JEAN JACOD

BERNARD MAISONNEUVE

Remarque sur les fonctionnelles additives non adaptées des processus de Markov

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 410-417

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__410_0>

REMARQUES SUR LES FONCTIONNELLES ADDITIVES NON ADAPTEES

DES PROCESSUS DE MARKOV

J. JACOD et B. MAISONNEUVE

1 - INTRODUCTION. Considérons un processus de Markov $(\Omega,\underline{\underline{M}},\underline{\underline{M}}_t,\theta_t,X_t,P^x)$ avec des tribus $\underline{\underline{M}}_t$ et $\underline{\underline{M}}$ qui sont strictement plus grosses que les complétées usuelles $\underline{\underline{F}}_t$ et $\underline{\underline{F}}$ des tribus naturelles $\underline{\underline{F}}_t^o=\sigma(X_s : s\leq t)$ et $\underline{\underline{F}}^o=\bigvee_{(t)}\underline{\underline{F}}_t^o$. Il arrive fréquemment que la propriété de Markov soit vraie relativement aux tribus $\underline{\underline{M}}_t$ et $\underline{\underline{M}}$, ces grosses tribus étant utilisées pour décrire à la fois le passé et le futur; c'est-à-dire que pour tous x, $t\geq 0$, $f\in b\underline{\underline{M}}$ on a

(1) $$E^x(f\circ\theta_t|\underline{\underline{M}}_t) = E^{X_t}(f)$$

(noter la différence avec l'hypothèse usuelle, qui ne requiert (1) que pour $f\in b\underline{\underline{F}}$). Cette situation se présente naturellement pour les processus additifs markoviens (Çinlar [1]), ou pour certains processus dérivés des ensembles et systèmes régénératifs [4]; les changements de temps dans les processus de Markov fournissent également des exemples d'une telle situation.

Nous nous proposons d'établir que les fonctionnelles additives croissantes prévisibles relativement à la grosse filtration $(\underline{\underline{M}}_t)$ sont en fait prévisibles relativement à la filtration naturelle $(\underline{\underline{F}}_t)$. Ceci généralise un résultat de Çinlar [1] qui avait montré cette propriété pour des fonctionnelles continues (nous utilisons d'ailleurs la même méthode, simplifiée et étendue).

2 - DEFINITIONS ET HYPOTHESES. Précisons nos hypothèses, quant au processus de Markov $(\Omega,\underline{\underline{M}},\underline{\underline{M}}_t,\theta_t,X_t,P^x)$.

a) L'espace d'état $(E,\underline{\underline{E}})$ du processus est un espace mesurable quelconque.

b) L'espace Ω est quelconque (il peut être "plus gros" que l'espace canonique).

c) $(\underline{\underline{M}}_t)$ et $\underline{\underline{M}}$ sont les complétées usuelles d'une filtration $(\underline{\underline{M}}_t^o)$ et d'une tribu $\underline{\underline{M}}^o$. On a $\underline{\underline{F}}_t^o \subset \underline{\underline{M}}_t$. On n'impose pas à $(\underline{\underline{M}}_t)$ d'être continue à droite.

d) On exige la propriété de Markov renforcée (1), mais pas la propriété forte de Markov.

En outre, nous ferons <u>parfois</u> l'hypothèse suivante

<u>Hypothèse (R)</u>: (i) les tribus $\underline{\underline{M}}_t^o$ sont séparables;

(ii) pour toute mesure P^x il existe une probabilité de transition $(\omega,A) \rightsquigarrow Q_\omega^x(A)$ de $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ dans $(\Omega,\underline{\underline{M}}^o)$ qui soit une version régulière de la probabilité conditionnelle $P^x(.|\underline{\underline{F}})$ sur $\underline{\underline{M}}^o$.

Noter que (ii) est vérifiée si $(\Omega,\underline{\underline{M}}^o)$ est un U-espace [2].

<u>3 - FONCTIONNELLES ADDITIVES</u> $(\underline{\underline{M}}_t)$<u>-PREVISIBLES</u>. Un processus croissant fini $A=(A_t)$ continu à droite, mesurable, tel que $A_0=0$ p.s., sera appelé <u>fonctionnelle additive</u> (f.a.) si pour tous $s,t \geq 0$ on a

$$A_{t+s} = A_t + A_s \circ \theta_t \qquad \text{p.s.}$$

Une f.a. A est dite <u>faiblement</u> $(\underline{\underline{M}}_t)$<u>-prévisible</u> si pour tout x elle est P^x-indistinguable d'un processus A^x qui est $(\underline{\underline{M}}_t)$-prévisible. Dans ce cas, A est $(\underline{\underline{M}}_t)$-adaptée.

Remarquons d'abord le fait très simple suivant, qui fait comprendre les résultats qui vont suivre.

PROPOSITION 1 : <u>Soit</u> A <u>une f.a., non nécessairement adaptée à</u> $(\underline{\underline{M}}_t)$, <u>de caractéristique finie</u> (i.e., $E^x(A_t)<\infty$ pour tous x,t). <u>Supposons que</u> A <u>admette une projection prévisible duale</u> B <u>relativement à</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$ <u>qui ne dépende pas de</u> P^x <u>et qui soit additive. Alors</u> A <u>admet aussi</u> B <u>comme</u> $(\underline{\underline{M}}_t)$<u>-projection prévisible duale pour toute loi</u> P^x.

Dire que B est la $(\underline{\underline{F}}_t)$-projection prévisible duale de A n'implique pas que B soit $(\underline{\underline{F}}_t)$-prévisible, mais seulement faiblement $(\underline{\underline{F}}_t)$-prévisible. L'existence de B est assurée, par exemple, dès que $\underline{\underline{E}}$ est séparable et que le processus de Markov est normal.

Démonstration. Pour tous $x \in E$, $t \geq s \geq 0$, on a

$$E^x(A_t - A_s | \underline{\underline{M}}_s) = E^{X_s}(A_{t-s}) = E^x(A_t - A_s | \underline{\underline{F}}_s)$$

$$E^x(B_t - B_s | \underline{\underline{M}}_s) = E^{X_s}(B_{t-s}) = E^x(B_t - B_s | \underline{\underline{F}}_s) .$$

Les membres de droite sont égaux, donc aussi les membres de gauche. Comme B est P^x-indistinguable d'un processus $(\underline{\underline{F}}_t)$-prévisible, donc $(\underline{\underline{M}}_t)$-prévisible, la propriété en résulte. ■

Il résulte de cette proposition qu'une f.a. A faiblement $(\underline{\underline{M}}_t)$-prévisible est faiblement $(\underline{\underline{F}}_t)$-prévisible (donc $(\underline{\underline{F}}_t)$-adaptée) dès qu'elle est de caractéristique finie et qu'elle admet une $(\underline{\underline{F}}_t)$-projection prévisible duale B indépendante de la loi P^x et additive. On a évidemment $B = A$. Comme on le voit dans la démonstration précédente, l'additivité joue un rôle essentiel.

Avant de passer à des résultats plus généraux, notons immédiatement la conséquence suivante de cette proposition.

COROLLAIRE 2 : Si le processus X est de Hunt relativement à $(\underline{\underline{F}}_t)$, il est quasi-continu à gauche relativement à $(\underline{\underline{M}}_t)$.

Dire que le processus est de Hunt signifie que E est borélien d'un compact métrisable, que X est continu à droite, pourvu de limites à gauche, fortement markovien relativement à $(\underline{\underline{F}}_t)$, et enfin quasi-continu à gauche relativement à $(\underline{\underline{F}}_t)$.

Démonstration. Il est classique qu'il existe une fonction h sur $E \times E$, telle que $h(x,x) = 0$ et $h(x,y) > 0$ si $x \neq y$, et que la f.a. $A_t = \sum_{0 < s \leq t} h(X_{s-}, X_s)$ admette un 1-potentiel fini. De plus A admet une $(\underline{\underline{F}}_t)$-projection prévisible duale B qui est additive. La fonctionnelle B est continue à cause de la $(\underline{\underline{F}}_t)$-quasi-continuité à gauche de X, donc de A. D'après la proposition 1, B est aussi la $(\underline{\underline{M}}_t)$-projection prévisible duale de A, donc A est $(\underline{\underline{M}}_t)$-quasi-continu à gauche, donc X également. ■

Remarque. Sous les hypothèses du corollaire, le processus X n'est pas nécessairement fortement markovien pour $(\underline{\underline{M}}_t)$. ■

THEOREME 3 : (a) <u>Toute f.a. $(\underline{\underline{M}}_t)$-adaptée et continue</u> A <u>est</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$-<u>adaptée</u>.

(b) <u>Sous l'hypothèse (R), toute f.a. faiblement</u> $(\underline{\underline{M}}_t)$-<u>prévisible</u> A <u>est faiblement</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$-<u>prévisible</u> (donc $(\underline{\underline{F}}_t)$-adaptée).

L'assertion (a) est due à Çinlar [1]. Le lemme suivant nous a été suggéré par P. Protter.

LEMME 4 : <u>Une f.a.</u> A (ou plus généralement, un processus croissant fini) <u>faiblement</u> $(\underline{\underline{M}}_t)$-<u>prévisible et</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$-<u>adaptée est faiblement</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$-<u>prévisible</u>.

<u>Démonstration</u>. Soit $A^n = A \wedge n$, qui est un processus croissant borné. Soit $B^{n,x}$ la $(\underline{\underline{F}}_t)$-projection prévisible duale de A^n pour la loi P^x. Comme A^n est $(\underline{\underline{F}}_t)$-adapté, le processus $A^n - B^{n,x}$ est une martingale uniformément intégrable relativement à la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$ et pour la loi P^x. Mais on a $E^x(Z|\underline{\underline{F}}_t) = E^x(Z|\underline{\underline{M}}_t)$ pour toute variable intégrable $\underline{\underline{F}}$-mesurable Z (c'est évident d'après (1) pour Z de la forme $Z = F_t . F \circ \theta_t$ où $F_t \in \underline{\underline{F}}_t$ et $F \in \underline{\underline{F}}$, et on obtient le cas général par un argument de classe monotone). Cette propriété implique que $A^n - B^{n,x}$ soit également une martingale relativement à la filtration $(\underline{\underline{M}}_t)$. Comme $B^{n,x}$ et A^n sont P^x-indistinguables de processus $(\underline{\underline{M}}_t)$-prévisibles, il s'ensuit que $A^n = B^{n,x}$ P^x-p.s. Donc chaque A^n est faiblement $(\underline{\underline{F}}_t)$-prévisible et la propriété cherchée en résulte en faisant tendre n vers l'infini. ∎

Pour obtenir le théorème, il reste à montrer dans (b) comme dans (a) que A est $(\underline{\underline{F}}_t)$-adapté. De façon à traiter de manière unique, autant que possible, les deux cas, nous effectuons le changement de notations suivant: dans le cas (a) nous désignons maintenant par $\underline{\underline{M}}_t^o$ et $\underline{\underline{M}}^o$ les tribus $\underline{\underline{M}}_t^o = \sigma(A_s : s \leq t)$ et $\underline{\underline{M}}^o = \bigvee_{(t)} \underline{\underline{M}}_t^o$ (attention: $\underline{\underline{M}}_t$ et $\underline{\underline{M}}$ ne sont plus les complétées de $\underline{\underline{M}}_t^o$ et $\underline{\underline{M}}^o$); dans le cas (b) on augmente $\underline{\underline{M}}_t^o$ et $\underline{\underline{M}}^o$ de manière à ce que A soit $(\underline{\underline{M}}_t^o)$-adapté. Avec ce changement de notations, l'hypothèse (R) est vérifiée pour (a) comme pour (b), et A est $(\underline{\underline{M}}_t^o)$-adapté. Notons Q_ω^x les probabilités associées par l'hypothèse (R). La démonstration repose sur les trois lemmes suivants.

LEMME 5 : <u>Soit</u> $M_t \in b\underline{\underline{M}}_t^o$. <u>On a</u> $E^x(M_t|\underline{\underline{F}}) = E^x(M_t|\underline{\underline{F}}_t)$.

<u>Démonstration</u>. Si $F_t \in b\underline{\underline{F}}_t^o$ et $F \in b\underline{\underline{F}}^o$, on a

$$E^x(F_t\ F\circ\theta_t\ E^x(M_t|\underline{\underline{F}})) = E^x(F_t\ F\circ\theta_t\ M_t) = E^x(F_t\ E^{X_t}(F)\ M_t)$$

$$= E^x(F_t\ E^{X_t}(F)\ E^x(M_t|\underline{\underline{F}}_t)) = E^x(F_t\ F\circ\theta_t\ E^x(M_t|\underline{\underline{F}}_t)) .$$

Le lemme résulte alors de ce que les variables $F_t.F\circ\theta_t$ engendrent $\underline{\underline{F}}^o$. ■

LEMME 6 : Pour P^x-presque tout ω, le processus $(\Omega,\underline{\underline{M}}^o,\underline{\underline{M}}^o_{t+},A_t,Q^x_\omega)$ est un processus à accroissements indépendants (non stationnaires): ce qui signifie que pour tous $s,t\geq 0$, $A_{t+s}-A_t$ est une variable indépendante de la tribu $\underline{\underline{M}}^o_{t+}$ pour la loi Q^x_ω.

Démonstration. Commençons par montrer que pour tous $s,t\geq 0$, $M_t\in b\underline{\underline{M}}^o_t$, $f\in b\underline{\underline{\mathbb{R}}}_+$ fixés, on a

$$(2)\qquad Q^x_\omega(M_t\ f(A_{t+s}-A_t)) = Q^x_\omega(M_t)\ Q^x_\omega(f(A_{t+s}-A_t))$$

pour P^x-presque tout ω. Soit $F_t\in b\underline{\underline{F}}^o_t$ et $F\in b\underline{\underline{F}}^o$. Il vient

$$E^x\{F_t\ F\circ\theta_t\ Q^x_.(M_t\ f(A_{t+s}-A_t))\}$$

$$= E^x(F_t\ F\circ\theta_t\ M_t\ f(A_s)\circ\theta_t) \qquad \text{(définition de } Q^x_.\text{)}$$

$$= E^x\{F_t\ M_t\ E^{X_t}(F\ f(A_s))\} \qquad \text{(d'après (1))}$$

$$= E^x\{F_t\ Q^x_.(M_t)\ E^{X_t}(F\ f(A_s))\} \qquad \text{(définition de } Q^x_.\text{)}$$

$$= E^x(F_t\ Q^x_.(M_t)\ F\circ\theta_t\ f(A_s)\circ\theta_t) \qquad \text{(lemme 6 et (1))}$$

$$= E^x\{F_t\ F\circ\theta_t\ Q^x_.(M_t)\ Q^x_.(f(A_{t+s}-A_t))\} \qquad \text{(définition de } Q^x_.\text{)} .$$

Comme les variables $F_t.F\circ\theta_t$ engendrent $\underline{\underline{F}}^o$, on en déduit l'égalité (2). Les tribus $\underline{\underline{M}}^o_t$ et $\underline{\underline{\mathbb{R}}}_+$ étant séparables, on peut trouver un ensemble P^x-négligeable N tel que, pour $\omega\in N^c$, l'égalité (2) soit valable pour tout choix possible de $s,t\in\mathbb{Q}_+$, $M_t\in b\underline{\underline{M}}^o_t$, $f\in b\underline{\underline{\mathbb{R}}}_+$. Soit maintenant $s,t\geq 0$ et $M_t\in\underline{\underline{M}}^o_{t+}$. Si f est continue bornée et si (s_n), (t_n) sont des suites de rationnels décroissant strictement vers s, t, respectivement, on a pour tous $\omega\in N^c$, $n\in\mathbb{N}$:

$$Q^x_\omega(M_t\ f(A_{t_n+s_n}-A_{t_n})) = Q^x_\omega(M_t)\ Q^x_\omega(f(A_{t_n+s_n}-A_{t_n})) ,$$

ce qui entraine (2) par passage à la limite. Le lemme est donc démontré. ■

LEMME 7 : Supposons que pour tout $x\in E$ et pour P^x-presque tout ω, le processus A soit Q^x_ω-p.s. déterministe. Alors A est $(\underline{\underline{F}}_t)$-adapté.

Démonstration. Comme A_t est $\underline{\underline{M}}^o$-mesurable et que $Q_{\cdot}^x(A_t)$ est $\underline{\underline{F}}$-mesurable, on a pour P^x-presque tout ω :

$$P^x(A_t \neq Q_{\cdot}^x(A_t) | \underline{\underline{F}})(\omega) = Q_\omega^x[A_t \neq Q_\omega^x(A_t)].$$

Par hypothèse le second membre est nul pour P^x-presque tout ω. Par suite $A_t = Q^x(A_t) = E^x(A_t | \underline{\underline{F}})$ P^x-p.s., et comme A_t est $\underline{\underline{M}}_t^o$-mesurable, le lemme 5 implique alors que A_t soit $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable. ∎

Passons à la preuve du théorème, en distinguant maintenant les deux cas.

Cas (a). D'après le lemme 6, pour $x \in E$ et pour P^x-presque tout ω, A est un processus à accroissements indépendants pour la loi Q_ω^x. Comme A est croissant et continu, il est donc déterministe pour ces lois Q_ω^x, et il suffit d'appliquer le lemme 7.

Cas (b). Par hypothèse, A est P^x-indistinguable d'un processus croissant $(\underline{\underline{M}}_t)$-prévisible, ce dernier étant de manière classique P^x-indistinguable d'un processus croissant B^x qui est $(\underline{\underline{M}}_t^o)$-prévisible. A et B^x étant $\underline{\underline{M}}^o$-mesurables, il existe un ensemble P^x-négligeable N_1^x tel que A et B^x soient Q_ω^x-indistinguables pour tout $\omega \notin N_1^x$. Par suite, si N_2^x désigne l'ensemble P^x-négligeable intervenant dans le lemme 6, le processus $(\Omega, \underline{\underline{M}}^o, \underline{\underline{M}}_t^o, B_t^x, Q_\omega^x)$ est à accroissements indépendants et prévisible pour $\omega \notin N_1^x \cup N_2^x$ (attention: il est prévisible relativement à $(\underline{\underline{M}}_t^o)$, mais pas nécessairement relativement à sa filtration naturelle; c'est là la différence d'avec le cas (a), différence qui nous impose l'introduction de l'hypothèse (R)). Il nous reste à montrer que B^x, donc A, est Q_ω^x-p.s. déterministe pour $\omega \notin N_1^x \cup N_2^x$, ce qui permettra d'appliquer le lemme 7.

D'après un résultat classique sur les processus à accroissements indépendants, on peut écrire Q_ω^x-p.s.:

$$(3) \qquad B_t^x = b(t) + \textstyle\sum_{(n)} U^n I_{\{t \geq t_n\}} + \sum_{(n)} V^n I_{\{t \geq T_n\}}$$

où b est une fonction croissante (déterministe), où les t_n sont des réels strictement positifs distincts, où les T_n sont des $(\underline{\underline{M}}_{t+}^o)$-temps d'arrêt totalement inaccessibles pour Q_ω^x, et où les U^n et les V^n sont des variables aléatoires positives ou nulles (pour une telle décomposition avec une filtration plus grosse que la filtration naturelle de

B^x, on peut consulter [3], ch. III). Utilisons la prévisibilité de B^x : d'une part B^x n'a pas de sauts totalements inaccessibles, donc le troisième terme à droite de (3) est Q^x_ω-p.s. nul. D'autre part $U^n = Q^x_\omega(U^n | \underline{\underline{M}}^o_{(t_n)-})$; mais $U^n = \Delta B_{t_n} - \Delta b(t_n)$ est indépendant de $\underline{\underline{M}}^o_{(t_n)-} = \bigvee_{(m)} \underline{\underline{M}}^o_{(t_n-1/m)}$, donc $U^n = Q^x_\omega(U^n)$ Q^x_ω-p.s. et le second terme à droite de (3) est Q^x_ω-p.s. déterministe, d'où le résultat.

4 - UN EXEMPLE LIE AUX SYSTEMES REGENERATIFS. Nous allons donner ici un exemple de processus possédant la propriété de Markov renforcée (1), et associée à un système régénératif $(\Omega, \underline{\underline{F}}, \underline{\underline{F}}_t, \theta_t, X_t, P^x; M)$ au sens de [4] ou de [5]: le lecteur ne connaissant pas la théorie des systèmes régénératifs pourra supposer que $(\Omega, \underline{\underline{F}}, \underline{\underline{F}}_t, \theta_t, X_t, P^x)$ est un processus fortement markovien canonique muni d'un fermé aléatoire homogène progressivement mesurable M. La propriété qui nous importe pour la suite est que, pour $t \geq 0$, $f \in b\underline{\underline{F}}^o$ et avec la notation $D_t = \inf(s > t : s \in M)$,

$$(4) \qquad E^x(f \circ \theta_{D_t} | \underline{\underline{F}}_{D_t}) = E^{X_{D_t}}(f) .$$

X_∞ et θ_∞ sont supposés définis. Notons aussi $R_t = D_t - t$.

D'après [4] le processus (R_t, X_{D_t}) est, pour chaque P^μ, un processus de Markov relativement à la famille $(\underline{\underline{F}}_{D_t})$, à valeurs dans $\hat{E} = \overline{\mathbb{R}}_+ \times E$. Pour obtenir une réalisation de son semi-groupe, plaçons-nous sur l'espace $\hat{\Omega} = \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ muni de la tribu produit $\hat{\underline{\underline{M}}}^o = \overline{\underline{\underline{\mathbb{R}}}}_+ \otimes \underline{\underline{F}}^o$ et des mesures $\hat{P}^{r,x} = \varepsilon_r \otimes P^x$. Soit

$$\hat{X}_t(r,\omega) = \begin{cases} (r-t, X_0(\omega)) & \text{si } t < r \\ (R_{t-r}(\omega), X_{D_{t-r}}(\omega)) & \text{si } t \geq r \end{cases}$$

$$\hat{\theta}_t(r,\omega) = \begin{cases} (r-t, \omega) & \text{si } t < r \\ (R_{t-r}(\omega), \theta_{D_{t-r}}(\omega)) & \text{si } t \geq r . \end{cases}$$

Enfin $(\hat{\underline{\underline{M}}}_t)$ désigne la filtration complétée usuelle de la filtration $(\hat{\underline{\underline{M}}}^o_t)$, où $\hat{\underline{\underline{M}}}^o_t$ est la tribu des $A \in \hat{\underline{\underline{M}}}^o$ tels que pour tout r on ait $A \cap (\{r\} \times \Omega) = \{r\} \times A_r$, avec $A_r \in \underline{\underline{F}}_0$ si $r > t$, et $A_r \in \underline{\underline{F}}_{D_{t-r}}$ si $r \leq t$.

Le système $(\hat{\Omega}, \hat{\underline{\underline{M}}}, \hat{\underline{\underline{M}}}_t, \hat{\theta}_t, \hat{X}_t, \hat{P}^{r,x})$ constitue alors un processus markovien au sens de (1): la vérification de ce que $(\hat{\theta}_t)$ est un semi-groupe est facile et analogue à des calculs faits dans [4]; la propriété (1) découle de ce que, si $f \in b\hat{\underline{\underline{M}}}^o$, on a

(5) $$E^x(f(R_t,\theta_{D_t})|\underline{\underline{F}}_{D_t}) = \hat{E}^{(R_t,X_{D_t})}(f) ,$$

formule qui résulte immédiatement de (4). On notera que l'information contenus dans $\hat{\underline{\underline{M}}}^o$ est en général plus grande que celle fournie par le processus $\hat{X}$.

BIBLIOGRAPHIE

1 ÇINLAR E.: Markov additive processes I, Z. für Wahr. 24, 85-93, 1972.

2 GETOOR R.K.: On the construction of kernels, Sém. Proba IX, Lect. Notes in Math. 465, 1975.

3 JACOD J.: Calcul stochastique et problèmes de martingales. Lect. Notes in Math. 714, 1979.

4 MAISONNEUVE B.: Systèmes régénératifs. Astérisque 15, 1974.

5 MAISONNEUVE B., MEYER P.A.: Ensembles aléatoires markoviens homogènes, Sém. Proba. VIII, Lect. Notes in Math. 381, 1974.