

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

RENZO CAIROLI

Intégrale stochastique curviligne le long d'une courbe rectifiable

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 489-495

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__489_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

INTEGRALE STOCHASTIQUE CURVILIGNE
LE LONG D'UNE COURBE RECTIFIABLE

par R. CAIROLI

Une manière naturelle de définir l'intégrale stochastique curviligne le long de la frontière d'une région de \mathbb{R}_+^2 consiste à définir d'abord cette intégrale pour une région rectangulaire et à approcher ensuite la région donnée de l'intérieur par des régions rectangulaires appropriées.

Sous l'hypothèse que la frontière est rectifiable et que le processus à intégrer est à accroissements verticaux orthogonaux, le programme peut être réalisé et aboutit à la définition de l'intégrale stochastique $\int_{\partial A} \varphi \partial_1 W$.

Pour la notation et la terminologie, nous renvoyons le lecteur à [4]. Ajoutons que si A est un sous-ensemble de \mathbb{R}_+^2 , A° désignera l'intérieur de A , ∂A sa frontière et $\mathcal{L}(\partial A)$ la longueur de ∂A lorsque celle-ci est définie. Nous désignerons en outre par $|A|$ l'aire de A .

Nous supposerons donné un espace probabilisé complet $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ et un processus de Wiener à paramètre bi-dimensionnel $W = \{W_z, z \in \mathbb{R}_+^2\}$. Nous désignerons par $\{\mathfrak{F}_z, z \in \mathbb{R}_+^2\}$ la famille des tribus complétées engendrée par W .

Nous appellerons processus à 2-accroissements orthogonaux un processus $\varphi = \{\varphi(s, t), (s, t) \in \mathbb{R}_+^2\}$

- a) \mathfrak{F}_{st}^1 - adapté :
- b) à accroissements orthogonaux en t et nul pour $t = 0$;
- c) équi-continu dans L^2 en t (le mot "équi" se réfère à s variant dans un ensemble borné) .

La définition de processus à 1-accroissements orthogonaux est analogue et nous appellerons un processus qui est à la fois à 1- et à 2-accroissements orthogonaux processus séparément à accroissement orthogonal. On remarquera qu'un processus séparément à accroissement orthogonal est continu dans L^2 .

Nous appellerons un sous-ensemble R de \mathbb{R}_+^2 région rectangulaire si

a) R est la réunion d'un nombre fini de rectangles fermés de côtés parallèles aux axes ;

b) R° est un domaine simplement connexe.

Soit A un sous-ensemble fermé et borné de \mathbb{R}_+^2 dont l'intérieur est un domaine simplement connexe et la frontière une courbe rectifiable.

Supposons que $A \subset [0, a]$, $a = (s_a, t_a)$. Couvrons $[0, a]$ d'un quadrillage de maille (= longueur du côté) λ et choisissons λ suffisamment petit pour qu'au moins un carré du quadrillage soit contenu dans A° . Prolongeons ce carré en un ensemble maximal Q contenu dans A° , par adjonction successive de carrés qui ont au moins un côté en commun avec l'ensemble auquel ils sont adjoints. Il est évident que Q ainsi défini est une région rectangulaire.

Nous allons énoncer une conclusion qui résulte en modifiant légèrement un raisonnement dû à BEHNKE et SOMMER ([1], p. 74) : pour tout $\delta > 0$, on peut choisir λ et une partition de $A - Q$ au moyen des lignes du quadrillage en n régions Q_i qui se recouvrent au plus sur ces lignes, de telle manière que

- a) $n\lambda \leq 24 \mathcal{L}(\partial A)$;
- b) diamètre $Q_i \leq \delta$, $i = 1, 2, \dots, n$;
- c) $|A - Q| \leq \delta$.

Donnons-nous un $\epsilon > 0$ et choisissons un δ dans $(0, \epsilon]$ tel que

$$(1) E\{(\varphi(s, t') - \varphi(s, t))^2\} \leq \epsilon, \text{ pour tout } (s, t), (s, t') \in [0, a] \text{ avec } |t - t'| \leq \delta.$$

Un tel choix est possible car, pour t variant dans un ensemble borné, l'équi-continuité est uniforme.

Choisissons ensuite λ (donc Q) et les Q_i tels que a), b) et c) ci-dessus soient satisfaites.

Nous allons montrer que si R est une région rectangulaire telle que $Q \subset R^0 \subset A$, alors

$$(2) \quad E\left\{\left(\int_{\partial R} \varphi \partial_1 W - \int_{\partial Q} \varphi \partial_1 W\right)^2\right\} \leq (t_a \mathcal{L}(\partial R) + 24t_a \mathcal{L}(\partial A) + \sup_{s \leq s_a} E\{\varphi^2(s, t_a)\}) \epsilon .$$

Il est entendu que l'intégrale par rapport à $\partial_1 W$ le long de la frontière d'une région rectangulaire est posée égale à la somme des intégrales relatives à W le long des segments horizontaux de cette frontière, orientés dans le sens indirect.

Désignons par R_i la fermeture de $R \cap Q_i^0$. Le premier membre de (2) s'écrit alors sous la forme

$$(3) \quad E\left\{\left(\sum_{i=1}^n \int_{\partial R_i} \varphi \partial_1 W\right)^2\right\} .$$

Mais si $i \neq j$, $\int_{\partial R_i} \varphi \partial_1 W$ est orthogonal à $\int_{\partial R_j} \varphi \partial_1 W$. Pour le vérifier, on écrit d'abord les deux intégrales comme sommes finies d'intégrales le long de la frontière de rectangles, cela permettant de ramener l'assertion au cas où

$$R_i = [s, s'] \times [t_i, t_i'] \quad \text{et} \quad R_j = [s, s'] \times [t_j, t_j'] , \quad \text{avec} \quad s < s', t_i < t_i' \leq t_j < t_j' .$$

En écrivant ensuite

$$(4) \quad \int_{\partial R_k} \varphi \partial_1 W = \int_{R_k} \varphi(u, t_k') dW_{uv} + \int_s^{s'} (\varphi(u, t_k') - \varphi(u, t_k)) d_u W_{ut_k} , \quad k = i, j ,$$

on constate que le premier terme du second membre de l'équation d'indice j est orthogonal aux deux termes du second membre de l'équation d'indice i , en vertu des propriétés de l'intégrale stochastique, et qu'on peut en dire de même du second terme, en raison de l'orthogonalité des accroissements de φ .

L'espérance sous (3) est donc égale à

$$\sum_{i=1}^n E\left\{\left(\int_{\partial R_i} \varphi \partial_1 W\right)^2\right\}$$

et l'inégalité (2) résultera de l'estimation de $E\left\{\left(\int_{\partial R_i} \varphi \partial_1 W\right)^2\right\}$ que nous allons établir. Prolongeons les segments verticaux de ∂R_i de manière à obtenir des bandes verticales adjacentes. L'intégrale $\int_{\partial R_i} \varphi \partial_1 W$ est la somme des intégrales le long des intersections de ∂R_i avec chacune de ces bandes et ces intégrales

sont orthogonales deux à deux. Fixons une bande. Son intersection avec R_i est de la forme $\bigcup_{j=1}^m H_j$, où $H_j = [s, s'] \times [t_j, t'_j]$, $s < s'$,

$t_1 < t'_1 < t_2 < \dots < t_m < t'_m$. En décomposant chaque $\int_{\partial H_j} \varphi \partial_1 W$ comme dans (4), il est facile de voir que

$$(5) \quad E\left\{\left(\sum_{j=1}^m \int_{\partial H_j} \varphi \partial_1 W\right)^2\right\} = \sum_{j=1}^m \int_s^{s'} E\{(\varphi(u, t'_j) - \varphi(u, t_j))^2\} t_j du + \\ + \left| \bigcup_{j=1}^m H_j \right| \sup_{u \leq s_a} E\{\varphi^2(u, t_a)\}.$$

Mais puisque δ a été choisi tel que (1) soit valable et que le diamètre de Q_i , donc de R_i , est $\leq \delta$, le premier terme du second membre de (5) est majoré par

$$m(s'-s)t_a \epsilon + \left| \bigcup_{j=1}^m H_j \right| \sup_{u \leq s_a} E\{\varphi^2(u, t_a)\}.$$

Si $m \geq 2$, au moins m segments horizontaux de longueur $s'-s$ font partie de $\partial R \cap \partial(\bigcup_{j=1}^m H_j)$. Si $m = 1$, il est possible que les deux côtés horizontaux de H_1 ne font pas partie de ∂R . Ce cas ne peut toutefois se produire que pour une seule bande, plus précisément celle adjacente à Q , en raison du fait que R^0 est un domaine simplement connexe. La largeur de cette bande est certainement $\leq \lambda$, sinon Q ne serait pas maximal. En sommant sur les bandes, nous obtenons donc l'inégalité

$$E\left\{\left(\int_{\partial R_i} \varphi \partial_1 W\right)^2\right\} \leq (\mathcal{L}(\partial R \cap Q_i) + \lambda)t_a \epsilon + |Q_i| \sup_{s \leq s_a} E\{\varphi^2(s, t_a)\}.$$

En sommant sur i , nous en concluons que

$$\sum_{i=1}^m E\left\{\left(\int_{\partial R_i} \varphi \partial_1 W\right)^2\right\} \leq (\mathcal{L}(\partial R) + n\lambda)t_a \epsilon + |A-Q| \sup_{s \leq s_a} E\{\varphi^2(s, t_a)\}.$$

Il ne reste alors plus qu'à observer que $n\lambda \leq 24 \mathcal{L}(\partial A)$ et $|A-Q| \leq \epsilon$.

Nous pouvons maintenant définir l'intégrale stochastique le long de ∂A . A cet effet, considérons une suite de régions rectangulaires A_i telle que

$$(6) \quad A_i \subset A_{i+1} \quad \text{pour tout } i, \quad \bigcup_i A_i = A^0 \quad \text{et} \quad \sup_i \mathcal{L}(\partial A_i) < \infty.$$

Donnons-nous un $\epsilon > 0$ et considérons la région rectangulaire Q figurant

sous (2) définie à partir de $\epsilon/4c$, c étant le terme entre parenthèses au second membre de (2) avec $\sup_i \mathcal{L}(\partial A_i)$ à la place de $\mathcal{L}(\partial R)$. Puisque les ensembles A_i^0 recouvrent Q et que Q est compact, il existe i_0 tel que

$$Q \subset A_i^0, \text{ pour tout } i \geq i_0.$$

En vertu de (2) nous avons donc l'inégalité

$$E\left\{\left|\int_{\partial A_i} \varphi \partial_1 W - \int_{\partial A_j} \varphi \partial_1 W\right|^2\right\} \leq \epsilon, \text{ pour tout } i, j \geq i_0,$$

ce qui nous montre que la suite des intégrales le long des A_i converge dans L^2 . La limite est, par définition, l'intégrale de φ le long de ∂A . En symboles :

$$\int_{\partial A} \varphi \partial_1 W = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\partial A_i} \varphi \partial_1 W, \text{ dans } L^2.$$

Il est clair que cette définition ne dépend pas du choix particulier de la suite de régions rectangulaires A_i satisfaisant à (6).

Il n'est pas difficile de constater que si R est une région rectangulaire

$$E\left\{\left|\int_{\partial R} \varphi \partial_1 W\right|^2\right\} = \int_{\partial R} E\{\varphi^2(s, t)\} t ds.$$

Par ailleurs, une légère modification des arguments utilisés par BEHNKE et SOMMER dans l'ouvrage cité antérieurement montre que pour un choix approprié, et donc pour tout choix, des régions rectangulaires A_i satisfaisant à (6),

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\partial A_i} E\{\varphi^2(s, t)\} t ds = \int_{\partial A} E\{\varphi^2(s, t)\} t ds.$$

Nous pouvons donc en conclure que

$$E\left\{\left|\int_{\partial A} \varphi \partial_1 W\right|^2\right\} = \int_{\partial A} E\{\varphi^2(s, t)\} t ds.$$

Si φ est à 1-accroissements orthogonaux, nous définissons $\int_{\partial A} \varphi \partial_2 W$ de manière analogue et si φ est séparément à accroissements orthogonaux, nous posons

$$(7) \quad \int_{\partial A} \varphi \partial W = \int_{\partial A} \varphi \partial_1 W + \int_{\partial A} \varphi \partial_2 W.$$

Dans le cas où φ est à accroissements bidimensionnels orthogonaux, on peut arriver aux mêmes résultats plus rapidement en introduisant les intégrales doubles

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \alpha dW d\varphi \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}_+^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \alpha d\varphi dW ,$$

définies, pour des processus α déterministes, suivant le procédé utilisé dans [5] et [2] pour définir l'intégrale double $\int_{\mathbb{R}_+^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} \psi dW dW$. En gros, ces deux intégrales sont respectivement la limite dans L^2 de

$$\sum_{\substack{z, z' \\ z \wedge z'}} \sum \alpha(z, z') \Delta_z W \Delta_{z'} \varphi, \quad \sum_{\substack{z, z' \\ z \wedge z'}} \sum \alpha(z, z') \Delta_z \varphi \Delta_{z'} W ,$$

On pose

$$\mathcal{J}_\varphi^1(A) = \int_{\mathbb{R}_+^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} I_A(z \vee z') d_z W d_{z'} \varphi ,$$

$$\mathcal{J}_\varphi^2(A) = \int_{\mathbb{R}_+^2} \int_{\mathbb{R}_+^2} I_A(z \vee z') d_z \varphi d_{z'} W .$$

Il est alors aisé de voir que si A est un rectangle de côtés parallèles aux axes

$$\int_{\partial A} \varphi \partial_1 W = \int_A \varphi dW + \mathcal{J}_\varphi^2(A) .$$

Cette formule s'étend aussitôt au cas où A est une région rectangulaire et constitue une sorte de formule de Green analogue à celle qui figure dans [3] .

Par passage à la limite, elle peut être utilisée pour définir l'intégrale stochastique curviligne par rapport à $\partial_1 W$ le long d'une courbe rectifiable.

En définissant $\int_{\partial A} \varphi \partial_2 W$ de manière correspondante, nous déduisons, compte tenu de (7), que

$$\int_{\partial A} \varphi \partial W = \mathcal{J}_\varphi^2(A) - \mathcal{J}_\varphi^1(A) .$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BEHNKE H. et SOMMER F. Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Springer Verlag Berlin (1972) .
- [2] CAIROLI R. et WALSH J.B. Stochastic integrals in the plane. Acta mathematica 134, 111-183 (1975) .
- [3] CAIROLI R. et WALSH J.B. Martingale representations and holomorphic processes. Annals of Probability 5, 511-521 (1977) .
- [4] CAIROLI R. et WALSH J.B. Régions d'arrêt, localisations et prolongements de martingales. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 44, 279-306 (1978) .
- [5] WONG E. et ZAKAI M. Martingales and stochastic integrals for processes with a multi-dimensional parameter. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 29, 109-122 (1974) .

ECOLE POLYTECHNIQUE FEDERALE
LAUSANNE

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE
Laboratoire Associé au C.N.R.S.
Université Louis Pasteur
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG Cédex