Séminaire de probabilités (Strasbourg)

MICHEL PIERRE

Le problème de Skorokhod : une remarque sur la démonstration d'Azéma-Yor

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 392-396
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__392_0>

LE PROBLEME DE SKOROKHOD : UNE REMARQUE SUR LA DEMONSTRATION D'AZEMA-YOR.

Michel PIERRE

Dans [1], J. Azéma et M. Yor ont donné une solution explicite pour le problème de Skorokhod. Nous montrons ici comment, grâce à un procédé d'approximation, la démonstration de leur formule dans le seul cas où la mesure donnée μ (ou plutôt la fonction ψ_μ) est régulière suffit : ceci rend les calculs plus agréables pour le point crucial de la démonstration.

Nous reprenons ici les notations de [1] : (X_t) désigne donc une martingale locale continue avec $\langle X,X\rangle_\infty = \infty$ et $S_t = \sup_{s\leq t} X_s$. Nous notons de plus M l'ensemble des lois de probabilité sur $\mathbf{R}$, centrées, et admettant un moment d'ordre 1. Si $\mu\in M$, $\psi_\mu(x)$ désigne le barycentre de la restriction de μ à $[x,\infty[$.

Nous utilisons essentiellement les deux propositions suivantes.

<u>Proposition 1</u> : <u>Soit</u> $\mu\in M$; <u>alors il existe</u> $(\mu_n)_{n\in\mathbf{N}}\subset M$ <u>avec</u> :

i) ψ_{μ_n} <u>croît en tout point vers</u> ψ_μ

ii) ψ_{μ_n} <u>est continue sur</u> $\mathbf{R}$

iii) μ_n <u>est à support dans</u> $[b_n,a_n]$, $(-\infty<b_n\leq 0\leq a_n<+\infty)$,

<u>et</u> ψ_{μ_n} <u>est strictement croissante sur</u> $[b_n,+\infty[$.

<u>Proposition 2</u> : <u>Soit</u> $(\mu_n)_{n\in\mathbf{N}\cup\{\infty\}}$ <u>dans</u> M ; <u>on suppose que</u> ψ_{μ_n} <u>croît en tout point vers</u> ψ_{μ_∞}. <u>Alors</u> :

i) μ_n <u>converge étroitement vers</u> μ_∞

ii) $\int_{\mathbf{R}}|x|\,d\mu_n$ <u>converge vers</u> $\int_{\mathbf{R}}|x|\,d\mu_\infty$.

<u>De plus, si</u> $T_n = \inf\{t\geq 0 \; ; \; S_t \geq \psi_{\mu_n}(X_t)\}$ $(n\in\mathbf{N}\cup\{\infty\})$:

iii) X_{T_n} <u>converge p.s. vers</u> X_{T_∞}.

<u>Remarque 1</u> : Si l'on sait que X_{T_n} a pour loi μ_n pour tout $n\in\mathbf{N}$, on déduit de la proposition 2 que X_{T_∞} a pour loi μ_∞. Compte-tenu de la proposition 1, il suffit donc de démontrer ce résultat pour les mesures μ à support compact telles que ψ_μ vérifie les points ii) et iii) de la proposition 1.

D'autre part, l'uniforme intégrabilité de la martingale $(X_{t\wedge T_\infty})$ se déduit de celle des martingales $(X_{t\wedge T_n})$ à l'aide de la proposition 2 (ii).

La formule suivante montre bien comment μ varie en fonction de ψ_μ et est à l'origine de la proposition 2.

Lemme 1 : Soit $\mu\in M$ et $a = \inf\{x\in[0,\infty] \; ; \psi_\mu(x) = x\}$; alors :

$$\forall A \geq 0, \forall x\in]-\infty,a[, \quad \frac{\bar{\mu}(x)}{\bar{\mu}(-A)} = \frac{\psi_\mu(-A)+A}{\psi_\mu(x)-x} \exp\left[-\int_{-A}^{x} \frac{ds}{\psi_\mu(s)-s}\right].$$

Démonstration du lemme 1 :

Nous savons (cf. [1]) que $\psi_\mu(x) > x$ sur $]-\infty,a[$ et que $\bar{\mu}$ est solution sur cet intervalle de :

(1) $\qquad (\psi_\mu(x^+)-x)d\bar{\mu} + \bar{\mu}\, d\psi_\mu = 0.$

D'autre part, toute solution continue à gauche de (1) est proportionnelle à $\bar{\mu}$. Il suffit donc de montrer que $\phi(x) = \dfrac{\psi_\mu(-A)+A}{\psi_\mu(x)-x} \exp\left[-\int_{-A}^{x} \dfrac{ds}{\psi_\mu(s)-s}\right]$ est solution sur $]-\infty,a[$ de cette équation. Or, sur cet intervalle :

$$d[\phi(x)\;(\psi_\mu(x)-x)] = -\phi(x)dx,$$

soit, puisque ϕ est continue à gauche :

$$(\psi_\mu(x^+)-x)d\phi + \phi(x)\;(d\psi_\mu-dx) = -\phi(x)dx.$$

Démonstration de la proposition 2 :

On vérifie que $a_n = \inf\{x\in[0,\infty] \; ; \psi_{\mu_n}(x)=x\}$ croît avec n vers a_∞. D'après le lemme 1, pour tout $x\in]-\infty,a_\infty[$, $\dfrac{\bar{\mu}_n(x)}{\bar{\mu}_n(0)}$ converge vers $\dfrac{\bar{\mu}_\infty(x)}{\bar{\mu}_\infty(0)}$; d'autre part, $\bar{\mu}_n$ et $\bar{\mu}_\infty$ sont nulles sur $]a_\infty,+\infty[$; enfin, si $\bar{\mu}_\infty$ est continue en a_∞ (i.e., $\bar{\mu}_\infty(a_\infty) = 0$), d'après la décroissance de $\bar{\mu}_n$, on a :

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\bar{\mu}_n(a_\infty)}{\bar{\mu}_n(0)} \leq \inf_{x<a_\infty} \frac{\bar{\mu}_\infty(x)}{\bar{\mu}_\infty(0)} = 0.$$

Donc, $\dfrac{\bar{\mu}_n}{\bar{\mu}_n(0)}$ converge vers $\dfrac{\bar{\mu}_\infty}{\bar{\mu}_\infty(0)}$ en tout point de continuité de $\bar{\mu}_\infty$. Or, on vérifie que $(\mu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est étroitement compact, car :

$$\forall X > 0, \int_{[X,\infty[} d\mu_n \leq \frac{1}{X} \int_{[0,\infty[} t \, d\mu_n = \frac{1}{X} \psi_{\mu_n}(0) \, \bar{\mu}_n(0) \leq \frac{\psi_{\mu_\infty}(0)}{X}.$$

$$\int_{]-\infty,-X]} d\mu_n \leq \frac{1}{X} \int_{]-\infty,0]} -t \, d\mu_n = \frac{1}{X} \psi_{\mu_n}(0) \, \bar{\mu}_n(0) \leq \frac{\psi_{\mu_\infty}(0)}{X}.$$

On en déduit le point i). D'autre part :

$$\int_{[0,\infty[} t \, d\mu_n = \psi_{\mu_n}(0) \, \bar{\mu}_n(0) \leq \psi_\mu(0) \, \bar{\mu}_n(0) = \frac{\bar{\mu}_n(0)}{\bar{\mu}_\infty(0)} \int_{[0,\infty[} t \, d\mu_\infty.$$

Puisque μ_n converge étroitement vers μ_∞, on en déduit :

$$\int_{[0,\infty[} t \, d\mu_\infty = \int_{]0,\infty[} t \, d\mu_\infty \leq \liminf_{n \to \infty} \int_{[0,\infty[} t \, d\mu_n \leq \limsup_{n \to \infty} \int_{[0,\infty[} t \, d\mu_n \leq \int_{[0,\infty[} t \, d\mu_\infty.$$

Comme par ailleurs les mesures $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}}$ sont centrées, ii) s'en déduit.

Enfin, pour iii), notons que T_n croît vers un temps d'arrêt $\theta \leq T_\infty$ et T_∞ est p.s. fini (cf. [1]) ; or :

$$\forall p \leq n, \ \psi_{\mu_p}(X_{T_n}) \leq \psi_{\mu_n}(X_{T_n}) \leq S_{T_n} \leq S_\theta.$$

Soit, en passant à la limite en n, puisque ψ_{μ_p} est s.c.i. :

$$\forall p, \ \psi_{\mu_p}(X_\theta) \leq S_\theta.$$

D'où $\psi_{\mu_\infty}(X_\theta) \leq S_\theta$ et $\theta = T_\infty$. Ainsi, par continuité, X_{T_n} converge p.s. vers X_{T_∞}.

Démonstration de la proposition 1 :

Considérons pour $n \geq 1$, la solution (continue) ϕ_n de :

$\frac{1}{n} \phi'_n + \phi_n = \psi_\mu \wedge n$ sur $]-n,\infty[$, $\phi_n(0) = 0$ sur $]-\infty,-n]$, donnée explicitement sur $[-n,\infty[$ par :

$$\phi_n(x) = \int_0^{n(x+n)} e^{-u} [\psi_\mu(x - \tfrac{u}{n}) \wedge n] \, du.$$

Puisque ψ_μ est croissante, positive, ϕ_n est croissante sur $\mathbb{R}$, majorée par $\psi_\mu \wedge n$ et croît vers ψ_μ en tout point, par continuité à gauche. D'autre part, si $b = \sup\{x \in [-\infty,0], \psi_\mu(x) = 0\}$ et $b_n = (-n) \vee b$, on vérifie que $\phi_n < \psi_\mu \wedge n$ sur $]b_n,\infty[$ et donc ϕ_n est strictement croissante sur $]b_n,\infty[$.

Soit alors $a_n = \inf\{x \,;\, \phi_n(x) = x\}$ $(a_n < +\infty)$ et ψ_n définie par :

$\psi_n = \phi_n$ sur $]-\infty, a_n]$, $\psi_n(x) = x$ sur $[a_n, +\infty[$.

Il existe $\mu_n \in M$ telle que $\psi_n = \psi_{\mu_n}$, ceci d'après [1] ou directement en vérifiant -vu le lemme 1- que :

$$\bar{\mu}_n(x) = \frac{-b_n}{\psi_n(x)-x} \exp\left[-\int_{b_n}^{x} \frac{ds}{\psi_n(s)-s}\right] \text{ sur }]-\infty, a_n[$$

$$\bar{\mu}_n(x) = 0 \qquad\qquad \text{sur }]a_n, \infty[,$$

convient. Les fonctions ψ_{μ_n} ainsi construites vérifient les conditions requises.

<u>Théorème</u> (cf. Azéma - Yor [1] et [2]) : <u>Soit</u> $\mu \in M$ <u>et</u> $T = \inf\{t \geq 0 \,;\, S_t \geq \psi_\mu(X_t)\}$. <u>Alors</u> :

a) <u>la loi de</u> X_T <u>est</u> μ

b) <u>la martingale</u> $(X_{t \wedge T})$ <u>est uniformément intégrable</u>

c) $E[\langle X,X\rangle_T] = \int_{\mathbb{R}} x^2 \, d\mu \quad (\leq +\infty)$.

<u>Démonstration du théorème</u> :

Compte-tenu de la remarque 1, pour démontrer a) et b) on peut supposer μ à support compact dans $[-A, a]$, ψ_μ continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante sur $[-A, +\infty[$.

Soit Φ continue à support compact dans $\mathbb{R}$ et $g = \Phi \circ \psi^{-1}$ où $\psi^{-1} : [0,\infty[\to [-A,\infty[$ est l'inverse de la restriction de ψ_μ à $[-A,\infty[$ (g est continue sur $[0,\infty[$) et $G(x) = \int_0^x g(\sigma)\,d\sigma$.

D'après [1], $M_t = G(S_t) + (X_t - S_t)\, g(S_t)$ est une martingale locale. De plus, μ étant à support compact, $(X_{t \wedge T})$ est bornée ; puisque G et g sont bornées, $(M_{t \wedge T})$ est donc une martingale bornée. On a ainsi :

$$E[M_T] = E[M_0] = 0.$$

Puisque, par continuité de $\psi = \psi_\mu$, $S_T = \psi(X_T)$, ceci s'écrit :

$$E\left[\int_0^{\psi(X_T)} \Phi(\psi^{-1}(\sigma))\,d\sigma + [X_T - \psi(X_T)]\, \Phi(X_T)\right] = 0.$$

Ainsi, si ν désigne la loi de X_T et $\bar{\nu}(x) = \nu[x,\infty[$:

$$\int_{\mathbb{R}} d\bar{\nu} \int_0^x \Phi(v)\, d\psi(v) + \int_{\mathbb{R}} (x - \psi(x))\, \Phi(x)\, d\bar{\nu} = 0,$$

Soit encore, après intégration par parties :

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi(x) \left[- \bar{\nu}(x)d\psi + (x - \psi(x))d\bar{\nu}\right] = 0.$$

On en déduit $\bar{\nu} = \bar{\mu}$ (cf. (1) dans la démonstration du lemme 1).

Pour c), si μ est à support compact, on obtient comme dans [1] que $E[X_T^2] = E[\langle X,X\rangle_T] = \int_{\mathbb{R}} x^2 \, d\mu$.

Pour montrer cette formule dans le cas général, on peut utiliser la formule (4) de [1] ou aussi la formule plus simple suivante :

<u>Lemme 2</u> : <u>Si</u> $\int_{\mathbb{R}} x^2 d\mu < +\infty$, $\int_{\mathbb{R}} x^2 d\mu = \int_{\mathbb{R}} \psi(x)\, \bar{\mu}(x) dx$.

Admettant cette formule, et utilisant les fonctions (ψ_{μ_n}) construites dans [1] troncature à partir de ψ_μ, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 d\mu_n = \int_{-n}^{n} \psi_\mu(x)\, \bar{\mu}_n(x) dx = c_n \int_{-n}^{n} \psi(x)\, \bar{\mu}(x) dx,$$

où $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} x^2 d\mu_n = \int_{\mathbb{R}} x^2 d\mu$ et c) en découle (le cas où $\int_{\mathbb{R}} x^2 d\mu = \infty$ est immédiat).

<u>Démonstration du lemme 2</u> : Par intégration par parties :

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 d\mu = \int_{\mathbb{R}} -x \, d(\psi(x)\ \bar{\mu}(x)) = \int_{\mathbb{R}} dx\, \psi(x)\, \bar{\mu}(x) - \Big[x\, \psi(x)\, \bar{\mu}(x)\Big]_{-\infty}^{+\infty}.$$

Or :

$$\lim_{x\to\infty} x\, \psi(x)\, \bar{\mu}(x) = \lim_{x\to\infty} x \int_{[x,\infty[} t \, d\mu \le \lim_{x\to\infty} \int_{[x,\infty[} t^2 d\mu = 0.$$

$$\lim_{x\to-\infty} (-x)\, \psi(x)\, \bar{\mu}(x) = \lim_{x\to-\infty} x \int_{]-\infty,x[} t \, d\mu \le \lim_{x\to-\infty} \int_{]-\infty,x[} t^2 d\mu = 0.$$

<u>REFERENCES</u> :

[1] <u>J. AZEMA - M. YOR</u> : "Une solution simple au problème de Skorokhod" Séminaire de Probabilités XIII. Lect. Notes in Maths 721, Springer 1979.

[2] <u>J. AZEMA - M. YOR</u> : "Le Problème de Skorokhod : compléments à l'exposé précédent". Séminaire de Probabilités XIII. Lect. Notes in Maths 721. Springer 1979