

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

C. COCOZZA

M. YOR

## Démonstration d'un théorème de F. Knight à l'aide de martingales exponentielles

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 14 (1980), p. 496-499

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1980\\_\\_14\\_\\_496\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__496_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

Démonstration d'un théorème de F. Knight à l'aide de martingales exponentielles.

C. Coccozza et M. Yor

En [3], F. Knight démontre le théorème suivant, déjà annoncé, et partiellement démontré en [4]

Théorème 1 :

Soit  $[\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P]$  un espace de probabilité filtré usuel, et  $(X^1, \dots, X^n)$  une suite finie de  $(\mathcal{F}_t)$  martingales locales continues, nulles en 0, deux à deux orthogonales. Pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , et tout  $t \geq 0$ , on note  $\tau_t^k = \inf\{s / \langle X^k \rangle_s > t\}$

Quitte à élargir l'espace de probabilité d'origine, on peut supposer qu'il existe un mouvement brownien  $\beta = (\beta^1, \dots, \beta^n)$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , issu de 0, et indépendant de  $X = (X^1, \dots, X^n)$ .

Alors, le processus  $B = (B^1, \dots, B^n)$  défini par :

$$(1) \quad B_t^k = \begin{cases} X_{\tau_t^k}^k(\omega), & \text{si } \langle X^k \rangle_{\infty}(\omega) > t \\ X_{\infty}^k(\omega) + \beta_{(t - \langle X^k \rangle_{\infty}(\omega))}^k, & \text{si } \langle X^k \rangle_{\infty}(\omega) \leq t \end{cases}$$

est un mouvement brownien à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ .

Remarques :

1) Soulignons que les processus  $B^k (1 \leq k \leq n)$  sont bien définis par la formule (1), grâce à l'égalité :  $\{X_t^k \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \cdot\} = \{\langle X^k \rangle_{\infty} < \infty\}$  P p.s.

2) Un théorème, maintenant classique, obtenu simultanément par Dambis [9] d'une part, Dubins et Schwarz [10] d'autre part, affirme que, pour tout  $k$ ,  $B^k$  est un mouvement brownien réel, relatif à la filtration  $(\mathcal{F}_{\tau_t^k})$ .

Nous utiliserons constamment ce résultat par la suite.

Avant de passer à notre démonstration du théorème de Knight, indiquons que P.A. Meyer a déjà donné une démonstration simplifiée de ce théorème en [5]. La démonstration de Meyer s'appuie sur la représentation des martingales d'un mouvement brownien réel comme intégrales stochastiques par rapport à ce processus (théorème dû à K. Ito), et sur un argument de récurrence.

La démonstration ci-dessous nous semble plus immédiate, pour deux raisons :

- on ne procède pas par récurrence
  - la méthode des martingales exponentielles est un outil simple (et efficace !) pour démontrer le théorème d'Ito sur les martingales du mouvement brownien (et, plus généralement, sur les martingales des processus à accroissements indépendants ; voir, par exemple, [8], où ce point de vue est adopté).
- Voici (enfin !) notre démonstration (par étapes).

Etape 1. Le théorème sera démontré dès que l'on aura obtenu la formule (2) suivante, pour toute suite  $(f^k)_{1 \leq k \leq n}$  de fonctions réelles, bornées, définies sur  $[0, \infty[$ , et

à support compact :

$$(2) \quad E \left[ \prod_{k=1}^n \exp \left\{ i \int_0^\infty f^k(s) dB_s^k + \frac{1}{2} \int_0^\infty (f^k(s))^2 ds \right\} \right] = 1$$

Supposons (2) vérifiée : alors, si l'on fixe  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p < \infty$ , et que l'on prend  $f^k = \sum_{j=1}^p \lambda_j^k 1_{[t_{j-1}, t_j]}$ , on observe, en faisant varier les coefficients  $(\lambda_j^k)$  dans  $\mathbb{R}$ , que le vecteur aléatoire  $(B_{t_j}^k - B_{t_{j-1}}^k)_{1 \leq j \leq p; 1 \leq k \leq n}$  a la transformée de Fourier, et donc la loi, cherchée.

Etape 2. Décomposons l'intégrale  $\int_0^\infty f^k(s) dB_s^k$  en :

$$(3) \quad \int_0^{<X^k>_\infty} f^k(s) dB_s^k + \int_{<X^k>_\infty}^\infty f^k(s) dB_s^k.$$

(la variable aléatoire  $<X^k>_\infty$  est un  $\{\tau_k\}$  temps d'arrêt ; les intégrales qui figurent en (3) sont donc bien des intégrales stochastiques).

A l'aide de la remarque 2, et d'un argument de classe monotone, on peut écrire :

$$(4) \quad \int_0^{<X^k>_\infty} f^k(s) dB_s^k = \int_0^\infty f^k(<X^k>_s) dX_s^k,$$

et

$$(5) \quad \int_{<X^k>_\infty}^\infty f^k(s) dB_s^k = \int_0^\infty f^k(t + <X^k>_\infty) d\beta_t^k.$$

(le mouvement brownien  $\beta^k$  étant indépendant de la tribu  $\mathcal{F}_t^k$  engendrée par les variables  $(X_t^k)_{t \geq 0; 1 \leq k \leq n}$ , l'intégrale stochastique en  $d\beta^k$  est bien définie).

Enfin, la formule de changement de variables dans les intégrales de Stieltjes permet d'écrire, en posant  $g^k = (f^k)^2$  :

$$(6) \quad \int_0^\infty g^k(s) ds = \int_0^{<X^k>_\infty} g^k(<X^k>_s) d<X^k>_s + \int_0^\infty g^k(t + <X^k>_\infty) dt.$$

Etape 3. A l'aide des formules (4), (5) et (6), et de l'orthogonalité des martingales locales  $(X^1, \dots, X^n)$ , on peut écrire l'intégrand du membre de gauche de (2) comme le produit IJ, où :

$$I = \exp \left\{ i X_\infty^F + \frac{1}{2} <X^F>_\infty \right\}$$

$[X_t^F = \int_0^t (F_s, dX_s) ; (\cdot, \cdot)$  désigne le produit scalaire dans  $\mathbb{R}^n$ , et  $(F_s)$  le processus à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , dont la  $k^{\text{ième}}$  composante est  $F_s^k = f^k(<X^k>_s)]$

et  $J = \exp \left\{ i \beta_{\infty}^G + \frac{1}{2} \langle \beta^G \rangle_{\infty} \right\}$

$$\beta_t^G = \int_0^t (G_s, d\beta_s), \text{ et } G_s^k = f^k(s + \langle X^k \rangle_{\infty}).$$

Etape 4. Les processus  $\beta$  et  $X$  étant indépendants, la variable aléatoire  $\beta_{\infty}^G$  est, conditionnellement à  $X$ , une variable gaussienne, centrée, de covariance  $\langle \beta^G \rangle_{\infty}$ .

On a donc :

$$(7) \quad E[IJ] = E[I].$$

D'autre part, d'après la formule d'Ito, on a :

$$I = 1 + \int_0^{\infty} I_s (dX_s^F),$$

où  $I_s = \exp \left[ iX_s^F + \frac{1}{2} \langle X^F \rangle_s \right]$ .  $I$  est donc la variable terminale de la martingale bornée  $(I_t)$ , égale à 1 en  $t=0$ .

Finalement, on a donc :  $E[I] = 1$ , d'où le résultat, d'après (7).

Un théorème analogue au théorème de Knight, pour des martingales locales sommes de sauts compensés, a été dégagé, et démontré par P.A. Meyer en [5], toujours à l'aide de la méthode de représentation des martingales comme intégrales stochastiques. Il s'énonce ainsi :

Théorème 2 :

Sur un espace de probabilité filtré usuel, soient  $X^1, \dots, X^n$  des martingales locales, sommes de sauts compensés, à sauts totalement inaccessibles, tous égaux à 1, nulles en 0, et deux à deux orthogonales. On suppose que pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$   $\langle X^k \rangle_{\infty} = +\infty$  et, pour tout  $t > 0$  on note  $\tau_t^k = \inf\{s / \langle X^k \rangle_s > t\}$ .

Alors les processus  $N^1, \dots, N^n$  définis par

$$N_t^k(\omega) = X_{\tau_t^k}^k(\omega)$$

sont des processus de Poisson compensés, de paramètre 1, indépendants.

Remarque : Il est amusant de noter que Meyer se demande, en [5], si le théorème 2 n'est autre qu'une curiosité mathématique. Celui-ci se trouve jouer, en fait, un rôle important dans l'article [2] qui a été, par ailleurs, à l'origine de cette note.

Ce théorème se généralise au cas où  $\langle X^k \rangle_{\infty}$  n'est pas égal à  $+\infty$ , en "complétant" les processus  $N^k$  par des processus de Poisson compensés indépendants et indépendants de  $(X^1, \dots, X^n)$ .

La démonstration du théorème 2, tout à fait semblable à celle du théorème 1, repose sur la formule exponentielle suivante (voir [7], par exemple).

Soit  $X$  une martingale locale quasi continue à gauche dont les sauts sont bornés par une constante  $k$ , alors

$$\exp\{X_t - \frac{1}{2} \langle X^C, X^C \rangle_t - \int_{]0,t] \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})} (e^x - 1 - x) \gamma(dx, ds)\},$$

où  $\gamma$  désigne la mesure de Lévy de  $X$ , est une martingale locale.

Remarquons que cette formule exponentielle permet de démontrer à la fois que les processus  $N^k$  sont des processus de Poisson compensés (ce théorème est dû à S. Watanabe [6] ; en fait, la méthode utilisée ici pour  $n \in \mathbb{N}$  n'est autre que l'extension de celle utilisée par P. Brémaud en [1] pour  $n=1$ ) et qu'ils sont indépendants.

#### Références :

- [1] P. BREMAUD : An extension of Watanabe's theorem of characterization of Poisson processes over the positive real half line.  
J. App. Prob. 12, 396-399 (1975).
- [2] C. COCOZZA & C. KIPNIS : Processus de vie et mort sur  $\mathbb{R}$ , avec interaction selon les particules les plus proches.  
(à paraître au Zeitschrift für Wahr).
- [3] F.B. KNIGHT : A reduction of continuous square-integrable martingales to Brownian motion.  
Lect. Notes in Maths 190. Springer (1970).
- [4] F.B. KNIGHT : An infinitesimal decomposition for a class of Markov processes.  
Ann. of Math. Stat. 41, 5, 1970.
- [5] P.A. MEYER : Démonstration simplifiée d'un théorème de Knight.  
Séminaire de Probabilités V. Lect. Notes in Maths 191. Springer (1971).
- [6] S. WATANABE : On discontinuous additive functionals and Lévy measures of Markov processes. Japanese J. Maths 34, 53-70 (1964).
- [7] M. YOR : Sur les intégrales stochastiques optionnelles, et une suite remarquable de formules exponentielles.  
Séminaire de Probabilités X. Lect. Notes in Maths 511. Springer (1976).
- [8] M. YOR : Remarques sur la représentation des martingales comme intégrales stochastiques.  
Séminaire de Probabilités XI. Lect. Notes in Maths 581. Springer (1977).
- [9] K. DAMBIS : On the decomposition of continuous sub-martingales.  
Teo. Verojatnost. Vol 10 (1965), pp. 438-448.
- [10] L. DUBINS & G. SCHWARZ : On continuous martingales.  
Proc. Nat. Acad. Sci. USA. Vol 53 (1965), p. 913-916.