.. Soient $T_1, \dots, T_n \in \Theta$ avec $T_n = +\infty$ tels que $[S]$ et $[T]$ soient contenus dans la réunion des $[T_i]$. En vertu du lemme 9, on peut supposer que l'on a $T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_n$ et on voit sans peine que l'on peut écrire

$$S = \sum_i T_i 1_{A_i}, \quad T = \sum_i T_i 1_{B_i}$$

où A_1, \dots, A_n et B_1, \dots, B_n sont des partitions de Ω avec $A_i, B_i \in \mathcal{F}_{T_i}^A$. Posons, pour $i = 1, \dots, n$,

$$G_i = \mathcal{F}_{T_i}^A, \quad Y_i = X(T_i), \quad U = \sum_i 1_{A_i}, \quad V = \sum_i 1_{B_i}$$

Alors $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une surmartingale pour la filtration $(G_i)_{1 \leq i \leq n}$ et U et V sont des t.d'a. de cette filtration avec $U \leq V$. Comme on a $Y_U = X(S)$ et $Y_V = X(T)$, on conclut aisément en utilisant le théorème d'arrêt de Doob.

13 Pour simplifier l'exposition, nous supposons désormais que la chronologie Θ contient $+\infty$. Tout processus X sera supposé défini jusqu'à l'infini; un tel processus est, par exemple, une \underline{A} -surmartingale jusqu'à l'infini si, dans la définition 6, on ne restreint pas les \underline{A} -t.d'a. S et T à être bornés. Il est très facile de passer du cas où Θ contient $+\infty$ au cas où Θ contient une suite (T_n) avec $T_n \uparrow \infty$ (on remplace alors, par exemple, la notion de \underline{A} -surmartingale jusqu'à l'infini par celle de \underline{A} -surmartingale),

et aussi au cas général, où l'on suppose seulement que Θ contient une suite (T_n) avec $\sup_n T_n = +\infty$ (on remplace alors, par exemple, la notion de \underline{A} -surmartingale jusqu'à l'infini par celle de \underline{A} -surmartingale locale - que nous laissons au lecteur le soin de définir). Enfin, nous notons désormais τ la chronologie de tous les \underline{A} -t.d'a..

§3. SURMARTINGALES ET ENVELOPPE DE SNELL

Nous adaptons de manière évidente le vocabulaire relatif à l'ordre sur les processus aux Θ -systèmes. Nous dirons par exemple qu'un Θ -système X est majoré par un τ -système Y si on a $X(T) \leq Y(T)$ p.s. pour tout $T \in \Theta$; comme nous travaillons à l'indistinguabilité près, le théorème de section assure que, si X et Y sont deux processus \underline{A} -mesurables, il équivaut de dire que Y majore X ou que le τ -système engendré par Y majore le τ -système engendré par X .

Le théorème suivant comprend la définition de l'enveloppe de Snell d'un Θ -système X : c'est, si elle existe, la plus petite τ -surmartingale ≥ 0 majorant X . On montre ensuite, à l'aide de cette notion, que toute Θ -surmartingale peut être agrégée en une \underline{A} -surmartingale si bien qu'en particulier l'enveloppe de Snell, quand elle existe, s'agrège (de manière unique) en une \underline{A} -surmartingale.

- 14 THEOREME. Soit X un Θ -système tel qu'on ait $\sup_{S \in \mathcal{Q}} E[X^+(S)] < +\infty$ et posons, pour tout \underline{A} -temps d'arrêt T ,

$$Y(T) = \text{ess sup}_{S \in \mathcal{Q}, S \leq T} E[X^+(S) | \mathcal{F}_T^{\underline{A}}]$$

La famille Y ainsi définie est une τ -surmartingale, et c'est la plus petite τ -surmartingale positive majorant X ; on dit que Y est l'enveloppe de Snell de X .

DEMONSTRATION. Il s'agit, comme pour le théorème suivant, d'un simple aménagement des démonstrations de [5]. D'abord, en retranchant de X la restriction à Θ de la τ -martingale $(E[X^+(\infty) | \mathcal{F}_T^{\underline{A}}])_{T \in \tau}$, on se ramène aisément au cas où X est positif et $X(\infty) = 0$. Vérifions alors que Y est un τ -système. L'adaptation est évidente ; la compatibilité résulte du fait qu'on a, pour $T \in \tau$ et $A \in \mathcal{F}_T^{\underline{A}}$, $Y(T_A) = 1_A Y(T)$ p.s. car on a, \mathcal{Q} étant stable par découpage,

$$\begin{aligned} Y(T_A) &= \text{ess sup}_{S \in \mathcal{Q}, S \leq T_A} E[X(S) | \mathcal{F}_{T_A}^{\underline{A}}] = \text{ess sup}_{S \in \mathcal{Q}, S \leq T} E[X(S_A) | \mathcal{F}_{T_A}^{\underline{A}}] \\ &= \text{ess sup}_{S \in \mathcal{Q}, S \leq T} 1_A E[X(S) | \mathcal{F}_T^{\underline{A}}] = 1_A Y(T). \end{aligned}$$

Nous faisons maintenant la remarque capitale suivante : pour $T \in \tau$ fixé, la famille des v.a. $\mathcal{F}_T^{\underline{A}}$ -mesurables $Z(S) = E[X(S) | \mathcal{F}_T^{\underline{A}}]$, S parcourant les éléments de \mathcal{Q} majorant T , est filtrante croissante. En effet, pour $U, V \in \mathcal{Q}$ majorant T , $Z(U)$ et $Z(V)$ sont à la fois $\mathcal{F}_U^{\underline{A}}$ -mesurables et $\mathcal{F}_V^{\underline{A}}$ -mesurables et on a $Z(U) \vee Z(V) = Z(W)$ où W est l'élément de \mathcal{Q} défini par $W = U$ sur $\{Z(U) \geq Z(V)\}$ et $W = V$ ailleurs.

On a par conséquent, pour tout \underline{A} -t.d'a. T et tout $A \in \underline{F}_T^a$,

$$\int_A Y(T) dP = \sup_{S \in \underline{\Theta}, S \leq T} \int_A X(S) dP$$

d'où l'on déduit sans peine que la v.a. $Y(T)$ est intégrable et que Y est une τ -surmartingale ; et c'est évidemment la plus petite τ -surmartingale majorant le Θ -système (positif) X .

REMARQUES. a) Si on renforce l'hypothèse faite sur X en demandant que le Θ -système X^+ soit $\underline{\Theta}$ -uniformément intégrable (i.e. la famille de v.a. $(X^+(T))_{T \in \underline{\Theta}}$ est uniformément intégrable), la construction de l'enveloppe de Snell Y montre que celle-ci est alors τ -uniformément intégrable ; Y deviendra donc, après agrégation, une \underline{A} -surmartingale jusqu'à l'infini "de la classe (D)".

b) La définition 10 d'un Θ -système et 11 de l'ensemble $\underline{\Theta}$ des \underline{A} -temps d'arrêt Θ -étagés a encore un sens si on suppose seulement que Θ est une famille (non vide) de \underline{A} -temps d'arrêt. Et, si X est un Θ -système dans ces conditions, on peut encore définir l'enveloppe de Snell Y de X comme étant, si elle existe, la plus petite τ -surmartingale ≥ 0 majorant X . Nous laissons au lecteur le soin de vérifier qu'elle existe ssi on a $\sup_{S \in \underline{\Theta}} E[X^+(S)] < +\infty$ et qu'elle est τ -uniformément intégrable ssi X^+ est $\underline{\Theta}$ -uniformément intégrables. Le moyen le plus "économique" pour établir cela est sans doute de se ramener au cas où Θ est une chronologie en procédant comme suit : on considère la plus petite chronologie Θ^0 contenant Θ avec $+\infty \in \Theta^0$, puis on prolonge X en posant $X(0) = \text{ess sup}_{T \in \Theta} X(T) 1_{\{T=0\}}$ et de même $X(+\infty) = \text{ess sup}_{T \in \Theta} X(T) 1_{\{T=+\infty\}}$, ce qui permet ensuite de prolonger X en un Θ^0 -système de manière essentiellement unique.

Nous résolvons maintenant notre problème d'agrégation

- 15 THEOREME. Toute Θ -surmartingale peut être agrégée par une \underline{A} -surmartingale jusqu'à l'infini.

DEMONSTRATION. Soit X une Θ -surmartingale. D'après la proposition 12 c'est encore une $\underline{\Theta}$ -surmartingale si bien que l'on peut supposer que Θ est stable par découpage. Maintenant, quitte à retrancher de X la restriction à Θ de la τ -martingale constituée des $E[X(+\infty) | \underline{F}_T^a]$, on se ramène aisément au cas où X est ≥ 0 car le théorème de projection assure que la τ -martingale précédente est agrégée en une \underline{A} -martingale jusqu'à l'infini. Soit alors Y l'enveloppe de Snell de X : d'après la définition de Y , il est clair que X est la restriction de Y à Θ , si bien qu'on est finalement ramené à traiter le cas où l'on a $\Theta = \tau$. Par ailleurs, on se ramène facilement au cas où X est de plus borné : en effet, si on sait agréger les τ -surmartingales $X^n = ((X(T) \wedge n))$ en des \underline{A} -surmartingales X^n ,

alors X est agrégé par le processus $X = \liminf_n X^n$ (qui est fini) 0 d'après le théorème de section) et X est une \underline{A} -surmartingale car, si S, T sont deux \underline{A} -t.d'a. avec $S \leq T$, on a

$$E[X_T | \mathcal{F}_S^A] \leq \liminf_n E[X_T^n | \mathcal{F}_S^A] \leq \liminf_n X_S^n = X_S \text{ p.s.}$$

Il nous reste donc à montrer qu'une τ -surmartingale X , positive et bornée, peut s'agréger en une \underline{A} -surmartingale (jusqu'à l'infini). Soit \mathbb{G} l'espace vectoriel de processus càdlàg engendré par les processus $1_{[T, +\infty]}$, $T \in \tau$, et définissons une forme linéaire positive J sur \mathbb{G} en posant $J(1_{[T, +\infty]}) = E[X(T) - X(\infty)]$ et en prolongeant par linéarité (nous laissons au lecteur le soin de vérifier que c'est possible ; c'est élémentaire, mais encore faut-il bien s'y prendre). Nous vérifions que J satisfait à l'hypothèse du théorème 6. Soit (Z^n) une suite décroissante d'éléments positifs de \mathbb{G} telle qu'on ait $\lim_n \sup_t |Z_t^n| = 0$ p.s. ; il faut montrer qu'on a $\lim_n J(Z^n) = 0$. Fixons un $\varepsilon > 0$ et posons, pour tout n et tout ω ,

$$T_n(\omega) = \inf \{t : |Z_t^n(\omega)| > \varepsilon\} \quad (\inf \emptyset = +\infty)$$

En écrivant Z^n comme combinaison linéaire finie de générateurs de \mathbb{G} on voit sans peine que l'on définit ainsi un \underline{A} -t.d'a. T_n ; d'autre part, Z^n est majoré par ε sur $]0, T_n]$, la suite (T_n) est croissante et, pour presque tout ω , $T_n(\omega)$ vaut $+\infty$ pour n assez grand. Comme J est une forme linéaire positive, on a, si c est une constante qui majore la τ -surmartingale X ,

$$J(Z^n) = J(Z^n 1_{]0, T_n]}) + J(Z^n 1_{[T_n, +\infty)}) \leq \varepsilon J(1) + c \|Z^n\|_\infty P\{T_n < +\infty\}$$

d'où, finalement, on a $\lim_n J(Z^n) = 0$. D'après le théorème 6, on sait qu'il existe deux processus \underline{A} -mesurables positifs A et B , (presque) càdlàg et croissants, tels que l'on ait pour tout \underline{A} -t.d'a. T

$$E[X(T) - X(\infty)] = J(1_{[T, +\infty]}) = E[(A_\infty - A_T) + (B_\infty - B_T)]$$

en convenant que $B_0 = 0$. Si M désigne la \underline{A} -martingale jusqu'à l'infini agrégeant la τ -martingale $(E[X(\infty) + A_\infty + B_\infty | \mathcal{F}_T^A])_{T \in \tau}$, et si X est le processus \underline{A} -mesurable défini par $X = M - A - B_-$ (en toute rigueur, il faudrait remplacer B_- par un processus \underline{A} -mesurable qui en est indistinguable car $t \rightarrow B_{t-}(\omega)$ n'est défini que pour presque tout $\omega \in \Omega$), alors on a $X(\infty) = X_\infty$ et $E[X(T)] = E[X_T]$ pour tout $T \in \tau$. Remplaçant T par T_H , H parcourant \mathcal{F}_T^A , on en déduit que l'on a $X(T) = X_T$ p.s. pour tout $T \in \tau$ et donc que X est une \underline{A} -surmartingale jusqu'à l'infini qui agrège X .

REMARQUES. a) Chemin faisant, nous avons démontré que toute \underline{A} -surmartingale X bornée (mais la démonstration, légèrement modifiée, vaut pour X "de la classe (D)") admet une décomposition de Mertens :

on a $X = M - V$ où M est une \underline{A} -martingale et $V = A + B_-$ est un processus \underline{A} -mesurable ≥ 0 (presque) làdlàg et croissant, qu'on peut supposer prévisible car B_- l'est et A peut l'être pris dans le théorème 6 (la décomposition est alors unique si on impose en plus que $V_0 = 0$, $V_+ - V = B - B_-$ étant \underline{A} -mesurable). On pourra consulter [7] pour une autre démonstration, basée sur la décomposition de Doob-Meyer.

b) La remarque précédente permet d'étendre à notre situation le critère d'appartenance à la classe (D) de Mertens. Un Θ -système \mathbb{X} est \mathcal{G} -uniformément intégrable ssi \mathbb{X} est majoré en module par une \underline{A} -martingale jusqu'à l'infini. La condition suffisante est triviale. La condition nécessaire résulte de la remarque a) du n°14 et de la remarque précédente. Comme en la remarque b) du n°14, ce critère ne nécessite pas que Θ soit une chronologie.

c) Le critère de Mertens précédent permet d'affirmer que, si un Θ -système \mathbb{X} est d'une part \mathcal{G} -uniformément intégrable et d'autre part agrégeable par un processus \underline{A} -mesurable, alors il peut être agrégé par un processus \underline{A} -mesurable X "de la classe (D)" (i.e. X est τ -uniformément intégrable en tant que τ -système).

Le corollaire suivant est inspiré d'un résultat de Mokobodzki [11] en théorie du potentiel (voir aussi la remarque ci-dessous).

- 16 COROLLAIRE. Munissons l'espace E des \underline{A} -surmartingales jusqu'à l'infini de la topologie de la convergence simple après avoir identifié tout $X \in E$ à l'application $T \rightarrow X_T$ de τ dans L^1 muni de la topologie faible $\sigma(L^1, L^0)$. Alors une partie H de E est relativement compacte ssi, pour tout $T \in \tau$, la famille de v.a. $(X_T)_{X \in H}$ est uniformément intégrable.

DEMONSTRATION. Rappelons que, d'après le critère de Dunford-Pettis (cf [4]-II.25), une partie de L^1 est faiblement relativement compacte ssi elle est uniformément intégrable. La condition de l'énoncé est donc nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Soit \underline{U} un ultrafiltre sur H et, pour tout $T \in \tau$, désignons par $Y(T)$ la valeur de la limite de l'ultrafiltre image par l'application continue $X \rightarrow X(T)$ de E dans L^1 . On vérifie sans peine que la famille de v.a. $\mathbb{Y} = (Y(T))_{T \in \tau}$ ainsi définie est une τ -surmartingale, et le théorème précédent permet d'agréger \mathbb{Y} en une (unique) \underline{A} -surmartingale Y , qui est alors la limite de l'ultrafiltre \underline{U} .

REMARQUES. a) Réciproquement, il n'est pas difficile de déduire le théorème 15 de l'énoncé 16. C'est d'ailleurs la démarche adoptée par Mokobodzki qui démontre un énoncé analogue à 16 par d'autres moyens et obtient ainsi un énoncé analogue à 15 comme corollaire.

b) On peut aussi, après une étude de la continuité de la décomposition de Mertens, démontrer une extension du théorème de Helly aux \underline{A} -surmartingales (inspiré également d'un résultat démontré par Mokobodzki [11] à l'aide d'un théorème profond d'analyse provenant de [1]) : si H est une partie relativement compacte de E et si X est un point adhérent de H , alors X est limite d'une suite (X^n) d'éléments de H (voir [12]).

- 17 COROLLAIRE. Soit (X^n) une suite de θ -surmartingales telle que les suites de v.a. $(X^n(0))$ et $(X^n(\infty))$ soient uniformément intégrables. Il existe alors une \underline{A} -surmartingale X telle qu'on ait $X_T = \lim_n X^n(T)$ dans L^1 muni de la topologie faible $\sigma(L^1, L^0)$ pour tout $T \in \theta$ tel que $\lim_n X^n(T)$ existe.

DEMONSTRATION. Quitte à extraire une sous-suite de (X^n) , on peut supposer que $\lim_n X^n(0)$ et $\lim_n X^n(\infty)$ existent. On vérifie alors aisément que l'ensemble $\theta^0 = \{T \in \theta : \lim_n X^n(T) \text{ existe}\}$ est une chronologie et que, si $X(T)$ désigne la limite de $(X^n(T))$ pour $T \in \theta^0$, alors $X = (X(T))_{T \in \theta^0}$ est une θ^0 -surmartingale ; il ne reste plus qu'à appliquer le théorème 15 à la chronologie θ^0 .

§4. QUASIMARTINGALES ET DECOMPOSITION DE RAO

On désigne toujours par τ la chronologie de tous les \underline{A} -t.d'a. et par θ une sous-chronologie contenant $+\infty$.

- 18 DEFINITION. a) Un θ -système $X = (X(T))_{T \in \theta}$ est une θ -quasimartingale si $X(T)$ est intégrable pour tout $T \in \theta$ et si l'on a

$$\text{Var}_{\theta} X = \sup_{\sigma} E\left(\sum_i |E[X(T_{i+1}) - X(T_i) | \mathcal{F}_{T_i}^{\theta}]| \right) < +\infty$$

où $\sigma = (T_1, \dots, T_n)$ est une suite finie croissante d'éléments de θ .

b) Un processus X est une \underline{A} -quasimartingale jusqu'à l'infini si X est \underline{A} -mesurable et se désagrège en une τ -quasimartingale.

Nous allons démontrer que toute θ -quasimartingale peut être agrégée par une \underline{A} -quasimartingale jusqu'à l'infini. Il y aura comme précédemment deux étapes intermédiaires : d'abord, le fait que toute θ -quasimartingale est une \mathcal{Q} -quasimartingale ; puis, l'analogue de la décomposition de Rao. On pourra alors conclure grâce au n°15.

Nous commençons par établir un lemme complétant le lemme 9 et précisant les rapports entre la chronologie θ et celle \mathcal{Q} des \underline{A} -t.d'a. θ -étagés.

19 LEMME. a) L'espace vectoriel \mathbb{G}_Θ engendré par les processus de la forme $l_{H^1}^{1,1} \llbracket T, +\omega \rrbracket$ avec $T \in \Theta$ et $H \in \mathbb{F}_T^a$ est l'ensemble des processus Y de la forme

$$Y = \sum_{1 \leq i \leq n} y_i l_{T_i, T_{i+1}}^{1,1}$$

avec $T_i \in \Theta$ et y_i v.a. étagée $\mathbb{F}_{T_i}^a$ -mesurable pour $i = 1, \dots, n$, où l'on peut supposer que l'on a $T_1 \leq \dots \leq T_n$.

b) On a $\mathbb{G}_\Theta = \mathbb{G}_{[\Theta]}$ et tout $Y \in \mathbb{G}_\Theta$ est de la forme

$$Y = \sum_{1 \leq i \leq n} c_i l_{T_i, T_{i+1}}^{1,1}$$

avec $T_i \in [\Theta]$, $c_i \in \mathbb{R}$ pour $i = 1, \dots, n$ et $T_1 \leq \dots \leq T_n$.

DEMONSTRATION. Le seul point non évident de a) est la possibilité de prendre $T_1 \leq \dots \leq T_n$. Donnons nous un élément $Y = \sum_i y_i l_{T_i, T_{i+1}}^{1,1}$ de \mathbb{G}_Θ , où les T_i ne sont pas en ordre croissant ; réordonnons alors T_1, \dots, T_n en S_1, \dots, S_n grâce au lemme 9 : $\llbracket S_i, S_{i+1} \rrbracket$ ne rencontre aucun des graphes $\llbracket T_j \rrbracket$ et donc $t \rightarrow Y_t(\omega)$ est constante, pour tout ω , sur $\llbracket S_i(\omega), S_{i+1}(\omega) \rrbracket$. Comme $Y_+ = \sum_i y_i l_{T_i, T_{i+1}}^{1,1}$ est \mathbb{A} -mesurable, on peut alors écrire $Y = \sum_i z_i l_{S_i, S_{i+1}}^{1,1}$ où $z_i = Y_{S_i+}$ est $\mathbb{F}_{S_i}^a$ -mesurable. Passons au point b). D'abord, on a $\mathbb{G}_\Theta = \mathbb{G}_{[\Theta]}$; en effet, comme $[\Theta]$ est stable par découpage, les générateurs de $\mathbb{G}_{[\Theta]}$ sont de la forme $l_{T, \omega}^{1,1}$ avec $T \in [\Theta]$ et, si T_1, \dots, T_n avec $T_n = +\omega$ sont des éléments de Θ tels que le graphe de $T \in [\Theta]$ soit contenu dans la réunion des $\llbracket T_i \rrbracket$, alors $l_{T, +\omega}^{1,1}$ est la somme des $l_{A_i}^{1,1} \llbracket T_i, +\omega \rrbracket$ avec $A_i = \{T \leq T_i\}$. Il ne nous reste plus qu'à montrer que, si on a $Y = y l_{S, T}^{1,1}$ avec $S, T \in [\Theta]$ et y v.a. étagée \mathbb{F}_S^a -mesurable, alors il existe $U_1, \dots, U_n \in [\Theta]$ tels que l'on ait $S = U_1 \leq \dots \leq U_n = T$ et que X_{U_i} soit constante sur $\{U_i < U_{i+1}\}$ pour $i = 1, \dots, n-1$. Soient c_1, \dots, c_n les valeurs prises par x ; posons $U_1 = S$ et, pour $i = 1, \dots, n-1$,

$$U_{i+1} = U_i \setminus \{x \neq c_i\} + T \setminus \{x = c_i\}$$

Il est clair que les U_i ont les propriétés requises.

Quelques préliminaires encore avant d'aborder l'étude des Θ -quasi-martingales : nous allons définir l'intégrale stochastique élémentaire par rapport à un Θ -système.

20 Soit \mathbb{X} un Θ -système. Nous désignerons par $I_{\mathbb{X}}$ l'application linéaire de l'espace \mathbb{G}_Θ (défini au n°19) dans l'espace L^0 des v.a. finies définie comme suit : pour un générateur $l_{H^1}^{1,1} \llbracket T, +\omega \rrbracket$ de \mathbb{G}_Θ , on pose

$$I_{\mathbb{X}}(l_{H^1}^{1,1} \llbracket T, +\omega \rrbracket) = l_H(X(\omega) - X(T))$$

et on prolonge par linéarité (comme au §3, nous laissons au lecteur le soin de vérifier que $I_{\mathbb{X}}$ est bien définie). Lorsque $X(T)$ est intégrable pour tout $T \in \Theta$ (nous dirons pour abréger que \mathbb{X} est alors intégrable), nous définissons sur \mathbb{G}_Θ une forme linéaire $J_{\mathbb{X}}$ par

$$J_{\mathbb{X}}(Y) = E[I_{\mathbb{X}}(Y)]$$

\mathbb{X} est alors une Θ -surmartingale ssi $J_{\mathbb{X}}$ est négative (exercice !).

21 PROPOSITION. Soit X un Θ -système intégrable. L'espace \mathbb{G}_Θ étant muni de la norme uniforme, on a les égalités suivantes entre quantités finies ou infinies

$\|J_X\| = \text{Var}_\Theta X = \text{Var}_{[\Theta]} X = \sup_{\sigma} \sum_i |E[X(T_{i+1}) - X(T_i)]|$
 où σ parcourt les suites finies croissantes d'éléments de $[\Theta]$.

DEMONSTRATION. Ecrivons $Y \in \mathbb{G}_\Theta$ sous la forme $Y = \sum_i c_i 1_{[T_i, T_{i+1}[}$ avec $T_1 \leq \dots \leq T_n \in [\Theta]$ et $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$; on a $I_X(Y) = \sum_i c_i (X(T_{i+1}) - X(T_i))$. Prenant $c_i = \text{sgn } E[X(T_{i+1}) - X(T_i)]$, on obtient, après intégration, $\|J_X\| \geq \sum_i |E[X(T_{i+1}) - X(T_i)]|$; on a d'autre part en général

$$|J_X(Y)| \leq (\sup_i |c_i|) (\sum_i |E[X(T_{i+1}) - X(T_i)]|),$$

d'où finalement l'égalité des quantités extrêmes de l'énoncé. Ecrivons maintenant $Y \in \mathbb{G}_\Theta$ sous la forme $Y = \sum_i y_i 1_{[T_i, T_{i+1}[}$ avec y_i v.a. $\mathbb{F}_{T_i}^a$ -mesurable étagée et $T_1 \leq \dots \leq T_n \in [\Theta]$; on vérifie sans peine que l'on a $I_X(Y) = \sum_i y_i (X(T_{i+1}) - X(T_i))$. D'où l'on déduit $\text{Var}_{[\Theta]} Y \leq \|J_X\|$ en prenant $y_i = \text{sgn } E[X(T_{i+1}) - X(T_i) | \mathbb{F}_{T_i}^a]$ et en intégrant; d'autre part, on a évidemment $\text{Var}_\Theta X \leq \text{Var}_{[\Theta]} X$. Ecrivons enfin $Y \in \mathbb{G}_\Theta$ sous la forme $Y = \sum_i y_i 1_{[T_i, T_{i+1}[}$ comme précédemment, mais avec les $T_i \in \Theta$; on a alors le petit calcul classique

$$J_X(Y) = E(\sum_i y_i (X(T_{i+1}) - X(T_i))) = E(\sum_i y_i E[X(T_{i+1}) - X(T_i) | \mathbb{F}_{T_i}^a]) \\ \leq \|Y\|_\Theta E(\sum_i |E[X(T_{i+1}) - X(T_i) | \mathbb{F}_{T_i}^a]|) \leq \|Y\|_\Theta \text{Var}_\Theta X$$

d'où finalement on a $\text{Var}_\Theta X = \text{Var}_{[\Theta]} X = \|J_X\|$.

22 COROLLAIRE. Soit X un Θ -système intégrable. Les assertions suivantes sont équivalentes

- a) X est une Θ -quasimartingale
- b) X est une $[\Theta]$ -quasimartingale
- c) J_X est une forme linéaire continue sur $\mathbb{G}_\Theta = \mathbb{G}_{[\Theta]}$ muni de la norme uniforme.

Nous montrons maintenant que toute Θ -quasimartingale admet une décomposition de Rao. La démonstration est en fait un aménagement de celle de [5] pour les quasimartingales càdlàg sous les conditions habituelles.

23 PROPOSITION. Toute Θ -quasimartingale est la différence de deux Θ -surmartingales.

DEMONSTRATION. D'après ce qui précède, on peut supposer Θ stable par découpage, quitte à remplacer Θ par $[\Theta]$. Soit alors X une Θ -quasimartingale; quitte à retrancher de X la Θ -martingale constituée des v.a. $E[X(\omega) | \mathbb{F}_T^a]$, $T \in \Theta$, on peut supposer que l'on a $X(\omega) = 0$. Fixons $T \in \Theta$; nous désignons par $s(T)$ l'ensemble des Θ -subdivisions finies de $[T, +\omega]$, i.e. l'ensemble des suites finies $\sigma = \{T_1, \dots, T_n\}$ d'éléments de Θ telles que $T = T_1 \leq \dots \leq T_n = +\omega$; pour $\sigma = \{T_1, \dots, T_n\}$ nous posons

$$[\sigma]^+ = \{Y \in \mathbb{C}_\Theta : Y = \sum_i 1_{A_i} 1_{[T_i, T_{i+1})} \text{ avec } A_i \in \mathbb{F}_{T_i}^a\}$$

$$[\sigma]^- = \{Y : -Y \in [\sigma]^+\}$$

Pour $\sigma_1, \sigma_2 \in s(T)$, nous dirons que σ_2 raffine σ_1 si la réunion des graphes des éléments de σ_1 est contenue dans celle des graphes des éléments de σ_2 ; pour tout $\sigma_1, \sigma_2 \in s(T)$, il est facile de trouver, à l'aide du lemme 9, un élément σ_3 de $s(T)$ raffinant σ_1 et σ_2 à la fois. Enfin nous posons, pour $\sigma = \{T_1, \dots, T_n\} \in s(T)$,

$${}^+X(\sigma, T) = E[\sum_i E[X(T_{i+1}) - X(T_i) | \mathbb{F}_{T_i}^a] | \mathbb{F}_T^a].$$

Si σ_2 raffine σ_1 , alors on a

$${}^+X(\sigma_1, T) \leq {}^+X(\sigma_2, T)$$

car, d'une part, $[\sigma_1]^+$ est inclus dans $[\sigma_2]^+$ et, d'autre part, on a

$${}^+X(\sigma, T) = \text{ess sup}_{Y \in [\sigma]^+} E[I_X(Y) | \mathbb{F}_T^a]$$

En effet, si on a $\sigma = \{T_1, \dots, T_n\}$ et $Y = \sum_i 1_{A_i} 1_{[T_i, T_{i+1})}$, alors

$$\begin{aligned} E[I_X(Y) | \mathbb{F}_T^a] &= E[\sum_i 1_{A_i} E[X(T_{i+1}) - X(T_i) | \mathbb{F}_{T_i}^a] | \mathbb{F}_T^a] \\ &\leq E[\sum_i 1_{A_i} E[X(T_{i+1}) - X(T_i) | \mathbb{F}_{T_i}^a] | \mathbb{F}_T^a] \\ &\leq {}^+X(\sigma, T) \end{aligned}$$

et on obtient l'égalité en prenant $A_i = \{E[X(T_{i+1}) - X(T_i) | \mathbb{F}_{T_i}^a] \geq 0\}$.

Par conséquent, la famille $({}^+X(\sigma, T))_{\sigma \in s(T)}$ est filtrante croissante

Posons alors

$${}^+X(T) = \text{ess sup}_{\sigma \in s(T)} {}^+X(\sigma, T) ;$$

comme ${}^+X(T)$ est une v.a. ≥ 0 et que $E[{}^+X(T)]$ est majoré par $\text{Var}_\Theta X$ et donc fini, on a ${}^+X(T) = \lim_{\sigma} {}^+X(\sigma, T)$ dans L^1 (fort). Faisons maintenant varier $T \in \Theta$ et montrons que ${}^+X = ({}^+X(T))_{T \in \Theta}$ est une Θ -surmartingale. L'adaptation est évidente ; pour la compatibilité, comme on a $X(\omega) = 0 = {}^+X(\omega)$ et que Θ est stable par découpage, il nous suffit de vérifier que l'on a ${}^+X(T_H) = 1_H {}^+X(T)$ pour tout $T \in \Theta$ et tout $H \in \mathbb{F}_T^a$. On a

$${}^+X(T_H) = \text{ess sup}_{\sigma \in s(T_H), Y \in [\sigma]^+} E[I_X(Y) | \mathbb{F}_{T_H}^a]$$

et, avec des notations évidentes,

$$s \in s(T_H) \Leftrightarrow \exists \sigma' \in s(T) \text{ } \sigma = \sigma'_H$$

d'où

$${}^+X(T_H) = \text{ess sup}_{\sigma \in s(T), Y \in [\sigma]^+} 1_H E[I_X(Y) | \mathbb{F}_T^a] = 1_H {}^+X(T)$$

Vérifions enfin l'inégalité des surmartingales. Soient $S, T \in \Theta$ avec $S \leq T$; si $\sigma = \{T_1, \dots, T_n\}$ appartient à $s(T)$, alors $\sigma' = \{S, T_1, \dots, T_n\}$ appartient à $s(S)$ et $[\sigma]^+$ est inclus dans $[\sigma']^+$. On a donc

$${}^+X(\sigma', S) \geq E[{}^+X(\sigma, T) | \mathbb{F}_S^a]$$

d'où l'on déduit l'inégalité voulue, soit ${}^+X(S) \geq E[{}^+X(T) | \mathbb{F}_S^a]$, car les familles $(X(\sigma, T))_{\sigma \in s(T)}$ et $(X(\sigma', S))_{\sigma' \in s(S)}$ sont filtrantes croissantes. Par ailleurs, on définit, de manière analogue,

$${}^-X(T) = \text{ess sup}_{\sigma \in s(T), Y \in [\sigma]^-} E[I_X(Y) | \mathbb{F}_T^a]$$

pour tout $T \in \Theta$, et donc une nouvelle Θ -surmartingale $-X = ({}^-X(T))_{T \in \Theta}$.

Pour terminer la démonstration, il ne reste plus qu'à remarquer

qu'on a ${}^+X(\sigma, T) - {}^-X(\sigma, T) = X(T)$ pour tout $T \in \Theta$ et tout $\sigma \in s(T)$ si bien que $X = {}^+X - {}^-X$.

REMARQUE. Nous avons en fait démontré mieux que l'énoncé : toute Θ -quasimartingale X s'écrit $X = {}^+X - {}^-X$ où ${}^+X, {}^-X$ sont deux Θ -surmartingales positives telles que $\text{Var}_\Theta X = E[{}^+X(0) + {}^-X(0)]$. Il y a unicité d'une telle décomposition.

Le résultat d'interpolation que nous avons en vue est maintenant conséquence immédiate des n°23 et 15, et nous avons de surcroît établi le maillon manquant du théorème 5 du §V de [7]

- 24 THEOREME. Toute Θ -quasimartingale X peut être agrégée par une \underline{A} -quasimartingale jusqu'à l'infini X (avec $\text{Var}_\Theta X = \text{Var } X$). De plus, toute \underline{A} -quasimartingale jusqu'à l'infini est la différence de deux \underline{A} -surmartingales jusqu'à l'infini.

Nous ne chercherons pas à étudier la convergence de suites de quasimartingales ; le lecteur intéressé pourra se reporter [12].

§5. SEMIMARTINGALES ET INTEGRALE STOCHASTIQUE ELEMENTAIRE

Il est possible, ici encore, de donner des définitions "parallèles" des notions de Θ -semimartingale et de \underline{A} -semimartingale. Nous avons cependant trouvé plus naturel de définir cette dernière en suivant la "tradition" (décomposition en une martingale locale et processus à variation finie) et de définir la première par une propriété de continuité de l'intégrale stochastique élémentaire. Notre théorème d'interpolation inclura alors la caractérisation "à la Bichteler-Dellacherie-Mokobodzki" (cf [5]) des \underline{A} -semimartingales - cela, sans s'être placé sous les conditions habituelles, et en ne se bornant pas à l'étude des semimartingales càdlàg.

- 25 Un processus M est une \underline{A} -martingale locale jusqu'à l'infini s'il est \underline{A} -mesurable et s'il existe une suite croissante (T_n) de \underline{A} -t.d'a. telle que, pour tout $\omega \in \Omega$, on ait $T_n(\omega) = +\infty$ pour n grand, et que les processus arrêtés M^{T_n} soient des \underline{A} -martingales jusqu'à l'infini (nous supposons donc, pour simplifier, que M_0 est une v.a. intégrable). Un processus X est une \underline{A} -semimartingale jusqu'à l'infini s'il est \underline{A} -mesurable et s'il peut s'écrire $X = M + V$ où M est une \underline{A} -martingale locale jusqu'à l'infini et V est un processus à variation finie jusqu'à l'infini (i.e. presque toutes les trajectoires de V ont une variation finie sur $[0, +\infty]$; ces trajectoires sont alors làdlàg, mais pas nécessairement càdlàg).

Nous reprenons dans la définition suivante les notations introduites aux n°19 et 20

26 DEFINITION. Un Θ -système X est une Θ -semimartingale si l'application linéaire I_X de \mathbb{G}_Θ dans L^0 est continue quand \mathbb{G}_Θ est muni de la norme uniforme et L^0 de la topologie de la convergence en probabilité.

REMARQUES. a) Comme \mathbb{G}_Θ est égal à $\mathbb{G}_{[\Theta]}$, toute Θ -semimartingale est encore évidemment une $[\Theta]$ -semimartingale.

b) On vérifie sans peine que, si X est une Θ -semimartingale, alors I_X est encore continue lorsque \mathbb{G}_Θ est muni de la topologie de la "convergence uniforme en probabilité" (une suite (Y^n) converge vers 0 pour cette topologie si les v.a. $\sup_t |Y_t^n|$ convergent vers 0 en probabilité).

27 THEOREME. Soit X un Θ -système. Les assertions suivantes sont équivalentes

a) X est une Θ -semimartingale

b) Il existe une probabilité Q équivalente à P (à densité bornée si on le désire) telle que X soit une Θ -quasimartingale relativement à Q .

c) X peut être agrégé par une \underline{A} -semimartingale jusqu'à l'infini.

DEMONSTRATION. Le théorème 5 du §V de [7] affirme (lorsqu'on se limite à considérer des processus définis jusqu'à l'infini) que les assertions suivantes, relatives à un processus \underline{A} -mesurable X , sont équivalentes

1) L'application I_X de $\mathbb{G}_{\mathcal{T}}$ dans L^0 est continue (les notations adoptées dans [7] sont différentes de celles utilisées ici)

2) Il existe une probabilité Q équivalente à P (à densité bornée si on le désire) telle que X soit une \underline{A} -quasimartingale jusqu'à l'infini relativement à Q

3) Il existe une probabilité Q équivalente à P (à densité bornée si on le désire) telle que X soit la différence de deux \underline{A} -surmartingales jusqu'à l'infini relativement à Q

4) Le processus X est une \underline{A} -semimartingale.

Les implications 1) \Rightarrow 2) et 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 1) sont établies dans [7] ; pour 2) \Rightarrow 3), le lecteur est renvoyé dans [7] à l'article présent, et en effet nous avons établi cela au n°24. Ceci dit, on voit que c) \Rightarrow a) résulte de 4) \Rightarrow 1) et que b) \Rightarrow c) résulte de 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) et du n°24. Il nous reste donc à établir a) \Rightarrow b) ; comme cela se fait de manière analogue à l'établissement de 1) \Rightarrow 2), nous ne donnerons que les grandes lignes de cette dernière étape.

Le lemme suivant, qui généralise le lemme 3 du §V de [7] (repris en partie dans [5] pour le même usage), est très utile pour étudier

la majoration d'un processus (même càdlàg)

28 LEMME. Soit X un Θ -système borné dans L^0 : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c_\varepsilon > 0$ tel qu'on ait $P\{|X(T)| > c_\varepsilon\} \leq \varepsilon$ pour tout $T \in \mathcal{G}$. Alors la v.a. $\text{ess sup}_{T \in \mathcal{G}} |X(T)|$ est p.s. finie ; plus précisément, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $P\{\text{ess sup}_{T \in \mathcal{G}} |X(T)| > c_\varepsilon\} \leq \varepsilon$ où c_ε est la même constante que plus haut.

DEMONSTRATION. Nous fixons $\varepsilon > 0$ et la constante c_ε associée. Comme l'ess sup est atteint sur une partie dénombrable de \mathcal{G} , il nous suffit de montrer que, pour toute suite finie $T_1, \dots, T_n \in \mathcal{G}$, on a

$$P\{|X(T_1)| \text{ ou } \dots \text{ ou } |X(T_n)| > c_\varepsilon\} \leq \varepsilon$$

Posons, pour $i = 1, \dots, n$, $S_i = T_i$ sur $\{|X(T_i)| > c_\varepsilon\}$ et $S_i = +\infty$ ailleurs, puis $S = \inf_i S_i$; comme \mathcal{G} est stable par découpage, on a $S \in \mathcal{G}$ et donc $P\{|X(S)| > c_\varepsilon\} \leq \varepsilon$. D'autre part, on a évidemment, pour presque tout ω , $|X(S)|(\omega) > c_\varepsilon$ ssi il existe i tel que l'on ait $|X(T_i)|(\omega) > c_\varepsilon$, d'où la conclusion.

RETOUR A LA DEMONSTRATION DE 27. Nous établissons $a) \Rightarrow b)$. Si I_X est continue, l'image de la boule unité de \mathbb{G}_Θ par I_X est bornée dans L^0 . Comme, pour $T \in \mathcal{G}$, on a $X(T) = X(0) + I_X(1]_{0,T}]$, on en déduit en particulier, grâce au lemme précédent, que la v.a. égale à $\text{ess sup}_{T \in \mathcal{G}} |X(T)|$ est p.s. finie. Donc, quitte à remplacer P par une probabilité équivalente à densité bornée, on peut supposer que cette v.a. est intégrable ; alors X est un Θ -système intégrable. Dans ces conditions, l'image H de la boule unité de \mathbb{G}_Θ par I_X est un convexe borné de L^0 contenu dans L^1 . On sait alors, grâce à un théorème de Mokobodzki (cf [8], [5]), ou encore, grâce à un théorème récent de Yan (cf [13]) , qu'il existe une loi Q équivalente à P , à densité bornée, telle que $\sup_{Z \in H} |E_Q(Z)| < +\infty$. Or cela signifie que la forme linéaire J_X^Q définie sur \mathbb{G}_Θ comme au n°20 par $J_X^Q(Y) = E_Q[I_X(Y)]$ est continue, et donc que X est une Θ -quasimartingale relativement à Q d'après le n°22.

REMARQUE. Rappelons que, pour $\Theta = \overline{\mathbb{R}}_+$, un Θ -système n'est autre qu'un processus adapté à la filtration (\mathbb{F}_t^A) (un processus adapté à notre grosse filtration (\mathbb{F}_t) si on prend $\underline{A} = \underline{0}$). En particulier, le théorème précédent fournit, pour tout processus adapté à (\mathbb{F}_t^A) définissant une "bonne" intégrale stochastique élémentaire, une régularisation de ce processus en une \underline{A} -semimartingale (jusqu'à l'infini).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOURGAIN (J.), FREMLIN (D.H.), TALAGRAND (M.) : Pointwise compact sets of Baire-measurable functions (Amer. J. of Math. 100, 1978, p. 845-886)
- [2] DELLACHERIE (C.) : Deux remarques sur la séparabilité optionnelle (Sém. de Proba. XI, Lect. Notes in Math. n°581, p. 47-50, Springer, Heidelberg 1977)
- [3] DELLACHERIE (C.), LENGART (E.) : Sur des problèmes de régularisation, de recollement et d'interpolation en théorie générale des processus (A paraître dans Sém. de Proba. XVI)
- [4] DELLACHERIE (C.), MEYER (P.A.) : Probabilités et potentiel. Chapitres I à IV (Hermann, Paris 1975)
- [5] : Probabilités et potentiel. Chapitres V à VIII (Hermann, Paris 1980)
- [6] LE JAN (Y.) : Temps d'arrêt stricts et martingales de sauts (Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 44, 1978, p. 213-225)
- [7] LENGART (E.) : Tribus de Meyer et théorie des processus (Sém. de Proba. XIV, Lect. Notes in Math. n°784, p. 500-546, Springer, Heidelberg 1980)
- [8] MEYER (P.A.) : Un cours sur les intégrales stochastiques. Chapitre VI (Sém. de Proba. X, Lect. Notes in Math n°511, p. 354-400, Springer, Heidelberg 1970)
- [9] : Convergence faible de processus, d'après Mokobodzki (Sém. de Proba. XI, Lect. Notes in Math. n°581, p. 109-119, Springer, Heidelberg 1977)
- [10] : Caractérisation des semimartingales, d'après Dellacherie (Sém. de Proba. XIII, Lect. Notes in Math. n°721, p. 620-623, Springer, Heidelberg 1979)
- [11] MOKOBODZKI (G.) : Ensembles compacts de fonctions fortement surmédianes (Sém. de théorie du potentiel n°4, Lect. Notes in Math. n°713, p. 178-193, Springer, Heidelberg 1979)
- [12] UPPMAN (A.) : L'analogie du théorème de Helly en théorie des martingales (A paraître dans Sém. de Proba. XVI)
- [13] YAN (J.A.) : Caractérisation d'une classe d'ensembles convexes de L^1 ou H^1 (Sém. de Proba. XIV, Lect. Notes in Math. n°784, p. 220-222, Springer, Heidelberg 1980)