

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MICHEL WEBER

Sur un théorème de Maruyama

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 475-488

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__475_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UN THEOREME DE MARUYAMA

par Michel WEBER

0. DEFINITIONS ET NOTATIONS.

Considérons un processus gaussien centré stationnaire mesurable $\{X(\omega, t), (\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}\}$ et soit $r(t) = \int_0^\infty \cos \lambda t \, d\mu(\lambda)$ sa covariance. On sait que la mesure spectrale μ se décompose en la somme suivante :

$$\mu = \mu_a + \mu_c + \mu_{cs},$$

où μ_a est purement atomique, μ_c absolument continue et μ_{cs} continue singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. On dit que μ est continue lorsque $\mu_a \equiv 0$.

Soient $E = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$, $\mathcal{B} = \bigotimes_{t \text{ réel}} \mathcal{B}(\mathbb{R}_t)$, $P_X = X(P)$.

Nous notons $\mathcal{S}(X) = (E, \mathcal{B}, P_X)$ l'espace de probabilité canonique du processus X .

Notons aussi $\tilde{X}$ le processus canonique défini sur $\mathcal{S}(X) \times \mathbb{R}$ par les applications coordonnées ; $\tilde{X}(f, t) = f(t)$. Pour tout réel u , nous notons T^u la transformation de E dans E , mesurable définie par $T^u(f) = f \circ \tau_u = f(\cdot + u)$ où τ_u est la translation par u . L'ensemble G de ces transformations est un groupe multiplicatif. On vérifie que G laisse la mesure P_X invariante de sorte que $(\mathcal{S}(X), G)$ forme un système dynamique mesuré (définition [1] p. 99). On appelle ensemble invariant tout élément A de $\mathcal{B}$ tel que

$$A \Delta T(A) \text{ où } A \Delta T^{-1}(A) \text{ est } P_X\text{-négligeable.}$$

Lorsque les seuls invariants de $(\mathcal{S}(X), G)$ sont les éléments de $\mathcal{B}$ de P_X -mesure

égale à 0 ou 1, le système est dit ergodique. On dira alors que le processus X est ergodique. Lorsque G est engendré par un seul élément (T^1 par exemple), $(\mathcal{S}(X), G)$ est ergodique si et seulement si la propriété suivante est vérifiée ([1], p. 101),

$$\text{quels que soient } A, B \in \mathcal{B}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_X(A \cap T^{-k} B) = P_X(A) P_X(B),$$

On vérifie de même à l'aide du théorème de Von Neumann (cf. par exemple [1] p. 99) que d'une façon générale X est ergodique si et seulement si

$$\text{pour tous } A, B \in \mathcal{B}, \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T P_X(A \cap T^{-u} B) du = P_X(A) \cdot P_X(B).$$

DEFINITION 0.1. Le système $(\mathcal{S}(X), G)$ (resp. le processus X) est faiblement mélangeant si pour tous A, B éléments de $\mathcal{B}$,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |P_X(A \cap T^{-u} B) - P_X(A) \cdot P_X(B)| du = 0.$$

On dit de même que le système $(\mathcal{S}(X), G)$ (resp. le processus X) est fortement mélangeant lorsque pour tous A, B éléments de $\mathcal{B}$:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} P_X(A \cap T^{-u} B) = P_X(A) \cdot P_X(B).$$

Notons enfin $\mathcal{C}$ la semi-algèbre des cylindres C mesurables définis par

$$C = \prod_{t \in R} C_t \text{ où } C_t = R \text{ sauf pour un ensemble fini d'indices } \varepsilon(C) \text{ et } \Gamma = \prod_{t \in \varepsilon(C)} C_t = [[a, b[\text{ avec}$$

$$a = (a_t, t \in \varepsilon(C)) \leq b = (b_t, t \in \varepsilon(C)).$$

1. Dans un théorème paru dans [4], Maruyama a caractérisé les propriétés de mélange et d'ergodicité lorsque celles-ci sont définies relativement à la semi-algèbre $\mathcal{C}$.

Son énoncé est le suivant :

THEOREME A. Soit $X(t)$, t réel, un processus gaussien stationnaire de covariance

$r(t) = \int_0^\infty \cos \lambda t \, d\mu(\lambda)$. On a les équivalences suivantes :

- a) X est fortement mélangeant si et seulement si $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0$,
- b) X est faiblement mélangeant si et seulement si μ est continue,
- c) X est ergodique si et seulement si μ est continue.

Un argument simple de prolongement sur des classes monotones montre que ce théorème caractérise aussi les mêmes propriétés lorsque celles-ci sont définies relativement à la tribu $\mathcal{B}$. Il semble cependant que ce résultat soit peu utilisé dans certains champs d'applications pourtant proches ; ainsi dans [6], Qualls, Watanabe et Simmons mettent en évidence une loi de 0-1 indépendamment du théorème A dont elle se déduit pourtant aisément. Nous l'énonçons.

THEOREME B. Soit $X(t)$, $t \geq 0$ un processus gaussien stationnaire de covariance

$r(t)$. Supposons l'hypothèse suivante

$$(a-1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0.$$

Soit alors $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ croissante. Dans ces conditions on a aussi

$$P\{X(n) > \varphi(n) \text{ i.o.}\} = 0 \text{ ou } 1.$$

Ces auteurs affirment aussi sans démonstration que l'hypothèse

$$(a-2) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T r(u) \, du = 0$$

suffit pour la même conclusion ; or il est facile de construire un contreexemple si on ne suppose pas $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \infty$; en fait l'hypothèse (a-2) doit être modifiée sous la forme suivante :

$$(a'-2) \quad \mu \text{ est continue.}$$

2. Nous nous proposons dans ce qui suit de donner une nouvelle démonstration de la partie la plus intéressante du théorème A, à savoir l'implication

$$(*) \quad (\mu \text{ est continue}) \implies (X \text{ est faiblement mélangeant}).$$

Cette démonstration est basée sur un lemme comparant les lois de deux vecteurs gaussiens dont l'un a ses composantes indépendantes par blocs. Elle est aussi analogue dans sa démarche à celle donnée par Grenander ([2] p.158) caractérisant le mélange fort. Elle est donc plus probabiliste que la démonstration de Maruyama.

3. Nous avons noté dans le lemme qui suit pour toute fonction $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et tout réel h les opérateurs

$$\Delta_h^1 g(u, v) = g(u+h, v) - g(u, v),$$

$$\Delta_h^2 g(u, v) = g(u, v+h) - g(u, v).$$

Lemme 1. (*)

Soient $n > 0$, et X un vecteur gaussien centré sur $[1, n]$ ou sur un ensemble fini A de cardinal n , de covariance $r(\alpha, \beta)$ avec $r(\alpha, \alpha) = 1$ pour tout α . Soit de plus Θ une partition de $[1, n]$ ou A , de terme générique σ , et $(x), (y)$ deux suites de réels indexées par A ou $[1, n]$ telles que pour tout α ,

$$-\infty \leq x_\alpha \leq y_\alpha \leq +\infty.$$

Notons aussi, $C_\alpha =]x_\alpha, y_\alpha]$,

$$V_\sigma = \prod_{\alpha \in \sigma} C_\alpha, \quad V = \prod_{\sigma \in \Theta} V_\sigma,$$

$$X_\sigma = (X(\alpha), \alpha \in \sigma).$$

Dans ces conditions, on a

$$|P\{X \in V\} - \prod_{\sigma \in \Theta} P\{X_\sigma \in V_\sigma\}| \leq \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \Theta} \sum_{\alpha \in \sigma} \sum_{\beta \in \sigma'} |x(\alpha, \beta)| r(\alpha, \beta),$$

(*) Un résultat similaire a été obtenu dans [6] avec $\Theta = \{\sigma_1, \sigma_2\}$.

$$\text{où } k(\alpha, \beta) = \int_0^1 \Delta_{y_\alpha - x_\alpha}^1 \circ \Delta_{y_\beta - x_\beta}^2 (\Phi(x_\alpha, x_\beta, \lambda r(\alpha, \beta))) d\lambda ,$$

$$\text{et } \Phi(x, y, \rho) = \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{ -\frac{x^2+y^2-2\rho xy}{2(1-\rho^2)} \right\}.$$

Démonstration :

On la fait pour $A = [1, n]$. Nous commençons par traiter le cas où

1) $\Gamma_1 = \text{Cov}(X)$ est inversible .

Dans toute la suite nous utiliserons les importantes évaluations développées en [3] p. 19 , et plus particulièrement le lemme 2.1.4.

Soit pour chaque σ appartenant à $\mathcal{O}$, X'_σ un vecteur gaussien sur σ de même loi que X_σ , et tel que les X'_σ soient mutuellement indépendants, nous notons alors

$$\Lambda = (X'_\sigma, \sigma \in \mathcal{O}) .$$

Le lemme que nous établissons compare les lois de Λ et X pour des pavés.

Posons pour tout λ compris entre 0 et 1 , $\Gamma(\lambda) = \lambda\Gamma_1 + (1-\lambda)\Gamma_0$.

Il est net que $\Gamma(\lambda)$ est inversible pour tout λ dans $[0, 1]$, de plus

$$\Gamma(1) = \Gamma_1 = \text{Cov}(X)$$

$$\Gamma(0) = \Gamma_0 = \text{Cov}(\Lambda)$$

Notons dans ces conditions

$$F(\lambda) = \int_{R^n} I_V(u) g_\lambda(u) du$$

$$g_\lambda(u) = K_n \int_{R^n} \exp\{i \langle u, y \rangle\} \exp\{-\frac{1}{2} {}^t y \Gamma(\lambda) y\} dy ,$$

$$= \frac{n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{\sqrt{\det \Gamma(\lambda)}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} {}^t u \Gamma^{-1}(\lambda) u \right\} .$$

On sait (c.f. Lemme 2.1.4 p.19, [3]) que $F(\lambda)$ est dérivable, et que sa dérivée $F'(\lambda)$ peut être évaluée sous la forme

$$F'(\lambda) = \int_{R^n} I_V(u) \frac{\partial}{\partial \lambda} (g_\lambda(u)) du ,$$

$$\text{où } \frac{\partial}{\partial \lambda} (g_\lambda(u)) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\frac{d\Gamma(\lambda)}{d\lambda} \cdot \frac{d^2}{du^2} (g_\lambda(u)) \right] .$$

$$\text{Mais, } \left(\frac{d\Gamma(\lambda)}{d\lambda} \right)_{\alpha, \beta} = \begin{cases} r(\alpha, \beta) & \text{si } \alpha \in \sigma, \beta \in \sigma', \sigma \neq \sigma' , \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} (g_\lambda(u)) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma \neq \sigma'} \sum_{\alpha \in \sigma} \sum_{\beta \in \sigma'} r(\alpha, \beta) \frac{\partial^2}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} (g_\lambda(u)) ,$$

ainsi

$$F'(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma \neq \sigma'} \sum_{\alpha \in \sigma} \sum_{\beta \in \sigma'} r(\alpha, \beta) \int_{R^n} I_V(u) \frac{\partial^2}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} (g_\lambda(u)) du .$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_{R^n} I_V(u) \frac{\partial^2}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} (g_\lambda(u)) du &= \int_{x_1}^{y_1} du_1 \int_{x_2}^{y_2} du_2 \dots \int_{x_\alpha}^{y_\alpha} du_\alpha \int_{x_\beta}^{y_\beta} \frac{\partial^2}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} (g_\lambda(u)) du_\beta \\ &= \int_{x_1}^{y_1} du_1 \int_{x_2}^{y_2} du_2 \dots \int_{x_\alpha}^{y_\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial u_\alpha} \left(g_\lambda(u_1, u_2, \dots, y_\beta, \dots) - g_\lambda(u_1, u_2, \dots, x_\beta, \dots) \right) \right] du_\alpha \end{aligned}$$

$$= \int_{R^{n-2} \prod_{\substack{r \neq \alpha \\ r \neq \beta}} C_r} I(v) \square_{\alpha, \beta} (g_\lambda(v)) dv , \text{ où l'on a noté}$$

$$\begin{aligned} & \quad (\alpha^{\text{ième}}) \quad (\beta^{\text{ième}}) \\ \square_{\alpha, \beta} (g_\lambda(v)) &= g(v_1, v_2, \dots, y_\alpha, \dots, y_\beta, \dots) \\ & \quad - g(v_1, v_2, \dots, x_\alpha, \dots, y_\beta, \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - g(v_1, v_2, \dots, y_\alpha, \dots, x_\beta, \dots) \\
& + g(v_1, v_2, \dots, x_\alpha, \dots, x_\beta, \dots) .
\end{aligned}$$

Il s'en suit

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \frac{I(v)}{\prod_{\substack{r \neq \alpha \\ r \neq \beta}} C_r} \square_{\alpha, \beta} (g_\lambda(v)) dv \right| \\
& \leq \sum_{(s, t)}^* \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \frac{I(v)}{\prod_{\substack{r \neq \alpha \\ r \neq \beta}} C_r} g(v_1, v_2, \dots, s, \dots, t, \dots) dv , \\
& \leq \sum_{(s, t)}^* \int_{\mathbb{R}^{n-2}} g(v_1, v_2, \dots, s, \dots, t, \dots) dv , \\
& = \sum_{(s, t)}^* \Phi(s, t, \lambda r(\alpha, \beta)) ,
\end{aligned}$$

où la sommation $\sum^*$ est indexée sur l'ensemble à quatre éléments $\{(y_\alpha, y_\beta), (y_\alpha, x_\beta), (x_\alpha, x_\beta), (x_\alpha, y_\beta)\}$.

Dès lors

$$\begin{aligned}
& |P\{X \in V\} - \prod_{\sigma \in \Theta} P\{X_\sigma \in V_\sigma\}| = |F(1) - F(0)| \\
& = \left| \int_0^1 F'(\lambda) d\lambda \right| = \frac{1}{2} \left| \sum_{\sigma \neq \sigma'} \sum_{\alpha \in \sigma} \sum_{\beta \in \sigma'} r(\alpha, \beta) \int_0^1 d\lambda \left(\int_{\mathbb{R}^n} I_V(u) \frac{\partial^2}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} (g_\lambda(u)) du \right) \right| \\
& = \left| \frac{1}{2} \sum_{\sigma \neq \sigma'} \sum_{\alpha \in \sigma} \sum_{\beta \in \sigma'} r(\alpha, \beta) \int_0^1 d\lambda \left(\int_{\mathbb{R}^{n-2}} \frac{I(v)}{\prod_{\substack{r \neq \alpha \\ r \neq \beta}} C_r} \square_{\alpha, \beta} (g_\lambda(v)) dv \right) \right| \\
& \leq \frac{1}{2} \sum_{\sigma \neq \sigma'} \sum_{\alpha \in \sigma} \sum_{\beta \in \sigma'} |r(\alpha, \beta)| \sum_{(s, t)}^* \Phi(s, t, \lambda |r(\alpha, \beta)|)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\sigma \neq \sigma'} \sum_{\alpha \in \sigma} \sum_{\beta \in \sigma'} |r(\alpha, \beta)| k(\alpha, \beta) .$$

2) $\Gamma_1 = \text{Cov}(X)$ n'est pas inversible.

Soit N un vecteur gaussien normal à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ indépendant de X ,
pour tout réel u posons

$$X_u = X + uN \quad \Lambda_u = \Lambda + uN .$$

Si u est non nul les covariances Γ_{X_u} , Γ_{Λ_u} sont inversibles, la première partie de la démonstration montre que X_u vérifie les conclusions du lemme, de plus

$$\Gamma_{X_u}(\alpha, \beta) = r(\alpha, \beta) + u^2 .$$

On constate alors qu'il suffit de faire tendre u vers zéro pour conclure identiquement sur X .

Lemme 2.

$$\text{Si } \mu = \mu_d , \text{ alors } \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |r(u)| du = 0 .$$

Démonstration. Elle est immédiate puisque les coefficients de Fourier de $r(t)$ sont tous nuls.

3. Nous sommes en mesure à présent de démontrer la partie (*) du théorème (A).

1ère Etape : Soient pour tout B élément de $\mathcal{B}$,

$$\mathcal{G}_B = \{A \in \mathcal{B} : \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |P_X(A \cap T^{-u} B) - P_X(A) \cdot P_X(B)| du = 0\} ,$$

et pour tout A élément de $\mathcal{B}$,

$$\mathcal{Q}'_A = \{B \in \mathcal{B} : \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |P_X(A \cap T^{-u}B) - P_X(A) \cdot P_X(B)| du = 0\} .$$

Nous montrons que $\mathcal{Q}_B$ et $\mathcal{Q}'_A$ sont des classes monotones. Il suffit d'établir que $\mathcal{Q}_B$ est une classe monotone puisque la transformation T est inversible. Soient (A_n) une suite d'éléments de $\mathcal{Q}_B$ de limite A dans $\mathcal{B}$. Alors pour tout réel u et tout entier n ,

$$\begin{aligned} (1) \quad & |P_X(A \cap T^{-u}B) - P_X(A) \cdot P_X(B)| \leq |P_X(A \cap T^{-u}B) - P_X(A_n \cap T^{-u}B)| \\ & + |P_X(A_n \cap T^{-u}B) - P_X(A_n) \cdot P_X(B)| \\ & + |P_X(A) \cdot P_X(B) - P_X(A_n) \cdot P_X(B)| \\ & = P_1 + P_2 + P_3 . \end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$, pour tout n assez grand nous avons

$$\begin{aligned} P_1 &= |P_X(A \cap T^{-u}B) - P_X(A_n \cap T^{-u}B)| \leq P_X((A \cap T^{-u}B) \Delta (A_n \cap T^{-u}B)) , \\ &\leq P_X(A \Delta A_n) + P_X(T^{-u}B \Delta T^{-u}B) \leq \frac{\epsilon}{2} , \\ P_3 &\leq P_X(B) \cdot P_X\{A \Delta A_n\} \leq \frac{\epsilon}{2} , \end{aligned}$$

d'où $P_1 + P_3 \leq \epsilon$.

Intégrant chaque membre de (1) par rapport à $T^{-1} I_{[0,T]}(t)dt$, il vient pour tout n assez grand fixé ,

$$\begin{aligned} \gamma(T) &= \frac{1}{T} \int_0^T |P_X(A \cap T^{-u}B) - P_X(A) \cdot P_X(B)| du \\ &\leq \epsilon + \frac{1}{T} \int_0^T |P_X(A_n \cap T^{-u}B) - P_X(A_n) \cdot P_X(B)| du , \end{aligned}$$

d'où puisque A_n appartient G_B ,

$$0 \leq \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \gamma(T) \leq \epsilon.$$

Mais $\epsilon > 0$ est arbitraire, par conséquent $\lim_{T \rightarrow \infty} \gamma(T) = 0$. Donc A appartient à G_B , et G_B est une classe monotone, il en est de même pour G'_A compte tenu de la remarque faite au début.

2ème Etape : $G_B \supset C$, $G'_A \supset C$, où C est la semi algèbre des cylindres C mesurables définis par

$$C = \prod_{t \in R} C_t, \text{ où } C_t = R \text{ sauf pour un ensemble fini d'indices } \epsilon(C),$$

$$\text{et } \Gamma = \prod_{t \in \epsilon(C)} C_t = [[a, b[, \text{ où}$$

$$a = (a_t, t \in \epsilon(C)) \leq b = (b_t, t \in \epsilon(C)).$$

Soient C et D deux éléments de $\mathcal{C}$ de bases respectives $\Gamma = [[a, b[$, $\Delta = [[c, d[$, on supposera dans toute la suite que les nombres a_t, b_t, c_t, d_t sont finis et tous distincts, ce qui puisque G'_A , (resp. G_B) est une classe monotone suffit pour conclure.

En vertu du lemme 1, pour tout réel u tel que

$$\tau_u(\epsilon(D)) \cap \epsilon(C) = \emptyset,$$

$$\beta(u) = |P_X(C \cap T^{-u}D) - P_X(C) \cdot P_X(D)|$$

$$\begin{aligned} &= |P\{ (X(t), t \in \epsilon(C)) \in \Gamma, (X(s+u), s \in \epsilon(D)) \in \Delta \} \\ &\quad - P\{ (X(t), t \in \epsilon(C)) \in \Gamma \} \cdot P\{ (X(s), s \in \epsilon(D)) \in \Delta \}| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2} \sum_{\substack{s \in \epsilon(D) \\ t \in \epsilon(C)}} |r(s-t+u)| h(s, t),$$

où pour tout s et t ,

$$h(s,t) = \int_0^1 \Delta_{d_s - c_s}^1 \circ \Delta_{b_t - a_t}^2 (\Phi(c_s, a_t, \lambda r(s-t+u))) d\lambda .$$

Mais pour tout réel $x \neq \frac{1}{2} y$,

$$0 < f(x,y) = \sup_{-1 \leq \rho \leq 1} \Phi(x,y,\rho) < \infty .$$

Les nombres a_t , b_t , c_s , d_s sont tous distincts par hypothèse. On déduit de la relation précédente qu'il existe une constante $K = K(\Gamma, \Delta)$ positive finie, telle que pour tout u assez grand ($u > u_0$) ,

$$(2) \quad \beta(u) \leq K \sum_{\substack{\alpha=s-t \\ s \in \epsilon(C) \\ t \in \epsilon(D)}} |r(\alpha+u)| .$$

D'où,

$$(3) \quad \frac{1}{T} \int_0^T \beta(u) du \leq K' \sum_{\substack{\alpha=s-t \\ s \in \epsilon(C) \\ t \in \epsilon(D)}} \frac{1}{T} \int_0^T |r(\alpha+u)| du .$$

Finalement, à l'aide du lemme 2,

$$(4) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |P_X(C \cap T^{-u}D) - P_X(C) \cdot P_X(D)| du = 0 .$$

Ainsi pour tous éléments C, D de $\mathcal{C}$,

$$Q_D \supset C \quad , \quad Q'_C \supset C .$$

A l'aide de la proposition I-4-2 de (*) , on en déduit que

$$(5) \quad Q_D = Q'_C = \mathcal{B} .$$

Cela entraîne pour tout élément A, B de $\mathcal{B}$

(*) J. Neveu. Bases Math. du Calcul des Probabilités (Masson, (1964)).

$$(6) \quad Q_B = Q'_C = R.$$

Par conséquent, le processus X est faiblement mélangeant, il est donc ergodique, ce qui achève la démonstration.

Nous déduisons de ce résultat le

COROLLAIRE :

Soit $X(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ (ou $\mathbb{R}$), un processus gaussien stationnaire centré séparable ergodique. Alors pour toutes $g, \varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ croissantes continues telles que $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$ et tout $S > 0$,

$$1) \quad P\left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\lambda(S \leq s \leq T : X(\omega, s) > \varphi(s))}{g(T)} = \text{Const.} \right\} = 1,$$

$$2) \quad P\left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\lambda(S \leq s \leq T : X(\omega, s) > \varphi(s))}{g(T)} = \text{Const.} \right\} = 1,$$

$$3) \quad P\left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\lambda(S \leq s \leq T : X(\omega, s) \leq \varphi(s))}{g(T)} = \text{Const.} \right\} = 1,$$

$$4) \quad P\left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\lambda(S \leq s \leq T : X(\omega, s) \leq \varphi(s))}{g(T)} = \text{Const.} \right\} = 1.$$

où λ est la mesure de Lebesgue.

Démonstration :
■■■■■■■

Quitte à prolonger en loi X sur $\mathbb{R}$, on suppose que X est défini sur tout $\mathbb{R}$. Soit alors $\mathcal{S}(X) = \{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \otimes_{t \in \mathbb{R}} \mathcal{B}(\mathbb{R}_t), X(P) = \pi\}$ l'espace de probabilité canonique de X .

Notons aussi pour tout $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

- $\theta = T^1$, $(T^1(f) = f \circ \tau_1)$,
- $A_\varphi(f) = \{ t \text{ réel} : f(t) > \varphi(t) \}$,
- τ_k la translation par k .

Alors pour tout intervalle non vide I , tout $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(1) \quad \tau_{-1}(A_\varphi(f) \cap I) \subset \tau_{-1}(I) \cap A_\varphi(\theta(f)) ,$$

d'où pour tout $S < T$,

$$(2) \quad \lambda(A_\varphi(f) \cap [S, T]) \leq \lambda(A_\varphi(\theta(f)) \cap [S, T]) + 1 .$$

Notons pour simplifier

$$\begin{aligned} - L(f, S, T) &= \frac{\lambda(A_\varphi(f) \cap [S, T])}{g(T)} \\ - \Lambda(f, S, T) &= \frac{\lambda(A_\varphi^c(f) \cap [S, T])}{g(T)} . \end{aligned}$$

Nous avons, à partir de (2)

$$(3) \quad \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} L(f, S, T) \leq \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} L(\theta(f), S, T) ,$$

$$\underline{\lim}_{T \rightarrow \infty} L(f, S, T) \leq \underline{\lim}_{T \rightarrow \infty} L(\theta(f), S, T) ,$$

$$(4) \quad \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \Lambda(f, S, T) \geq \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \Lambda(\theta(f), S, T) ,$$

$$\underline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \Lambda(f, S, T) \geq \underline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \Lambda(\theta(f), S, T) .$$

Posons maintenant pour tout $\alpha \geq 0$, $S > 0$,

$$(5) \quad B_{\alpha, S} = \{ f : \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} L(f, S, T) > \alpha \} ,$$

$$C_{\alpha, S} = \{ f : \underline{\lim}_{T \rightarrow \infty} L(f, S, T) > \alpha \} ,$$

$$D_{\alpha, S} = \{ f : \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \Lambda(f, S, T) > \alpha \} ,$$

$$E_{\alpha, S} = \{ f : \underline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \Lambda(f, S, T) > \alpha \} .$$

(3) et (4) montrent que, $\theta(B) \subset B$, $\theta(C) \subset C$, $\theta^{-1}(D) \subset D$, $\theta^{-1}(E) \subset E$,
mais puisque

$$\pi(B) = \pi(\theta(B)) , \quad (\text{de même pour } C, D \text{ et } E) .$$

Ces ensembles sont invariants. Or X est ergodique. Par conséquent leurs probabilités ne peuvent être que 0 ou 1 , pour tout $\alpha \geq 0$, ce qui permet de conclure au résultat.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CONZE J.P., Systèmes topologiques et métriques en théorie ergodique. Ecole d'Eté de Probabilité de St Flour (1974).
Lect. Notes Math., 480, (1975), p. 100-187.
- [2] CRAMER H., LEADBETTER M.R., Stationary and Related Stochastic Processes
(1967). Wiley.
- [3] FERNIQUE X. , Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes. Ecole d'Eté de Probabilité de St Flour
(1974). Lect. Notes Math., 480, (1975), p. 2-95.
- [4] MARUYAMA G. The harmonic analysis of stationary stochastic processes,
Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ. A4 (1949), p. 45-46.
- [5] QUALLS C., WATANABE H., A note on a 0-1 law for stationary Gaussian processes. Inst. of Statis., (1972), Mimeo Series n° 798.
- [6] VISHNU HEBBAR H., A law of the iterated logarithm for Extrem values from gaussian Sequences. Z. Wahrscheinlichkeitsth. verw. Gebiete, (1979), vol. 48, p. 1-16.