SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

RENZO CAIROLI

# Intégrale stochastique curviligne le long d'une courbe rectifiable

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 14 (1980), p. 489-495
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__489_0>

Séminaire de Probabilités

1978/79

# INTEGRALE STOCHASTIQUE CURVILIGNE LE LONG D'UNE COURBE RECTIFIABLE

par R. CAIROLI

Une manière naturelle de définir l'intégrale stochastique curviligne le long de la frontière d'une région de $\mathbf{R}_+^2$ consiste à définir d'abord cette intégrale pour une région rectangulaire et à approcher ensuite la région donnée de l'intérieur par des régions rectangulaires appropriées.

Sous l'hypothèse que la frontière est rectifiable et que le processus à intégrer est à accroissements verticaux orthogonaux, le programme peut être réalisé et aboutit à la définition de l'intégrale stochastique $\int_{\partial A} \varphi \partial_1 W$ .

Pour la notation et la terminologie, nous renvoyons le lecteur à [4] . Ajoutons que si $A$ est un sous-ensemble de $\mathbf{R}_+^2$ , $A^o$ désignera l'intérieur de $A$ , $\partial A$ sa frontière et $\ell(\partial A)$ la longueur de $\partial A$ lorsque celle-ci est définie. Nous désignerons en outre par $|A|$ l'aire de $A$ .

Nous supposerons donnés un espace probabilisé complet $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ et un processus de Wiener à paramètre bi-dimensionnel $W = \{W_z, z \in \mathbf{R}_+^2\}$ . Nous désignerons par $\{\mathfrak{F}_z , z \in \mathbf{R}_+^2\}$ la famille des tribus complétées engendrée par $W$ .

Nous appellerons processus à 2-<u>accroissements orthogonaux</u> un processus $\varphi = \{\varphi(s,t), (s,t) \in \mathbf{R}_+^2\}$

a) $\mathfrak{F}_{st}^1$ - adapté :

b) à accroissements orthogonaux en $t$ et nul pour $t = 0$ ;

c) équi-continu dans $L^2$ en $t$ (le mot "équi" se refère à $s$ variant dans un ensemble borné) .

La définition de processus à 1-accroissements orthogonaux est analogue et nous appellerons un processus qui est à la fois à 1- et à 2-accroissements orthogonaux processus séparément à accroissement orthogonaux. On remarquera qu'un processus séparément à accroissement orthogonaux est continu dans $L^2$.

Nous appellerons un sous-ensemble $R$ de $\mathbf{R}_+^2$ région rectangulaire si

a) $R$ est la réunion d'un nombre fini de rectangles fermés de côtés parallèles aux axes ;

b) $R^o$ est un domaine simplement connexe.

Soit $A$ un sous-ensemble fermé et borné de $\mathbf{R}_+^2$ dont l'intérieur est un domaine simplement connexe et la frontière une courbe rectifiable.

Supposons que $A \subset [0,a]$, $a = (s_a,t_a)$. Couvrons $[0,a]$ d'un quadrillage de maille (= longueur du côté) $\lambda$ et choisissons $\lambda$ suffisamment petit pour qu'au moins un carré du quadrillage soit contenu dans $A^o$. Prolongeons ce carré en un ensemble maximal $Q$ contenu dans $A^o$, par adjonction successive de carrés qui ont au moins un côté en commun avec l'ensemble auquel ils sont adjoints. Il est évident que $Q$ ainsi défini est une région rectangulaire.

Nous allons énoncer une conclusion qui résulte en modifiant légèrement un raisonnement dû à BEHNKE et SOMMER ([1], p. 74) : pour tout $\delta > 0$, on peut choisir $\lambda$ et une partition de $A-Q$ au moyen des lignes du quadrillage en $n$ régions $Q_i$ qui se recouvrent au plus sur ces lignes, de telle manière que

a) $n\lambda \leq 24\, \ell(\partial A)$ ;

b) diamètre $Q_i \leq \delta$, $i = 1,2,\ldots,n$ ;

c) $|A-Q| \leq \delta$.

Donnons-nous un $\epsilon > 0$ et choisissons un $\delta$ dans $(0,\epsilon]$ tel que

(1) $E\{(\varphi(s,t') - \varphi(s,t))^2\} \leq \epsilon$, pour tout $(s,t),(s,t') \in [0,a]$ avec $|t-t'| \leq \delta$.

Un tel choix est possible car, pour $t$ variant dans un ensemble borné, l'équi-continuité est uniforme.

Choisissons ensuite $\lambda$ (donc $Q$) et les $Q_i$ tels que a), b) et c) ci-dessus soient satisfaites.

Nous allons montrer que si $R$ est une région rectangulaire telle que $Q \subset R^{o} \subset A$, alors

$$(2)\quad E\{(\int_{\partial R}\varphi\partial_1 W - \int_{\partial Q}\varphi\partial_1 W)^2\} \leq (t_a \ell(\partial R) + 24 t_a \ell(\partial A) + \sup_{s\leq s_a} E\{(\varphi^2(s,t_a)\}) \,\varepsilon\ .$$

Il est entendu que l'intégrale par rapport à $\partial_1 W$ le long de la frontière d'une région rectangulaire est posée égale à la somme des intégrales relatives à $W$ le long des segments horizontaux de cette frontière, orientés dans le sens indirect.

Désignons par $R_i$ la fermeture de $R \cap Q_i^{o}$. Le premier membre de (2) s'écrit alors sous la forme

$$(3)\qquad E\{(\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial R_i}\varphi\partial_1 W)^2\}\ .$$

Mais si $i \neq j$, $\int_{\partial R_i}\varphi\partial_1 W$ est orthogonal à $\int_{\partial R_j}\varphi\partial_1 W$. Pour le vérifier, on écrit d'abord les deux intégrales comme sommes finies d'intégrales le long de la frontière de rectangles, cela permettant de ramener l'assertion au cas où

$$R_i = [s,s'] \times [t_i,t_i'] \quad \text{et} \quad R_j = [s,s'] \times [t_j,t_j']\ , \ \text{avec}\ s < s', t_i < t_i' \leq t_j < t_j'\ .$$

En écrivant ensuite

$$(4)\quad \int_{\partial R_k}\varphi\partial_1 W = \int_{R_k}\varphi(u,t_k')dW_{uv} + \int_s^{s'}(\varphi(u,t_k') - \varphi(u,t_k))\, d_u W_{ut_k}\ , \quad k = i, j\ ,$$

on constate que le premier terme du second membre de l'équation d'indice $j$ est orthogonal aux deux termes du second membre de l'équation d'indice $i$, en vertu des propriétés de l'intégrale stochastique, et qu'on peut en dire de même du second terme, en raison de l'orthogonalité des accroissements de $\varphi$.

L'espérance sous (3) est donc égale à

$$\sum_{i=1}^{n} E\{(\int_{\partial R_i}\varphi\partial_1 W)^2\}$$

et l'inégalité (2) résultera de l'estimation de $E\{(\int_{\partial R_i}\varphi\partial_1 W)^2\}$ que nous allons établir. Prolongeons les segments verticaux de $\partial R_i$ de manière à obtenir des bandes verticales adjacentes. L'intégrale $\int_{\partial R_i}\varphi\partial_1 W$ est la somme des intégrales le long des intersections de $\partial R_i$ avec chacune de ces bandes et ces intégrales sont orthogonales deux à deux. Fixons une bande. Son intersection avec $R_i$ est de la forme $\bigcup_{j=1}^{m} H_j$ , où $H_j = [s,s'] \times [t_j,t_j']$ , $s < s'$ , $t_1 < t_1' < t_2 < \ldots < t_m < t_m'$ . En décomposant chaque $\int_{\partial H_j} \varphi\partial_1 W$ comme dans (4) , il est facile de voir que

$$(5)\quad E\{(\sum_{j=1}^{m} \int_{\partial H_j} \varphi\partial_1 W)^2\} = \sum_{j=1}^{m} \int_{s}^{s'} E\{(\varphi(u,t_j') - \varphi(u,t_j))^2\}t_j du + $$

$$+ |\bigcup_{j=1}^{m} H_j| \sup_{u \le s_a} E\{\varphi^2(u,t_a)\} .$$

Mais puisque $\delta$ a été choisi tel que (1) soit valable et que le diamètre de $Q_i$ , donc de $R_i$ , est $\le \delta$ , le premier terme du second membre de (5) est majoré par

$$m(s'-s)t_a\epsilon + |\bigcup_{j=1}^{m} H_j| \sup_{u \le s_a} E\{\varphi^2(u,t_a)\} .$$

Si $m \geq 2$ , au moins $m$ segments horizontaux de longueur $s'-s$ font partie de $\partial R \cap \partial(\bigcup_{j=1}^{m} H_j)$ . Si $m = 1$ , il est possible que les deux côtés horizontaux de $H_1$ ne font pas partie de $\partial R$ . Ce cas ne peut toutefois se produire que pour une seule bande, plus précisément celle adjacente à $Q$ , en raison du fait que $R^o$ est un domaine simplement connexe. La largeur de cette bande est certainement $\le \lambda$ , sinon $Q$ ne serait pas maximal. En sommant sur les bandes, nous obtenons donc l'inégalité

$$E\{(\int_{\partial R_i} \varphi\partial_1 W)^2\} \le (\ell(\partial R \cap Q_i) + \lambda)t_a\epsilon + |Q_i| \sup_{s \le s_a} E\{\varphi^2(s,t_a)\} .$$

En sommant sur $i$ , nous en concluons que

$$\sum_{i=1}^{m} E\{(\int_{\partial R_i} \varphi\partial_1 W)^2\} \le (\ell(\partial R) + n\lambda)t_a\epsilon + |A - Q| \sup_{s \le s_a} E\{\varphi^2(s,t_a)\} .$$

Il ne reste alors plus qu'à observer que $n\lambda \le 24\,\ell(\partial A)$ et $|A - Q| \le \epsilon$ .

Nous pouvons maintenant définir l'intégrale stochastique le long de $\partial A$ . A cet effet, considérons une suite de régions rectangulaires $A_i$ telle que

$$(6)\qquad A_i \subset A_{i+1} \text{ pour tout } i ,\ \bigcup_i A_i = A^o \text{ et } \sup_i \ell(\partial A_i) < \infty .$$

Donnons-nous un $\epsilon > 0$ et considérons la région rectangulaire $Q$ figurant sous (2) définie à partir de $\epsilon/4c$ , $c$ étant le terme entre parenthèses au second membre de (2) avec $\sup_i \ell(\partial A_i)$ à la place de $\ell(\partial R)$ . Puisque les ensembles $A_i^o$ recouvrent $Q$ et que $Q$ est compact, il existe $i_o$ tel que

$$Q \subset A_i^o \text{ , pour tout } i \geq i_o \text{ .}$$

En vertu de (2) nous avons donc l'inégalité

$$E\{(\int_{\partial A_i} \varphi \partial_1 W - \int_{\partial A_j} \varphi \partial_1 W)^2\} \leq \epsilon \text{ , pour tout } i,j \geq i_o \text{ ,}$$

ce qui nous montre que la suite des intégrales le long des $A_i$ converge dans $L^2$ . La limite est, par définition, l'intégrale de $\varphi$ le long de $\partial A$ . En symboles :

$$\int_{\partial A} \varphi \partial_1 W = \lim_{i \to \infty} \int_{\partial A_i} \varphi \partial_1 W \text{ , dans } L^2 \text{ .}$$

Il est clair que cette définition ne dépend pas du choix particulier de la suite de régions rectangulaires $A_i$ satisfaisant à (6) .

Il n'est pas difficile de constater que si $R$ est une région rectangulaire

$$E\{(\int_{\partial R} \varphi \partial_1 W)^2\} = \int_{\partial R} E\{\varphi^2(s,t)\} \, t \, ds \text{ .}$$

Par ailleurs, une légère modification des arguments utilisés par BEHNKE et SOMMER dans l'ouvrage cité antérieurement montre que pour un choix approprié, et donc pour tout choix, des régions rectangulaires $A_i$ satisfaisant à (6),

$$\lim_{i \to \infty} \int_{\partial A_i} E\{\varphi^2(s,t)\} \, t \, ds = \int_{\partial A} E\{\varphi^2(s,t)\} \, t \, ds \text{ .}$$

Nous pouvons donc en conclure que

$$E\{(\int_{\partial A} \varphi \partial_1 W)^2\} = \int_{\partial A} E\{\varphi^2(s,t)\} \, t \, ds \text{ .}$$

Si $\varphi$ est à 1-accroissements orthogonaux, nous définissons $\int_{\partial A} \varphi \partial_2 W$ de manière analogue et si $\varphi$ est séparément à accroissements orthogonaux, nous posons

$$\int_{\partial A} \varphi \partial W = \int_{\partial A} \varphi \partial_1 W + \int_{\partial A} \varphi \partial_2 W \text{ .} \tag{7}$$

Dans le cas où $\varphi$ est à accroissements bidimensionnels orthogonaux, on peut arriver aux mêmes résultats plus rapidement en introduisant les intégrales doubles

$$\int\int_{\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2} \alpha \, dW \, d\varphi \quad \text{et} \quad \int\int_{\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2} \alpha \, d\varphi \, dW ,$$

définies, pour des processus $\alpha$ déterministes, suivant le procédé utilisé dans [5] et [2] pour définir l'intégrale double $\int\int_{\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2} \psi \, dW \, dW$. En gros, ces deux intégrales sont respectivement la limite dans $L^2$ de

$$\sum_{\substack{z \; z' \\ z \wedge z'}}\sum \alpha(z,z')\Delta_z W \Delta_{z'}\varphi, \quad \sum_{\substack{z \; z' \\ z \wedge z'}}\sum \alpha(z,z')\Delta_z \varphi \, \Delta_{z'} W ,$$

On pose

$$\mathcal{J}_\varphi^1(A) = \int\int_{\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2} I_A(z \vee z') \, d_z W \, d_{z'}\varphi ,$$

$$\mathcal{J}_\varphi^2(A) = \int\int_{\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2} I_A(z \vee z') \, d_z \varphi \, d_{z'} W .$$

Il est alors aisé de voir que si $A$ est un rectangle de côtés parallèles aux axes

$$\int_{\partial A} \varphi \, \partial_1 W = \int_A \varphi dW + \mathcal{J}_\varphi^2(A) .$$

Cette formule s'étend aussitôt au cas où $A$ est une région rectangulaire et constitue une sorte de formule de Green analogue à celle qui figure dans [3]. Par passage à la limite, elle peut être utilisée pour définir l'intégrale stochastique curviligne par rapport à $\partial_1 W$ le long d'une courbe rectifiable. En définissant $\int_{\partial A} \varphi \, \partial_2 W$ de manière correspondante, nous déduisons, compte tenu de (7), que

$$\int_{\partial A} \varphi \, \partial W = \mathcal{J}_\varphi^2(A) - \mathcal{J}_\varphi^1(A)$$

## BIBLIOGRAPHIE


[1] BEHNKE H. et SOMMER F. Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Springer Verlag Berlin (1972).

[2] CAIROLI R. et WALSH J.B. Stochastic integrals in the plane. Acta mathematica 134, 111-183 (1975).

[3] CAIROLI R. et WALSH J.B. Martingale representations and holomorphic processes. Annals of Probability 5, 511-521 (1977).

[4] CAIROLI R. et WALSH J.B. Régions d'arrêt, localisations et prolongements de martingales. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 44, 279-306 (1978).

[5] WONG E. et ZAKAI M. Martingales and stochastic integrals for processes with a multi-dimensional parameter. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 29, 109-122 (1974).



ECOLE POLYTECHNIQUE FEDERALE
LAUSANNE

INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE
Laboratoire Associé au C.N.R.S.
Université Louis Pasteur
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG Cédex