SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

XAVIER FERNIQUE

Sur les lois de certaines intégrales associées à des mouvements browniens

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__1_0>

SUR LES LOIS DE CERTAINES INTEGRALES

ASSOCIEES A DES MOUVEMENTS BROWNIENS

par Xavier FERNIQUE

0. Soit $(Z_k\ ,\ k\in \mathbb{N})$ une suite de mouvements browniens séparables sur $[0\ ,\ 1]$ indépendants ; on lui associe la suite $(U_k\ ,\ k\in \mathbb{N})$ des fonctions aléatoires sur $[0\ ,\ 1]$ définies par :

$$\forall\ t\in[0\ ,\ 1]\ ,\quad U_o(t)=\int_o^t dZ_o(s)\ ,$$

$$\forall\ k\in\mathbb{N}\ ,\quad \forall\ t\in[0\ ,\ 1]\ ,\quad U_{k+1}(t)=\int_o^t U_k(s)\ dZ_{k+1}(s)\ ;$$

on définit une suite $(a_k\ ,\ k\in \mathbb{N})$ de variables aléatoires en posant :

$$\forall\ k\in\mathbb{N}\ ,\quad a_k=U_k(1)\ ,$$

et on se propose d'étudier les lois des a_k ; il s'agit d'une étude technique utile pour la solution de certain problème probabiliste dont nous ne parlerons pas ici. Nous prouverons :

THEOREME. <u>Les lois des</u> a_k <u>sont absolument continues</u> ; <u>la suite</u> $(g_k\ ,\ k\in \mathbb{N})$ <u>des densités vérifie</u> :

$$(0.1)\qquad \lim_{|u|\to\infty}\frac{\log|\log(g_k(u))|}{\log|u|}=\frac{2}{k+1}\ .$$

1. <u>Notations et lemmes préliminaires</u>, <u>schéma de la preuve</u>.

Remarquons pour commencer qu'en notant $(\lambda_k\ ,\ k\in \mathbb{N})$ une suite de v.a. gaussiennes centrées réduites indépendantes entre elles et des données précédentes, l'intégration partielle en $(dZ_{k+1}(s))$ fournit :

LEMME 1.1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, a_n a même loi que $\lambda_n V_n$ où V_n est défini par :

$$(1.1) \qquad V_o = 1 \ , \quad V_n = \sqrt{\int_o^1 |U_{n-1}(s)|^2 \, ds} \quad \text{si} \ n > 0 \ .$$

En fonction de ce lemme, la loi de a_n se calcule comme celle d'un produit de v.a. indépendantes dont l'une a une densité et l'autre n'a pas de charge à l'origine ; on en déduit :

LEMME 1.2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la loi de a_n est absolument continue et sa densité g_n vérifie :

$$(1.2) \qquad \forall \ u \in R \ , \quad g_n(u) = E\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ \frac{\exp(-\frac{u^2}{2V_n^2})}{V_n}\right\}$$

Dans ces conditions, tout le problème consiste à étudier la loi de V_n. En fait, pour des raisons techniques, nous associons à la suite $(g_n \ , n \in \mathbb{N})$ la suite légèrement modifiée $(h_n \ , n \in \mathbb{N})$ définie par :

$$(1.3) \qquad \forall \ n \in \mathbb{N} \ , \quad \forall \ u > 0 \ , \quad h_n(u) = E\{\psi_u(V_n)\} \ ,$$

$$(1.4) \qquad \forall \ v > 0 \ , \quad \forall \ u > 0 \ , \quad \psi_u(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ \frac{1}{v} \exp(-\frac{u^2}{2v^2}) \quad \text{si} \quad v < u \ ,$$

$$\psi_u(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \, e}} \ \frac{1}{u} \qquad \text{si} \quad v \geq u \ .$$

Un calcul simple de variations montre en effet :

LEMME 1.5. Pour tout $u > 0$, ψ_u est une fonction croissante sur R^+ et on a :

$$(1.5) \qquad \forall \ n \in \mathbb{N} \ , \quad g_n(u) \leq h_n(u) \leq g_n(u) + \frac{1}{u\sqrt{2\pi e}} \, P\{V_n > u\} \ .$$

Dans ces conditions, le calcul qui fonde la preuve du théorème est le suivant : nous allons déterminer des suites de variables aléatoires positives et simples à évaluer $(X_n \ , n \in \mathbb{N})$, $(Y_n \ , n \in \mathbb{N})$ encadrant $(V_n \ , n \in \mathbb{N})$ au sens suivant :

(1.6) $\quad \forall\, x \in R^{+}\ ,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^{*}\ ,\ P\{X_n \geq x\} \leq P\{V_n \geq x\} \leq n\, 2^n\, P\{Y_n \geq x\}$;

les formules (1.3) et (1.4) et le lemme 1.5 impliqueront alors :

(1.7) $\quad n\, 2^n\, E\{\psi_u(Y_n)\} \geq g_n(u) \geq E\{\psi_u(X_n)\} - \dfrac{n\, 2^n}{u\sqrt{2\pi e}}\, P\{Y_n \geq u\}$.

La formule (1.7) et les évaluations sur X et Y fourniront le résultat.

2. Construction de la suite Y .

Pour abréger le langage, nous utiliserons la notation suivante pour tout couple (V, W) de variables aléatoires et tout nombre $a > 0$:

$$V \overset{a}{\ll} W \Longleftrightarrow \forall\, x \in R\ ,\ P\{V \geq x\} \leq a P\{W \geq x\} .$$

La formule (1.1) s'écrit alors pour tout $n \geq 2$:

$$V_n \overset{1}{\ll} \sup_{s \in [0,1]} \left| \int_0^s U_{n-2}(\sigma)\, dZ_{n-1}(\sigma) \right| = \sup_{s \in [0,1]} |U_{n-1}(s)| .$$

Pour évaluer la loi du supremum figurant au second membre de cette relation, on peut appliquer les inégalités de Levy : c'est en effet une borne supérieure de sommes partielles pour les accroissements de Z_{n-1} qui sont indépendants et symétriques ; en intégrant ensuite par rapport aux autres variables intervenant, on obtient :

$$\sup_{s \in [0,1]} |U_{n-1}(s)| \overset{2}{\ll} |U_{n-1}(1)| = |a_{n-1}| \overset{1}{\ll} |\lambda_{n-1}|\, V_{n-1} ;$$

Par récurrence et un calcul simple pour $n = 1$, on en déduit pour tout $n \geq 1$:

$$V_n \overset{2^n}{\ll} \prod_{k=0}^{n-1} |\lambda_k| \overset{n2^n}{\ll} |\lambda_0|^n .$$

Ceci justifie le résultat annoncé avec :

(2.1) $\quad \forall\, n \geq 1\ ,\ Y_n = |\lambda_0|^n$.

3. Construction de la suite X .

Nous fixons $n \geq 1$ et nous choisissons un élément f_0 de la boule unité de $L^2\{[0, 1], ds\}$. Nous définissons une famille finie $(f_k, 1 \leq k \leq n\}$ de fonctions sur $[0, 1]$ et une famille finie $(W_k, 1 \leq k \leq n\}$ de variables aléatoires en posant :

$$\forall s \in [0, 1], \quad f_k(s) = f_o(s) \int_s^1 f_{k-1}(t)\, dt,$$

$$W_k = \left| \int_o^1 f_{k-1}(s)\, U_{n-k}(s)\, ds \right| ;$$

la formule (1.1) implique alors :

$$V_n \geq W_1 ;$$

par ailleurs, la définition de W_k fournit :

$$W_k = \left| \int_o^1 U_{n-k-1}(s) \left(\int_s^1 f_{k-1}(t)\, dt \right) dZ_{n-k}(s) \right| ,$$

et par suite :

$$W_k \overset{1}{\gg} |\lambda_{k-1}| \sqrt{\int_o^1 \left[U_{n-k-1}(s) \int_s^1 f_{k-1}(t)\, dt \right]^2 ds} ;$$

en répétant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ceci donne :

$$W_k \overset{1}{\gg} |\lambda_{k-1}|\, W_{k+1} ,$$

et en regroupant ces inégalités :

$$V_n \overset{1}{\gg} \left(\prod_{k=0}^{n-1} |\lambda_k| \right) \sigma ,$$

où σ est un nombre qui s'évalue en fonction de f_o ; en choisissant $f_o = 1$, on obtient par exemple :

$$\sigma = \sqrt{\int_o^1 \left(\int_s^1 f_{n-1}(t)\, dt \right)^2 ds} \geq \frac{1}{(n+1)!} .$$

Ceci justifie le résultat annoncé avec :

$$\text{(3.1)} \qquad \forall n \geq 1, \quad X_n = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n-1} |\lambda_k| .$$

4. Preuve du théorème.

L'existence des densités étant affirmée au lemme 1.2, il nous suffit de prouver la relation (0.1) ; elle est triviale au rang $k=0$, nous la prouvons aux rangs suivants.

4.1. Majoration des densités. L'inégalité (1.7) et la relation (2.1) impliquent :

$$\forall\, n\geq 1 \ ,\quad \forall\, u\in R \ ,\quad g_n(u)\leq n\, 2^n\, E\{\psi_{|u|}(|\lambda_o|^n)\}\ ,$$

on a évidemment :

$$E\{\psi_{|u|}(\lambda_o|^n)\}\leq \int_{|\lambda|\geq|u|^{\frac{1}{n+1}}} \frac{\exp(-\frac{\lambda^2}{2})}{|u|\sqrt{2\pi e}}\, d\lambda + \int_{|\lambda|<|u|^{\frac{1}{n+1}}} \frac{\exp(-\frac{u^2}{2|\lambda|^{2n}})}{|\lambda|^n\sqrt{2\pi}}\, d\lambda\ ,$$

ces deux intégrales se majorent facilement ; on obtient :

$$(4.1)\qquad g_n(u)\leq n\, 2^n\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \frac{2}{|u|}\, \exp(-\frac{1}{2}\, |u|^{\frac{2}{n+1}})\ .$$

4.2. Minoration des densités. L'inégalité (1.7) et les relations (2.1) et (3.1) impliquent :

$$\forall\, n\geq 1\ ,\quad \forall\, u\in R\ ,\quad g_n(u)\geq E\left\{\psi_{|u|}\left(\frac{\prod_{k=0}^{n-1}|\lambda_k|}{(n+1)!}\right)\right\} - \frac{n\, 2^n}{|u|\sqrt{2\pi e}}\, P\{|\lambda|^n>u\}\ ;$$

le dernier terme se majore usuellement ; quant au premier terme du second membre, on le minore efficacement en intégrant par exemple dans le seul domaine :

$$\forall\, k\in[0,n-1]\ ,\quad |\lambda_k|\in\left[\frac{1}{2}\,|u|^{\frac{1}{n+1}}\ ,\ \frac{3}{2}\,|u|^{\frac{1}{n+1}}\right]\ ,$$

on obtient :

$$(4.2)\qquad E\left\{\psi_{|u|}\left(\frac{\prod_{k=0}^{n-1}|\lambda_k|}{(n+1)!}\right)\right\}\geq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}}\, \frac{2}{3\sigma}\, \exp(-\{\frac{2^{2n}}{2\sigma^2}+\frac{9}{8}\}\, |u|^{\frac{2}{n+1}})\ .$$

Les inégalités (4.1) et (4.2) fournissent bien le résultat annoncé.