SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MICHEL ÉMERY

Le théorème de Garnett-Jones, d'après Varopoulos

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 278-284
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__278_0>

Séminaire de Probabilités

Volume XV

LE THEOREME DE GARNETT-JONES, D'APRES VAROPOULOS

par M. Emery

Le théorème de Garnett-Jones [2] est relatif à la distance à L^∞ d'un élément de l'espace $BMO(\mathbb{R}^d)$. Varopoulos a montré dans [4] comment une méthode probabiliste permet de retrouver ce résultat. Nous allons exposer ici, en suivant Varopoulos, le théorème de Garnett-Jones probabiliste.

Commençons par quelques rappels sur BMO , empruntés à [1]. Soit $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ un espace probabilisé complet pourvu d'une filtration $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0}$ remplissant les conditions habituelles. L'espace BMO est l'espace de Banach dont la boule de rayon c est formée des martingales uniformément intégrables M telles que, pour tout temps d'arrêt T ,

$$E[|M_\infty - M_{T-}||\underline{\underline{F}}_T] \leq c \quad \text{p.s.}$$

(avec la convention $M_{0-}=0$). Lorsque ceci a lieu, on a aussi

$$E[|M_\infty - M_T||\underline{\underline{F}}_T] \leq c \quad \text{p.s.} \quad ; \quad |\Delta M_T| \leq c \quad \text{p.s.}$$

et, pour $S\leq T$,

$$E[|M_T - M_{S-}||\underline{\underline{F}}_T] \leq c \quad \text{p.s.}$$

Si X est un processus càdlàg adapté intégrable admettant une limite X_∞ et vérifiant pour tout T $E[|X_\infty - X_{T-}||\underline{\underline{F}}_T] \leq c$, alors la martingale $E[X_\infty|\underline{\underline{F}}_t]$ est dans BMO , avec une norme majorée par 2c .

Rappelons enfin l'inégalité de John-Nirenberg : Si $\|M\|_{BMO} = c$, et si $0\leq a<1/4c$, on a pour tout T

$$E[e^{a|M_\infty - M_{T-}|}|\underline{\underline{F}}_T] \leq \frac{1}{1-4ac} < \infty .$$

Réciproquement, si une martingale M vérifie pour tout T

$$E[e^{a|M_\infty - M_{T-}|}|\underline{\underline{F}}_T] \leq c \qquad (\text{où la constante } a \text{ est } > 0)\ ,$$

on en déduit, par l'inégalité de Jensen, que

$$e^{aE[|M_\infty - M_{T-}||\underline{\underline{F}}_T]} \leq c\ ,$$

donc que M est dans BMO avec $\|M\|_{BMO} \leq \frac{1}{a}\mathrm{Log}c$. Le problème auquel nous allons nous intéresser est d'obtenir, à partir d'inégalités exponentielles de ce genre, des renseignements sur M faisant intervenir l'exposant a mais non la constante c .

A toute martingale M de BMO , on peut associer un <u>exposant critique</u> $a_0 = a_0(M) > 0$ tel que

$$\sup_T \| E[e^{a|M_\infty - M_{T-}|}|\underline{\underline{F}}_T] \|_{L^\infty}$$

soit fini pour $a < a_0$ et infini pour $a > a_0$. L'inégalité de John-Nirenberg entraîne que l'exposant critique de M est au moins $1/4\|M\|_{BMO}$. Une inégalité inverse, qui donnerait l'équivalence entre $1/a_0$ et $\|M\|_{BMO}$ est-elle possible ? Non, car si M est bornée et non nulle, M est dans BMO avec une norme non nulle et un exposant critique infini. Mais on a le résultat suivant :

THEOREME (Garnett-Jones-Varopoulos). <u>Supposons que toutes les martingales sont continues. Alors, pour toute martingale M dans BMO , on a</u>

$$\frac{1}{4a_0(M)} \leq d(M,L^\infty) \leq \frac{4}{a_0(M)}\ ,$$

<u>où $d(M,L^\infty)$ désigne la borne inférieure de $\|M-N\|_{BMO}$ quand N décrit les martingales bornées.</u>

L'hypothèse sur la filtration (de continuité de toutes les martingales) peut encore s'énoncer ainsi : les tribus optionnelle et prévisible sont égales. Comme nous le verrons plus loin, cette hypothèse est cruciale pour l'inégalité de droite. Elle est vérifiée pour le mouvement brownien, ce qui permet à Varopoulos d'appliquer ce résultat à la théorie analytique de BMO . Par contre, l'inégalité de gauche est vraie en toute généralité, sans cette hypothèse.

DEMONSTRATION (Varopoulos).

1) <u>Inégalité de gauche</u>. La martingale M étant dans BMO , soit N une martingale bornée par un réel n . De

$$E[e^{a|M_\infty - M_{T-}|}|\underline{\underline{F}}_T] \leq e^{2an}\,E[e^{a|(M-N)_\infty-(M-N)_{T-}|}|\underline{\underline{F}}_T] \quad ,$$

on déduit que $a_0(M-N) \leq a_0(M)$; mais l'inégalité de John-Nirenberg fournit $\frac{1}{4\|M-N\|_{BMO}} \leq a_0(M-N)$, d'où $\frac{1}{4a_0(M)} \leq \|M-N\|_{BMO}$. Il ne reste qu'à faire varier N parmi les martingales bornées pour obtenir le résultat. ▬

2) Inégalité de droite. Nous supposons maintenant que toutes les martingales sont continues. Nous aurons besoin d'un lemme, qui utilise de manière essentielle cette hypothèse.

LEMME. *Soient* $0 \leq T_0 \leq T_1 \leq \infty$ *deux temps d'arrêt,* m *un entier* ≥ 1 , c *un réel de* $]0,1[$. *On suppose que* $P[T_1<\infty|\underline{\underline{F}}_{T_0}] \leq c^m$. *Il existe alors des temps d'arrêt* $T_0 = R_0 \leq R_1 \leq \ldots \leq R_m = T_1$ *tels que, pour* $0 \leq n < m$, *on ait* $P[R_{n+1}<\infty|\underline{\underline{F}}_{R_n}] \leq c$.

Démonstration du lemme. Soit X_t la martingale $P[T_1<\infty|\underline{\underline{F}}_t]$. Par hypothèse, X est continue et vérifie $X_{T_0} \leq c^m$; posons, pour $0 \leq n \leq m$, $S_n = \inf\{t \geq T_0 |\ X_t = c^{m-n}\}$. Cette suite vérifie $T_0 \leq S_0 \leq S_1 \leq \ldots \leq S_m \leq T_1$; d'autre part, pour $n < m$, on peut écrire, sur $\{S_n<\infty\}$,

$$c^{m-n-1}\,P[S_{n+1}<\infty|\underline{\underline{F}}_{S_n}] \leq E[X_{S_{n+1}}|\underline{\underline{F}}_{S_n}] = X_{S_n} = c^{m-n} \quad ,$$

donc $P[S_{n+1}<\infty|\underline{\underline{F}}_{S_n}] \leq c\,I_{\{S_n<\infty\}} \leq c$. Il ne reste qu'à poser $R_0 = T_0$, $R_n = S_n$ pour $1 \leq n \leq m-1$, $R_m = T_1$ pour avoir

$$P[R_1<\infty|\underline{\underline{F}}_{R_0}] = P[S_1<\infty|\underline{\underline{F}}_{S_0}|\underline{\underline{F}}_{T_0}] \leq c \quad ;$$

$$P[R_m<\infty|\underline{\underline{F}}_{R_{m-1}}] \leq P[S_m<\infty|\underline{\underline{F}}_{S_{m-1}}] \leq c \quad ,$$

ce qui établit le lemme. ▬

Pour démontrer l'inégalité de droite, *soit* M *une martingale de* BMO *telle que, pour tout* T , $E[e^{a|M_\infty - M_T|}|\underline{\underline{F}}_T] \leq e^{ak}$ $(a>0, k>0)$. *Pour* $\varepsilon \in]0,1[$, *nous allons exhiber une décomposition* $N+L$ *de* M *en une martingale bornée* L *et une martingale* N *telle que* $\|N\|_{BMO} \leq \frac{4+\varepsilon}{a}$.

Soient donc donnés M , a , k , ε . Quitte à faire rentrer la v.a. bornée (car M est dans BMO) M_0 dans L , on peut supposer M nulle en 0 . Soit b un réel de la forme $m\frac{\varepsilon}{a}$, où l'entier m est choisi assez grand pour que $b > \frac{k}{\varepsilon}$, de sorte que $b-k>(1-\varepsilon)b$. On définit une suite croissante de temps d'arrêt par

$$T_0 = 0 \quad ; \quad T_{n+1} = \inf\{t\geq T_n \,,\, |M_t - M_{T_n}| = b\} \quad .$$

Sur $\{T_n<\infty\}$, on peut écrire

$$\begin{aligned} e^{ab}\, P[T_{n+1}<\infty|\underline{\underline{F}}_{T_n}] &\leq E[e^{a|M_{T_{n+1}}-M_{T_n}|}|\underline{\underline{F}}_{T_n}] \\ &\leq E[e^{a|E[M_\infty - M_{T_n}|\underline{\underline{F}}_{T_{n+1}}]|}|\underline{\underline{F}}_{T_n}] \\ &\leq E[e^{a|M_\infty - M_{T_n}|}|\underline{\underline{F}}_{T_{n+1}}|\underline{\underline{F}}_{T_n}] \leq e^{ak} \quad , \end{aligned}$$

de sorte que

$$P[T_{n+1}<\infty|\underline{\underline{F}}_{T_n}] \leq e^{-a(b-k)} \leq e^{-ab(1-\varepsilon)} = c^m \quad ,$$

avec $c = e^{-\varepsilon(1-\varepsilon)} \in \,]0,1[$. Considérons les deux processus croissants

$$A^+ = \sum_{n\geq 0} I_{\{M_{T_{n+1}}-M_{T_n}=+b\}}\, I_{[\![T_{n+1},\infty[\![} \quad ,$$

$$A^- = \sum_{n\geq 0} I_{\{M_{T_{n+1}}-M_{T_n}=-b\}}\, I_{[\![T_{n+1},\infty[\![} \quad .$$

Le processus $b(A^+-A^-)-M$ est borné par b . Le processus A^+ varie par sauts d'une unité, il est donc de la forme $A^+ = \sum_{n\geq 1} I_{[\![S_n,\infty[\![}$, pour des temps d'arrêt S_n dont les graphes sont inclus dans la réunion des graphes des T_i . D'où

$$\begin{aligned} P[S_{n+1}<\infty|\underline{\underline{F}}_{S_n}] &= \sum_i P[S_{n+1}<\infty|\underline{\underline{F}}_{T_i}]\, I_{\{S_n=T_i<\infty\}} \\ &\leq \sum_i P[T_{i+1}<\infty|\underline{\underline{F}}_{T_i}]\, I_{\{S_n=T_i<\infty\}} \\ &\leq c^m\, I_{\{S_n<\infty\}} \quad . \end{aligned}$$

Le lemme, appliqué à $(0,S_1)$ et à chacun des couples (S_n,S_{n+1}) , permet d'interpoler la suite (S_n) par une suite croissante $(R_n)_{n\geq 0}$ de temps d'arrêt telle que $R_0=0$, $R_{mn}=S_n$ pour tout n , et $P[R_{n+1}<\infty|\underline{\underline{F}}_{R_n}] \leq c$.

Soit B^+ le processus croissant $\frac{1}{m}\sum_{n\geq 1} I_{[\![R_n,\infty[\![}$. Par construction, il est compris entre A^+ et A^++1 ; en outre, si T est un temps d'arrêt, on a, sur $\{R_{n-1}<T\leq R_n\}$,

$$E[B^+_\infty - B^+_{T-}|\underline{\underline{F}}_T] = E[B^+_\infty - B^+_{R_{n-1}}|\underline{\underline{F}}_{R_n}|\underline{\underline{F}}_T] \leq \frac{1}{m}\frac{1}{1-c} \quad ,$$

car $P[B^+_\infty - B^+_{R_{n-1}} > \frac{i}{m}|\underline{\underline{F}}_{R_n}] = P[R_{n+i}<\infty|\underline{\underline{F}}_{R_n}] \leq c^i$. La martingale $E[B^+_\infty|\underline{\underline{F}}_t]$ est donc dans BMO , avec pour norme au plus $2\,\frac{1}{m}\frac{1}{1-c}$.

Il ne reste qu'à construire de même un processus B^- tel que $\frac{1}{m}B^-$ approche A^-. La variable aléatoire $M_\infty - b(B_\infty^+ - B_\infty^-)$ est alors bornée (par 3b), c'est donc la v.a. terminale d'une martingale bornée L , tandis que la martingale $N_t = M_t - L_t = E[b(B_\infty^+ - B_\infty^-)|\underline{\underline{F}}_t]$ vérifie

$$\|N\|_{BMO} \leq 2b \frac{2}{m(1-c)} = \frac{4\varepsilon}{1-e^{-\varepsilon(1-\varepsilon)}} \; 1/a \quad ,$$

d'où le résultat, avec, au lieu de la constante $4+\varepsilon$ annoncée, la constante $\frac{4\varepsilon}{1-e^{-\varepsilon(1-\varepsilon)}}$, qui tend aussi vers 4 quand ε tend vers zéro. ▬

Il est naturel de chercher à affaiblir l'hypothèse de continuité des martingales, en supposant seulement que la tribu optionnelle est égale à la tribu accessible (ce qui revient à dire qu'il n'y a pas de temps d'arrêt totalement inaccessibles), ou que la filtration est quasi-continue à gauche (ce qui revient à dire que les martingales n'ont pas de sauts prévisibles). Aucune de ces deux hypothèses n'est suffisante pour préserver le théorème, comme le montrent les deux contre-exemples suivants.

a) <u>Tous les temps d'arrêt sont accessibles</u>. On prend pour Ω l'ensemble $\mathbb{N}$, pour $\underline{\underline{F}}_t$ la tribu engendrée parla partition $(\{0\},\{1\}, \ldots ,\{n-1\},\{n,n+1, \ldots \})$, où n est la partie entière de t , pour probabilité P la loi géométrique $G(p)$ (où le paramètre p est dans $]0,1[$) : $P(\{n\}) = (1-p)p^n$. Pour tout n , la v.a. $T_n(\omega) = \begin{cases} n \text{ si } \omega \geq n \\ \infty \text{ si } \omega < n \end{cases}$ est un temps d'arrêt. La martingale telle que $M_\infty(\omega) = \omega$ vaut $M_t(\omega) = \begin{cases} \omega \text{ si } t \geq \omega+1 \\ [t] + \frac{p}{1-p} \text{ si } t < \omega+1 \end{cases}$; elle est dans BMO , puisque $M_\infty = B_\infty$ où $B = \sum_{n\geq 1} I_{[\![T_n,\infty[\![}$, avec $P[T_{n+1}<\infty|\underline{\underline{F}}_{T_n}] = p\, I_{\{T_n<\infty\}}$.

La loi conditionnelle $\underline{\underline{L}}[M_\infty - M_n|\underline{\underline{F}}_n]$ est facile à expliciter : elle vaut δ_0 si $\omega<n$, et $G(p)*\delta_{-p/(1-p)}$ si $\omega \geq n$. Si T est un temps d'arrêt fini, $\underline{\underline{L}}[M_\infty - M_T|\underline{\underline{F}}_T]$ et $\underline{\underline{L}}[M_\infty - M_n|\underline{\underline{F}}_n]$ coïncident sur $\{n \leq T < n+1\}$. Ceci entraîne que, pour tout exposant $a < -\text{Log}\, p$,

$$E[e^{a|M_\infty - M_T|}|\underline{\underline{F}}_T] \leq c = \sup(1, \sum_{n\geq 0} e^{a(n-\frac{p}{1-p})} (1-p)\, p^n)$$

et donc, M étant à sauts bornés,

$$E[e^{a|M_\infty - M_{T-}|}|\underline{\underline{F}}_T] \leq c\, e^{a|\Delta M_T|} \leq c' \quad ;$$

l'exposant critique $a_0(M)$ vaut donc au moins $-\operatorname{Log} p$. En prenant p assez petit, on peut choisir a_0 arbitrairement grand, donc $\frac{1}{a_0}$ arbitrairement petit. Néanmoins $d(M,L^\infty)$ reste bornée inférieurement par 1 . Si en effet une martingale N de BMO vérifie $\|M-N\|_{BMO} = 1-\varepsilon < 1$, les sauts de $M-N$ sont bornés par $1-\varepsilon$; comme $\Delta M_{T_n} = 1$ pour $n \geq 1$, on a $\Delta N_{T_n} \geq \varepsilon$, d'où $N_{T_n} - N_0 \geq n\varepsilon$ sur $\{T_n < \infty\}$, et N n'est pas bornée. ▬

b) <u>La filtration est quasi-continue à gauche</u>. Soient $B = \sum_{n\geq 1} I_{[\![T_n,\infty[\![}$ un processus de Poisson de paramètre 1 , $A_t = t$ son compensateur, $X = B-A$ son compensé, et S le premier temps de saut d'un processus de Poisson de paramètre $p>0$, indépendant de B . Désignons par M la martingale arrêtée X^S et par S_n ses temps de saut : $S_n = T_n$ si $T_n \leq S$, $S_n = \infty$ sinon. On peut écrire $M = B^S - A^S$, avec $B^S = \sum_{n\geq 1} I_{[\![S_n,\infty[\![}$. Nous prendrons comme filtration la filtration naturelle de M , pour laquelle les seuls instants où il se passe quelquechose sont les temps S et S_n .

Nous allons montrer que, pour $0 \leq a < b(p)$ (la fonction $b(p)$ sera explicitée plus bas), $E[e^{a|M_\infty - M_T|}|\underline{\underline{F}}_T] \leq c$,où c dépend de a , mais non de T . Comme M est à sauts bornés, on en déduira que M est dans BMO , avec un exposant critique au moins égal à $b(p)$.

L'homogénéité temporelle du processus M entraîne que la loi conditionnelle $\underline{\underline{L}}[M_\infty - M_T||\underline{\underline{F}}_T]$ ne prend que deux valeurs : elle vaut δ_0 sur $\{T \geq S\}$ et $\underline{\underline{L}}(M_\infty)$ sur $\{T<S\}$. Il suffit donc d'établir que, pour $0 \leq a < b(p)$, la v.a. $e^{a|M_S|}$ est intégrable. Majorons $|M_S|$ par $A_S + B_S$; la loi de A_S est la loi exponentielle de paramètre p , et, conditionnellement en $A_S = x$, la loi de B_S est la loi de Poisson de paramètre x . Donc

$$E[e^{a(A_S+B_S)}] = \int_0^\infty p\, e^{-px} \sum_{n\geq 0} e^{-x} \frac{x^n}{n!} e^{a(x+n)}\, dx = \sum_{n\geq 0} \frac{pe^{an}}{(p+1-a)^n}$$

Cette série converge dès que $\frac{e^a}{p+1-a} < 1$, c'est-à-dire $a < b(p)$, où $b(p)$ est la racine de l'équation $e^x + x - 1 = p$. La martingale M est dans BMO , d'exposant critique au moins $b(p)$. Lorsque p est choisi assez grand, l'exposant critique peut être rendu arbitrairement grand.

Cependant, la distance de M à L^∞ reste au moins égale à 1 . En effet, si la martingale N est telle que $\|M-N\|_{BMO} = 1-\varepsilon < 1$, les sauts de $M-N$ sont bornés par $1-\varepsilon$, d'où $|\Delta N_S| < 1$ et $\varepsilon \leq \Delta N_{S_n} < 2$. Par ailleurs, N est la somme compensée de ses sauts : $N = C - \widetilde{C} + D - \widetilde{D}$, où $C = \Delta N_S \, I_{[\![S,\infty[\![}$, $\widetilde{C}$ est le compensateur de C , $D = \sum_{n\geq 1} \Delta N_{S_n} I_{[\![S_n,\infty[\![}$ et $\widetilde{D}$ est le compensateur de D . Des encadrements des sauts, on déduit que $\left|\frac{d\widetilde{C}}{dt}\right| < p$, et $\varepsilon \leq \frac{d\widetilde{D}}{dt} < 2$. Fixons t . Les trois v.a. $\widetilde{C}_t$, $\widetilde{D}_t$, C_t sont bornées respectivement par pt , $2t$, 1 ; comme les sauts ΔN_{S_n} sont minorés et que, pour tout k, l'événement $\{S_k < t < S\}$ a une probabilité non nulle, la v.a. D_t n'est pas bornée. Ainsi N_t n'est pas dans L^∞ , et N n'est pas bornée, d'où l'assertion. —

REMARQUE. L'exemple a) est un cas particulier de la situation étudiée par Pavlov dans [3], situation dans laquelle $\underline{\underline{H}}^\infty$ n'est pas dense dans BMO . Une modification facile des démonstrations ci-dessus montre que, dans l'exemple a) comme dans l'exemple b), la martingale M n'est pas approchable dans BMO par des éléments de $\underline{\underline{H}}^\infty$.

REFERENCES.

[1] C. DELLACHERIE et P.A. MEYER. Probabilités et Potentiels. Chapitres V à VIII. Hermann, Paris 1980.

[2] J.B. GARNETT et P.W. JONES. The distance in BMO to L^∞ . Ann. Math. 108, 373-393, 1978.

[3] I.V. PAVLOV. Contre-exemple à l'hypothèse de la densité de H^∞ dans l'espace BMO . Théorie des Probabilités et Applications, XXV, 154-157, 1979 (en russe).

[4] N. VAROPOULOS. A probabilistic proof of the Garnett-Jones theorem on BMO . Preprint, Université d'Orsay, 1979.