

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MICHEL PIERRE

Le problème de Skorokhod : une remarque sur la démonstration d’Azéma-Yor

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 392-396

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__392_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LE PROBLEME DE SKOROKHOD : UNE REMARQUE
SUR LA DEMONSTRATION D'AZEMA-YOR.

Michel PIERRE

Dans [1], J. Azéma et M. Yor ont donné une solution explicite pour le problème de Skorokhod. Nous montrons ici comment, grâce à un procédé d'approximation, la démonstration de leur formule dans le seul cas où la mesure donnée μ (ou plutôt la fonction ψ_μ) est régulière suffit : ceci rend les calculs plus agréables pour le point crucial de la démonstration.

Nous reprenons ici les notations de [1] : (X_t) désigne donc une martingale locale continue avec $\langle X, X \rangle_\infty = \infty$ et $S_t = \sup_{s \leq t} X_s$. Nous notons de plus M l'ensemble des lois de probabilité sur \mathbb{R} , centrées, et admettant un moment d'ordre 1. Si $\mu \in M$, $\psi_\mu(x)$ désigne le barycentre de la restriction de μ à $[x, \infty[$.

Nous utilisons essentiellement les deux propositions suivantes.

Proposition 1 : Soit $\mu \in M$; alors il existe $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ avec :

- i) ψ_{μ_n} croît en tout point vers ψ_μ
- ii) ψ_{μ_n} est continue sur \mathbb{R}
- iii) μ_n est à support dans $[b_n, a_n], (-\infty < b_n \leq 0 \leq a_n < +\infty)$,

et ψ_{μ_n} est strictement croissante sur $[b_n, +\infty[$.

Proposition 2 : Soit $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}}$ dans M ; on suppose que ψ_{μ_n} croît en tout point vers ψ_{μ_∞} . Alors :

- i) μ_n converge étroitement vers μ_∞
- ii) $\int_{\mathbb{R}} |x| d\mu_n$ converge vers $\int_{\mathbb{R}} |x| d\mu_\infty$.

De plus, si $T_n = \inf\{t \geq 0 ; S_t \geq \psi_{\mu_n}(X_t)\}$ ($n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) :

- iii) X_{T_n} converge p.s. vers X_{T_∞} .

Remarque 1 : Si l'on sait que X_{T_n} a pour loi μ_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, on déduit de la proposition 2 que X_{T_∞} a pour loi μ_∞ . Compte-tenu de la proposition 1, il suffit donc de démontrer ce résultat pour les mesures μ à support compact telles que ψ_μ vérifie les points ii) et iii) de la proposition 1.

D'autre part, l'uniforme intégrabilité de la martingale $(X_t \mathbf{1}_{T_\infty})$ se déduit de celle des martingales $(X_t \mathbf{1}_{T_n})$ à l'aide de la proposition 2 (ii).

La formule suivante montre bien comment μ varie en fonction de ψ_μ et est à l'origine de la proposition 2.

Lemme 1 : Soit $\mu \in M$ et $a = \inf\{x \in [0, \infty] ; \psi_\mu(x) = x\}$; alors :

$$\forall A \geq 0, \forall x \in]-\infty, a[, \frac{\bar{\mu}(x)}{\bar{\mu}(-A)} = \frac{\psi_\mu(-A)+A}{\psi_\mu(x)-x} \exp\left[-\int_{-A}^x \frac{ds}{\psi_\mu(s)-s}\right].$$

Démonstration du lemme 1 :

Nous savons (cf. [1]) que $\psi_\mu(x) > x$ sur $] -\infty, a[$ et que $\bar{\mu}$ est solution sur cet intervalle de :

$$(1) \quad (\psi_\mu(x^+) - x) d\bar{\mu} + \bar{\mu} d\psi_\mu = 0.$$

D'autre part, toute solution continue à gauche de (1) est proportionnelle à $\bar{\mu}$. Il suffit donc de montrer que $\phi(x) = \frac{\psi_\mu(-A)+A}{\psi_\mu(x)-x} \exp\left[-\int_{-A}^x \frac{ds}{\psi_\mu(s)-s}\right]$ est solution sur $] -\infty, a[$ de cette équation. Or, sur cet intervalle :

$$d[\phi(x) (\psi_\mu(x)-x)] = -\phi(x) dx,$$

soit, puisque ϕ est continue à gauche :

$$(\psi_\mu(x^+) - x) d\phi + \phi(x) (d\psi_\mu - dx) = -\phi(x) dx.$$

Démonstration de la proposition 2 :

On vérifie que $a_n = \inf\{x \in [0, \infty] ; \psi_{\mu_n}(x) = x\}$ croît avec n vers a_∞ . D'après le lemme 1, pour tout $x \in]-\infty, a_\infty[$, $\frac{\bar{\mu}_n(x)}{\bar{\mu}_n(0)}$ converge vers $\frac{\bar{\mu}_\infty(x)}{\bar{\mu}_\infty(0)}$; d'autre part, $\bar{\mu}_n$ et $\bar{\mu}_\infty$ sont nulles sur $] a_\infty, +\infty[$; enfin, si $\bar{\mu}_\infty$ est continue en a_∞ (i.e., $\bar{\mu}_\infty(a_\infty) = 0$), d'après la décroissance de $\bar{\mu}_n$, on a :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\bar{\mu}_n(a_\infty)}{\bar{\mu}_n(0)} \leq \inf_{x < a_\infty} \frac{\bar{\mu}_\infty(x)}{\bar{\mu}_\infty(0)} = 0.$$

Donc, $\frac{\bar{\mu}_n}{\bar{\mu}_n(0)}$ converge vers $\frac{\bar{\mu}_\infty}{\bar{\mu}_\infty(0)}$ en tout point de continuité de $\bar{\mu}_\infty$. Or, on vérifie

que $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est étroitement compact, car :

$$\forall X > 0, \int_{[X, \infty[} d\mu_n \leq \frac{1}{X} \int_{[0, \infty[} t d\mu_n = \frac{1}{X} \psi_{\mu_n}(0) \bar{\mu}_n(0) \leq \frac{\psi_{\mu_\infty}(0)}{X}$$

$$\int_{]-\infty, -X]} d\mu_n \leq \frac{1}{X} \int_{]-\infty, 0]} t d\mu_n = \frac{1}{X} \psi_{\mu_n}(0) \bar{\mu}_n(0) \leq \frac{\psi_{\mu_\infty}(0)}{X}$$

On en déduit le point i). D'autre part :

$$\int_{[0, \infty[} t d\mu_n = \psi_{\mu_n}(0) \bar{\mu}_n(0) \leq \psi_{\mu_n}(0) \bar{\mu}_n(0) = \frac{\bar{\mu}_n(0)}{\bar{\mu}_\infty(0)} \int_{[0, \infty[} t d\mu_\infty$$

Puisque μ_n converge étroitement vers μ_∞ , on en déduit :

$$\int_{[0, \infty[} t d\mu_\infty = \int_{[0, \infty[} t d\mu_\infty \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, \infty[} t d\mu_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, \infty[} t d\mu_n \leq \int_{[0, \infty[} t d\mu_\infty$$

Comme par ailleurs les mesures $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}}$ sont centrées, ii) s'en déduit.

Enfin, pour iii), notons que T_n croît vers un temps d'arrêt $\theta \leq T_\infty$ et T_∞ est p.s. fini (cf. [1]) ; or :

$$\forall p \leq n, \psi_{\mu_p}(X_{T_n}) \leq \psi_{\mu_n}(X_{T_n}) \leq S_{T_n} \leq S_\theta$$

Soit, en passant à la limite en n , puisque ψ_{μ_p} est s.c.i. :

$$\forall p, \psi_{\mu_p}(X_\theta) \leq S_\theta$$

D'où $\psi_{\mu_\infty}(X_\theta) \leq S_\theta$ et $\theta = T_\infty$. Ainsi, par continuité, X_{T_n} converge p.s. vers X_{T_∞} .

Démonstration de la proposition 1 :

Considérons pour $n \geq 1$, la solution (continue) ϕ_n de :

$$\frac{1}{n} \phi_n' + \phi_n = \psi_\mu \wedge n \text{ sur }]-n, \infty[, \phi_n(0) = 0 \text{ sur }]-\infty, -n], \text{ donnée explicitement sur } [-n, \infty[\text{ par :}$$

$$\phi_n(x) = \int_0^{n(x+n)} e^{-u} [\psi_\mu(x - \frac{u}{n}) \wedge n] du$$

Puisque ψ_μ est croissante, positive, ϕ_n est croissante sur \mathbb{R} , majorée par $\psi_\mu \wedge n$ et croît vers ψ_μ en tout point, par continuité à gauche. D'autre part, si

$b = \sup\{x \in [-\infty, 0], \psi_\mu(x) = 0\}$ et $b_n = (-n) \vee b$, on vérifie que $\phi_n < \psi_\mu \wedge n$ sur $]b_n, \infty[$ et donc ϕ_n est strictement croissante sur $]b_n, \infty[$.

Soit alors $a_n = \inf\{x ; \phi_n(x) = x\}$ ($a_n < +\infty$) et ψ_n définie par :

$$\psi_n = \phi_n \text{ sur }]-\infty, a_n], \psi_n(x) = x \text{ sur } [a_n, +\infty[.$$

Il existe $\mu_n \in M$ telle que $\psi_n = \psi_{\mu_n}$, ceci d'après [1] ou directement en vérifiant -vu le lemme 1- que :

$$\bar{\mu}_n(x) = \frac{-b_n}{\psi_n(x)-x} \exp\left[-\int_{b_n}^x \frac{ds}{\psi_n(s)-s}\right] \text{ sur }]-\infty, a_n[$$

$$\bar{\mu}_n(x) = 0 \text{ sur }]a_n, +\infty[.$$

convient. Les fonctions ψ_{μ_n} ainsi construites vérifient les conditions requises.

Théorème (cf. Azéma - Yor [1] et [2]) : Soit $\mu \in M$ et $T = \inf\{t \geq 0 ; S_t \geq \psi_\mu(X_t)\}$.

Alors :

- la loi de X_T est μ
- la martingale $(X_t \wedge T)$ est uniformément intégrable

$$c) E[\langle X, X \rangle_T] = \int_{\mathbf{R}} x^2 d\mu \quad (< +\infty).$$

Démonstration du théorème :

Compte-tenu de la remarque 1, pour démontrer a) et b) on peut supposer μ à support compact dans $[-A, a]$, ψ_μ continue sur \mathbf{R} et strictement croissante sur $[-A, +\infty[$.

Soit ϕ continue à support compact dans \mathbf{R} et $g = \phi \circ \psi^{-1}$ où $\psi^{-1} : [0, +\infty[\rightarrow [-A, +\infty[$ est l'inverse de la restriction de ψ_μ à $[-A, +\infty[$ (g est continue sur $[0, +\infty[$) et $G(x) = \int_0^x g(\sigma) d\sigma$.

D'après [1], $M_t = G(S_t) + (X_t - S_t) g(S_t)$ est une martingale locale. De plus, μ étant à support compact, $(X_t \wedge T)$ est bornée ; puisque G et g sont bornées, $(M_t \wedge T)$ est donc une martingale bornée. On a ainsi :

$$E[M_T] = E[M_0] = 0.$$

Puisque, par continuité de $\psi = \psi_\mu$, $S_T = \psi(X_T)$, ceci s'écrit :

$$E\left[\int_0^{\psi(X_T)} \phi(\psi^{-1}(\sigma)) d\sigma + [X_T - \psi(X_T)] \phi(X_T)\right] = 0.$$

Ainsi, si ν désigne la loi de X_T et $\bar{\nu}(x) = \nu[x, +\infty[$:

$$\int_{\mathbf{R}} d\bar{\nu} \int_0^x \phi(v) d\psi(v) + \int_{\mathbf{R}} (x - \psi(x)) \phi(x) d\bar{\nu} = 0,$$

Soit encore, après intégration par parties :

$$\int_{\mathbf{R}} \Phi(x) \left[-\bar{v}(x) d\psi + (x - \psi(x)) d\bar{v} \right] = 0.$$

On en déduit $\bar{v} = \bar{\mu}$ (cf. (1) dans la démonstration du lemme 1).

Pour c), si μ est à support compact, on obtient comme dans [1] que $E[X_T^2] = E[\langle X, X \rangle_T] = \int_{\mathbf{R}} x^2 d\mu$.

Pour montrer cette formule dans le cas général, on peut utiliser la formule (4) de [1] ou aussi la formule plus simple suivante :

Lemme 2 : Si $\int_{\mathbf{R}} x^2 d\mu < +\infty$, $\int_{\mathbf{R}} x^2 d\mu = \int_{\mathbf{R}} \psi(x) \bar{\mu}(x) dx$.

Admettant cette formule, et utilisant les fonctions (ψ_{μ_n}) construites dans [1] tronquée à partir de ψ_{μ} , on a :

$$\int_{\mathbf{R}} x^2 d\mu_n = \int_{-n}^n \psi_{\mu}(x) \bar{\mu}_n(x) dx = c_n \int_{-n}^n \psi(x) \bar{\mu}(x) dx,$$

où $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}} x^2 d\mu_n = \int_{\mathbf{R}} x^2 d\mu$ et c) en découle (le cas où $\int_{\mathbf{R}} x^2 d\mu = \infty$ est immédiat).

Démonstration du lemme 2 : Par intégration par parties :

$$\int_{\mathbf{R}} x^2 d\mu = \int_{\mathbf{R}} -x d(\psi(x) \bar{\mu}(x)) = \int_{\mathbf{R}} dx \psi(x) \bar{\mu}(x) - \left[x \psi(x) \bar{\mu}(x) \right]_{-\infty}^{+\infty}.$$

Or :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \psi(x) \bar{\mu}(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \int_{[x, \infty[} t d\mu \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{[x, \infty[} t^2 d\mu = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) \psi(x) \bar{\mu}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \int_{]-\infty, x]} t d\mu \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{]-\infty, x]} t^2 d\mu = 0.$$

REFERENCES :

- [1] J. AZEMA - M. YOR : "Une solution simple au problème de Skorokhod"
Séminaire de Probabilités XIII. Lect. Notes in Maths
721, Springer 1979.
- [2] J. AZEMA - M. YOR : "Le Problème de Skorokhod : compléments à l'exposé
précédent".
Séminaire de Probabilités XIII. Lect. Notes in Maths
721. Springer 1979