

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

HANS FÖLLMER

Calcul d'Ito sans probabilités

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 15 (1981), p. 143-150

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1981__15__143_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CALCUL D'ITO SANS PROBABILITES

par H. Föllmer

Le but de cette note est de montrer qu'on peut faire le calcul d'Itô « trajectoire par trajectoire », dans le sens strict du terme. Pour cela, nous allons traiter la formule d'Itô, y compris la construction de l'intégrale stochastique $\int F'(X_{s-})dX_s$ à l'aide de sommes de Riemann, comme un exercice d'analyse sur une classe de fonctions réelles à variation quadratique. Nous allons parler de probabilités seulement après, en vérifiant que pour certains processus stochastiques (les semimartingales, les processus à énergie finie, ...) presque toutes les trajectoires appartiennent à cette classe.

Soit x une fonction réelle sur $[0, \infty[$, continue à droite et pourvue de limites à gauche. Nous utilisons la notation $x_t = x(t)$, $\Delta x_t = x_t - x_{t-}$, $\Delta x_t^2 = (\Delta x_t)^2$.

Nous appellerons subdivision toute suite finie $\tau = (t_0, \dots, t_k)$ telle que $0 \leq t_0 < \dots < t_k < \infty$, et nous poserons $t_{k+1} = \infty$, $x_\infty = 0$. Soit $(\tau_n)_{n=1,2,\dots}$ une suite de subdivisions dont le pas tend vers 0 sur tout intervalle compact. Nous dirons que x est à variation quadratique suivant (τ_n) si les mesures ponctuelles

$$(1) \quad \xi_n = \sum_{t_i \in \tau_n} (x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 \epsilon_{t_i}$$

convergent vaguement vers une mesure de Radon ξ sur $[0, \infty[$, dont la partie atomique est donnée par les sauts quadratiques de x :

$$(2) \quad [x, x]_t = [x, x]_t^c + \sum_{s \leq t} \Delta x_s^2$$

où $[x, x]$ désigne la fonction de répartition de ξ , et $[x, x]^c$ sa partie continue.

THÉORÈME. Soit x à variation quadratique suivant (τ_n) , et soit F une fonction de classe C^2 sur \mathbb{R} . Alors on a la formule d'Itô

$$(3) \quad F(x_t) = F(x_0) + \int_0^t F'(x_{s-}) dx_s + \frac{1}{2} \int_{]0,t]} F''(x_{s-}) d[x,x]_s \\ + \sum_{s \leq t} [F(x_s) - F(x_{s-}) - F'(x_{s-}) \Delta x_s - \frac{1}{2} F''(x_{s-}) \Delta x_s^2],$$

où on pose

$$(4) \quad \int_0^t F'(x_{s-}) dx_s = \lim_n \sum_{\tau_n \ni t_i \leq t} F'(x_{t_i}) (x_{t_{i+1}} - x_{t_i}),$$

et où la série est absolument convergente.

REMARQUE. D'après (2), on peut écrire les deux derniers termes de (3) sous la forme

$$(5) \quad \frac{1}{2} \int_0^t F''(x_{s-}) d[x,x]_s^C + \sum_{s \leq t} [F(x_s) - F(x_{s-}) - F'(x_{s-}) \Delta x_s],$$

et on a

$$(6) \quad \int_0^t F''(x_{s-}) d[x,x]_s^C = \int_0^t F''(x_s) d[x,x]_s^C$$

puisque x est une fonction càdlàg.

Démonstration. Soit $t > 0$. D'après la continuité à droite de x on a

$$F(x_t) - F(x_0) = \lim_n \sum_{\tau_n \ni t_i \leq t} [F(x_{t_{i+1}}) - F(x_{t_i})].$$

1) Pour gagner en clarté, nous traitons d'abord le cas particulièrement simple où x est une fonction continue. La formule de Taylor permet d'écrire

$$\sum_{\tau_n \ni t_i \leq t} [F(x_{t_{i+1}}) - F(x_{t_i})] = \sum F'(x_{t_i}) (x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) \\ + \frac{1}{2} \sum F''(x_{t_i}) (x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 + \sum r(x_{t_i}, x_{t_{i+1}}),$$

où

$$(7) \quad r(a,b) \leq \varphi(|b-a|)(b-a)^2,$$

$\varphi(\cdot)$ fonction croissante sur $[0, \infty[$, $\varphi(c) \rightarrow 0$ lorsque $c \rightarrow 0$. Lorsque $n \uparrow \infty$, la seconde somme à droite tend vers

$$\frac{1}{2} \int_{[0,t]} F''(x_s) d[x,x]_s = \frac{1}{2} \int_{]0,t]} F''(x_{s-}) d[x,x]_s$$

d'après la convergence vague des mesures ponctuelles (ξ_n) ; noter que la continuité de x donne la continuité de $[x,x]$, en vertu de (2). La troisième somme, qui est dominée par

$$\varphi\left(\max_{\tau_n \ni t_i \leq t} |x_{t_{i+1}} - x_{t_i}|\right) \sum_{\tau_n \ni t_i \leq t} (x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2,$$

tend vers 0 puisque x est continue. On obtient ainsi l'existence de la limite (4), et la formule d'Itô (3).

2) Passons au cas général. Soit $\varepsilon > 0$. Nous séparons les sauts de x sur $[0,t]$ en deux classes: une classe finie $C_1 = C_1(\varepsilon, t)$, et une classe $C_2 = C_2(\varepsilon, t)$ telle que $\sum_{s \in C_2} \Delta x_s^2 \leq \varepsilon^2$. Écrivons

$$\sum_{\tau_n \ni t_i \leq t} [F(x_{t_{i+1}}) - F(x_{t_i})] = \Sigma_1 [F(x_{t_{i+1}}) - F(x_{t_i})] + \Sigma_2 [F(x_{t_{i+1}}) - F(x_{t_i})]$$

où Σ_1 indique la sommation sur les $t_i \in \tau_n$, $t_i \leq t$ tels que l'intervalle $]t_i, t_{i+1}]$ contient un saut de la classe C_1 . On a

$$\lim_n \Sigma_1 [F(x_{t_{i+1}}) - F(x_{t_i})] = \sum_{s \in C_1} [F(x_s) - F(x_{s-})].$$

D'autre part, la formule de Taylor permet d'écrire

$$\Sigma_2 [F(x_{t_{i+1}}) - F(x_{t_i})] =$$

$$\sum_{\tau_n \ni t_i \leq t} F'(x_{t_i})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) + \frac{1}{2} \sum_{\tau_n \ni t_i \leq t} F''(x_{t_i})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2$$

$$- \Sigma_1 [F'(x_{t_i})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) + \frac{1}{2} F''(x_{t_i})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2] + \Sigma_2 r(x_{t_i}, x_{t_{i+1}}).$$

On va montrer ci-dessous (9) que la deuxième somme à droite tend vers

$$\frac{1}{2} \int_{]0, t]} F''(x_{s-}) d[x, x]_s ,$$

lorsque $n \uparrow \infty$. La troisième somme tend vers

$$\sum_{s \in C_1} [F'(x_{s-}) \Delta x_s + \frac{1}{2} F''(x_{s-}) \Delta x_s^2] .$$

D'après la continuité uniforme de F'' sur l'ensemble borné des valeurs x_s ($0 \leq s \leq t$), on peut supposer (7), et cela entraîne

$$(8) \quad \limsup_n \sum_2 r(x_{t_i}, x_{t_{i+1}}) \leq \varphi(\varepsilon) [x, x]_{t+} .$$

Faisons tendre ε vers 0 : alors (8) tend vers 0, et

$$\sum_{s \in C_1(\varepsilon, t)} [F(x_s) - F(x_{s-}) - F'(x_{s-}) \Delta x_s] - \frac{1}{2} \sum_{s \in C_1(\varepsilon, t)} F''(x_{s-}) \Delta x_s^2$$

tend vers la série dans (3) ; la série est absolument convergente puisque

$$\sum_{s \leq t} |F(x_s) - F(x_{s-}) - F'(x_{s-}) \Delta x_s| \leq \text{const} \sum_{s \leq t} \Delta x_s^2$$

d'après la formule de Taylor. On obtient ainsi l'existence de la limite en (4), et la formule d'Itô (3).

3) Montrons que

$$(9) \quad \lim_n \sum_{\tau_n \leq t_i \leq t} f(x_{t_i}) (x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 = \int_{]0, t]} f(x_{s-}) d[x, x]_s$$

pour toute fonction continue f sur \mathbb{R} . Soit $\varepsilon > 0$, et notons z la fonction de répartition pour les sauts dans la classe $C_1 = C_1(\varepsilon, t)$:

$$z_u = \sum_{C_1 \ni s \leq u} \Delta x_s \quad (u \geq 0) .$$

On a

$$(10) \quad \lim_n \sum_{\tau_n \leq t_i \leq u} f(x_{t_i}) (z_{t_{i+1}} - z_{t_i})^2 = \sum_{C_1 \ni s \leq u} f(x_{s-}) \Delta x_s^2$$

pour tout $u \geq 0$. Notons ζ_n et η_n les mesures ponctuelles associées

à z et à $y = x - z$ à la manière de (1). D'après (10), les mesures ζ_n convergent vaguement vers la mesure ponctuelle

$$\zeta = \sum_{s \in C_1} \Delta x_s^2 \epsilon_s.$$

Comme la dernière somme de

$$\begin{aligned} \sum_{\tau_n \ni t_i \leq u} (x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 = \\ \sum (y_{t_{i+1}} - y_{t_i})^2 + \sum (z_{t_{i+1}} - z_{t_i})^2 + 2 \sum (y_{t_{i+1}} - y_{t_i})(z_{t_{i+1}} - z_{t_i}) \end{aligned}$$

tend vers 0, les mesures η_n convergent vaguement vers la mesure $\eta = \zeta - \eta$, dont la partie atomique a une masse totale $\leq \epsilon^2$. Or la fonction $f \circ x$ est presque sûrement continue par rapport à la partie continue de η , et cela implique

$$(11) \quad \limsup_n \left| \sum_{\tau_n \ni t_i \leq t} f(x_{t_i})(y_{t_{i+1}} - y_{t_i})^2 - \int_{]0, t]} f(x_{s-}) d\eta \right| \leq 2 \|f\|_t \epsilon^2,$$

où $\|f\|_t = \sup \{ f(x_s); 0 \leq s \leq t \}$. Combinant (10) et (11), on obtient (9), et cela achève la démonstration. Soulignons qu'on a suivi de près la démonstration « classique » : voir Meyer [4]. Le seul élément nouveau est l'usage de la convergence vague, qui permet d'en donner une version purement analytique.

REMARQUES. 1) Soit $x = (x^1, \dots, x^n)$ une fonction càdlàg sur $[0, \infty[$ à valeurs dans \mathbb{R}^n . Disons que x est à variation quadratique suivant (τ_n) si toutes les fonctions réelles $x^i, x^i + x^j$ ($1 \leq i, j \leq n$) le sont. Dans ce cas, notons

$$\begin{aligned} [x^i, x^j]_t &= \frac{1}{2} ([x^i + x^j, x^i + x^j]_t - [x^i, x^j]_t - [x^i, x^j]_t) \\ &= [x^i, x^j]_t^c + \sum_{s \leq t} \Delta x_s^i \Delta x_s^j. \end{aligned}$$

Alors on a la formule d'Itô

$$(12) \quad \begin{aligned} F(x_t) &= F(x_0) + \int_0^t D F(x_{s-}) dx_s + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \int_0^t D_i D_j F(x_{s-}) d[x^i, x^j]_s^c \\ &\quad + \sum_{s \leq t} [F(x_s) - F(x_{s-}) - \sum_i D_i F(x_{s-}) \Delta x_s^i] \end{aligned}$$

pour toute fonction F de classe C^2 sur \mathbb{R}^n , où on pose

$$(13) \quad \int_0^t DF(x_{s-}) dx_s = \lim_n \sum_{\tau_n \ni t_i \leq t} \langle DF(x_{t_i}), x_{t_{i+1}} - x_{t_i} \rangle$$

($\langle \cdot, \cdot \rangle$ = produit scalaire dans \mathbb{R}^n). La démonstration est la même, avec des notations plus lourdes.

2) La classe des fonctions à variation quadratique est stable pour les opérations C^1 . Précisément: si $x = (x^1, \dots, x^n)$ est à variation quadratique suivant (τ_n) , F une fonction continûment différentiable sur \mathbb{R}^n , alors $y = F \circ x$ est à variation quadratique suivant (τ_n) , avec

$$(14) \quad [y, y]_t = \sum_{i,j} \int_0^t D_i F(x_s) D_j F(x_s) d[x^i, x^j]_s^C + \sum_{s \leq t} \Delta y_s^2.$$

C'est la version analytique d'un résultat de Meyer sur les semimartingales: voir [4] p. 359. La démonstration est analogue à la précédente.

Passons aux processus stochastiques. Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ une semimartingale. Alors, pour tout $t \geq 0$, les sommes

$$(15) \quad S_{\tau, t} = \sum_{\tau \ni t_i \leq t} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$$

convergent en probabilité vers

$$[X, X]_t = \langle X^C, X^C \rangle_t + \sum_{s \leq t} \Delta X_s^2$$

lorsque le pas de la subdivision τ tend vers 0 sur $[0, t]$; voir Meyer [4] p. 358. Pour toute suite, il y a donc une sous-suite (τ_n) telle que, presque sûrement,

$$(16) \quad \lim_n S_{\tau_n, t} = [X, X]_t$$

pour tout t rationnel. Cela implique que presque toutes les trajectoires sont à variation quadratique suivant (τ_n) ; en plus, la relation (16) est valable pour tout $t \geq 0$, d'après (9). La formule d'Itô (3), appliquée trajectoire par trajectoire, ne dépend pas de

la suite (τ_n) ; en particulier, on obtient la convergence en probabilité des sommes de Riemann en (4) vers l'intégrale stochastique

$$\int_0^t F'(X_{s-}) dX_s, \text{ lorsque le pas de } \tau \text{ tend vers } 0 \text{ sur } [0, t].$$

REMARQUES. 1) Pour le mouvement brownien, et une suite arbitraire de subdivisions (τ_n) dont le pas tend vers 0 sur tout intervalle compact, presque toutes les trajectoires sont à variation quadratique suivant (τ_n) . En fait, d'après le théorème de Lévy on a (16) sans passage aux sous-suites.

2) Pour l'argument ci-dessus, il faut seulement savoir que les sommes (15) convergent en probabilité vers un processus croissant $[X, X]$ dont les trajectoires sont de la forme (2). La classe de ces processus à variation quadratique est, bien entendu, plus large que la classe des semimartingales: on n'a qu'à prendre un processus déterministe à variation quadratique qui n'est pas à variation bornée. Citons aussi les processus à énergie finie $X = M + A$ où M est une martingale locale et où A est un processus dont les trajectoires sont à variation quadratique 0 suivant les subdivisions dyadiques. Ces processus interviennent dans l'étude probabiliste des espaces de Dirichlet: voir Fukushima [3].

3) Pour les semimartingales, on sait construire l'intégrale stochastique $\int H_{s-} dX_s$ (H càdlàg adapté) trajectoire par trajectoire comme limite de sommes de Riemann, dans ce sens que les sommes convergent presque sûrement en dehors d'un ensemble exceptionnel qui dépend de H : voir Bichteler [1]. On vient de montrer que, pour les besoins particuliers du calcul d'Itô où $H = f \circ X$ (f de classe C^1), on peut choisir l'ensemble exceptionnel à l'avance, indépendamment de H . On peut aller au-delà de la classe C^1 , par un traitement « trajectoire par trajectoire » du temps local. Mais pas trop: Stricker [5] vient de préciser qu'une extension aux fonctions continues n'est possible que pour les processus à variation finie.

REFERENCES.

- [1] BICHTELER, K.: Stochastic Integration and L^p -theory of semimartingales. Technical report No. 5, U. of Texas (1979).
- [2] DELLACHERIE, C., et MEYER, P.A.: Probabilités et Potentiel; Théorie des Martingales. Hermann (1980).

- [3] FUKUSHIMA, M.: Dirichlet forms and Markov processes. North Holland (1980).
- [4] MEYER, P.A.: Un cours sur les intégrales stochastiques. Sém.Prob.X, LN 511 (1976).
- [5] STRICKER, C.: Quasimartingales et variations. Sém.Prob.XV (1980).