

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MARC YOR

## Remarques sur une formule de Paul Lévy

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 14 (1980), p. 343-346

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1980\\_\\_14\\_\\_343\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__343_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

REMARQUES SUR UNE FORMULE DE PAUL LEVY

Marc YOR

1. Soit  $(X_t, Y_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ , issu de 0.

M.R. Berthuet <sup>(1)</sup> a obtenu une expression explicite de la fonction caractéristique du couple  $(\int_0^1 X_u dY_u ; \int_0^1 Y_u dX_u)$ , qui est :

pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$(1) \quad E[\exp i\{\alpha \int_0^1 X_u dY_u + \beta \int_0^1 Y_u dX_u\}] \\ = \begin{cases} [\operatorname{ch}^2(\frac{\alpha-\beta}{2}) + (\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta})^2 \operatorname{sh}^2(\frac{\alpha-\beta}{2})]^{-1/2}, & \text{si } \alpha \neq \beta \\ (1+\alpha^2)^{-1/2} & \text{si } \alpha = \beta \end{cases}$$

Par continuité, il suffit évidemment de prouver la formule pour  $\alpha \neq \beta$ , ce que l'on suppose dans la suite. Nous remarquons ci-dessous que la formule (1) se déduit, de façon directe, de la formule de Paul Lévy [2] : pour tout  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,

$$(2) \quad E[\exp i\{b \int_0^1 (X_u dY_u - Y_u dX_u)\} / X_1 = x ; Y_1 = y] \\ = \frac{b}{(\operatorname{sh} b)} \exp \frac{x^2 + y^2}{2} [1 - b \operatorname{coth} b]$$

(Cette formule joue un rôle important dans l'étude de certains groupes nilpotents ; voir, par exemple, l'article de B. Gaveau [1]).

On donne ensuite une démonstration simple de la formule (2).

2. Faisons le changement de paramètres :  $\alpha = a+b$  ;  $\beta = a-b$ .

Il vient alors, d'après la formule d'Ito :

$$\alpha \int_0^1 X_u dY_u + \beta \int_0^1 Y_u dX_u = a(X_1 Y_1) + b \int_0^1 (X_u dY_u - Y_u dX_u),$$

et donc, d'après (2) :

$$E[\exp i\{\alpha \int_0^1 X_u dY_u + \beta \int_0^1 Y_u dX_u\} / X_1 = x, Y_1 = y] \\ = \exp(iaxy) E[\exp\{ib \int_0^1 (X_u dY_u - Y_u dX_u)\} / X_1 = x ; Y_1 = y] \\ = \exp(iaxy) \frac{b}{\operatorname{sh} b} \exp(\frac{x^2 + y^2}{2}) [1 - b \operatorname{coth} b].$$

---

(1) Un résumé des résultats de M. Berthuet paraîtra dans un prochain volume des Annales de l'Université de Clermont, lequel rassemble les exposés faits à l'Ecole d'Eté de Saint-Flour (1979).

On a donc :

$$\begin{aligned} & E\left[\exp i\left\{\alpha\int_0^1 X_u dY_u + \beta\int_0^1 Y_u dX_u\right\}\right] \\ &= \frac{b}{2\pi(\operatorname{sh}b)} \int_{\mathbb{R}^2} dx dy \exp\left[(-b \operatorname{coth} b) \frac{x^2+y^2}{2} + iaxy\right] \\ &= [\operatorname{ch}^2 b + \left(\frac{a}{b}\right)^2 \operatorname{sh}^2 b]^{-1/2} \quad (\text{d'où (1)}), \end{aligned}$$

à l'aide de la formule élémentaire, valable pour tout  $\lambda > 0$ , et  $\mu \in \mathbb{R}$  :

$$(3) \quad \frac{1}{2\pi} (\lambda^2 + \mu^2)^{1/2} \int_{\mathbb{R}^2} dx dy e^{[-\lambda(\frac{x^2+y^2}{2}) + i\mu xy]} = 1$$

3. Pour prouver (2), remarquons tout d'abord que

$$\int_0^1 (X_u dY_u - Y_u dX_u) = \int_0^1 (X'_u dY'_u - Y'_u dX'_u),$$

où  $\begin{pmatrix} X'_u \\ Y'_u \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} X_u \\ Y_u \end{pmatrix}$ , et  $R$  est une transformation orthogonale de  $\mathbb{R}^2$

(on peut, par exemple, utiliser l'égalité :  $\int_0^1 (X_u dY_u - Y_u dX_u) = \int_0^1 (A \begin{pmatrix} X_u \\ Y_u \end{pmatrix} ; d \begin{pmatrix} X_u \\ Y_u \end{pmatrix})$

avec  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , et  $\tilde{R}AR = A$ ).

D'autre part, la loi du mouvement brownien  $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$  est invariante par toute transformation orthogonale  $R$  ; on déduit de ces 2 remarques que :

$$\begin{aligned} & E\left[\exp i b \int_0^1 (X_u dY_u - Y_u dX_u) \mid X_1 = x, Y_1 = y\right] \\ &= E\left[\exp i b \int_0^1 (X_u dY_u - Y_u dX_u) \mid X_1^2 + Y_1^2 = x^2 + y^2\right]. \end{aligned}$$

Définissons maintenant  $\rho_t = \sqrt{X_t^2 + Y_t^2}$  ( $t \geq 0$ ), et notons  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Rappelons que la filtration naturelle du processus  $(\rho_t)$  est égale à celle du mouvement brownien réel (voir, par exemple, [4]) :

$$\beta_t = \int_0^t \frac{X_u dX_u + Y_u dY_u}{\rho_u} \quad (t \geq 0).$$

En conséquence, le processus  $(\rho_t)_{t \geq 0}$  est indépendant du second mouvement brownien réel :

$$\gamma_t = \int_0^t \frac{X_u dY_u - Y_u dX_u}{\rho_u} \quad (t \geq 0),$$

orthogonal à  $(\beta_t)$ .

Il découle de ces dernières remarques que :

$$\begin{aligned} & E\left[\exp ib \int_0^1 (X_u dY_u - Y_u dX_u) / \rho_1 = \rho\right] \\ &= E\left[\exp ib \int_0^1 \rho_u dY_u / \rho_1 = \rho\right] = E\left[\exp - \frac{b^2}{2} \int_0^1 \rho_u^2 du / \rho_1 = \rho\right] \end{aligned}$$

Or, D. Williams ([3], p. 238) a montré très simplement la formule :

$$(4) \quad E\left[\exp\left\{\alpha\rho_1^2 - \frac{b^2}{2} \int_0^1 \rho_u^2 du\right\} / \rho_1\right] = b[b \operatorname{ch} b - 2\alpha \operatorname{sh} b]^{-1},$$

pour tout couple  $(\alpha, b)$  vérifiant :  $2\alpha < b \operatorname{coth} b$ .

On vérifie alors immédiatement, en appliquant la formule élémentaire :

$$(5) \quad (E[\exp(-\lambda X^2)])^2 = \frac{1}{1+2\lambda} \quad (\lambda > 0),$$

où  $X$  est une variable gaussienne, centrée, réduite, que : pour tout  $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,

$$E\left[\exp\left\{-\frac{b^2}{2} \int_0^1 \rho_u^2 du\right\} / \rho_1\right] = \frac{b}{\operatorname{sh} b} \exp\left[\frac{\rho_1^2}{2} (1 - b \operatorname{coth} b)\right],$$

ce qui termine la preuve de (2).

4. Pour être complet, indiquons la preuve de (4) -très légèrement modifiée- donnée par D. Williams en [3].

Puisque  $\rho^2 = X^2 + Y^2$ , on a, pour tout  $\alpha > 0$  :

$$\begin{aligned} I_{\alpha, b} & \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} E\left[\exp\left\{-\alpha\rho_1^2 - \frac{b^2}{2} \int_0^1 \rho_u^2 du\right\}\right] \\ &= (E\left[\exp\left\{-\alpha X_1^2 - \frac{b^2}{2} \int_0^1 X_u^2 du\right\}\right])^2 \\ &= E_Q\left[\exp(-\alpha X_1^2) \exp\left(-b \int_0^1 X_u dX_u\right)\right]^2, \end{aligned}$$

où  $Q$  désigne la probabilité :  $\exp\left\{b \int_0^1 X_u dX_u - \frac{b^2}{2} \int_0^1 X_u^2 du\right\} \cdot P$

(d'après un théorème de Novikov,  $Q$  est une probabilité dès que

$E_P\left[\exp \frac{b^2}{2} \int_0^1 X_u^2 du\right] < \infty$ , ce qui est assuré, d'après l'inégalité de Jensen, si

$E\left[\exp\left(\frac{b^2}{2} X_1^2\right)\right] < \infty$  ; dans la suite, on suppose donc que  $b$  vérifie cette condition, ce qui suffit pour établir (4), par un raisonnement d'analyticité).

On a donc :

$$I_{\alpha,b} = E_Q[\exp\{-\alpha X_1^2 - \frac{b}{2} (X_1^2 - 1)\}]^2 \\ = \exp(b) (E_Q[\exp - (\alpha + \frac{b}{2}) X_1^2])^2.$$

Or, d'après le théorème de Girsanov,  $(X_t)$  vérifie, sous  $Q$ , l'équation :

$$X_t = \hat{X}_t + b \int_0^t X_u du, \text{ où } (\hat{X}_t) \text{ est un mouvement brownien réel.}$$

Ainsi :  $X_t = \int_0^t e^{b(t-s)} d\hat{X}_s$  ( $t \leq 1$ ), et, en particulier,  $X_1$  est, sous  $Q$ ,

une variable gaussienne, centrée, de variance  $\sigma_b^2 = \int_0^1 e^{2b(1-s)} ds = \frac{1}{2b}(e^{2b} - 1)$ .

Donc, si  $X$  désigne une variable gaussienne, centrée, réduite, on a :

$$I_{\alpha,b} = \exp(b) (E[\exp - (\alpha + \frac{b}{2}) \sigma_b^2 X^2])^2 \\ = b[b \operatorname{ch} b + 2\alpha \operatorname{sh} b]^{-1}, \text{ d'après (5), et la formule (4) est}$$

établie.

#### REFERENCES :

- [1] B. GAVEAU : Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimées sous-elliptiques sur certains groupes nilpotents. Acta Mathematica, Vol. 139, 1977.
- [2] P. LEVY : Wiener's Random Function, and other Laplacian Random Functions. Second Symposium of Berkeley. Probability and Statistics (1950), 171-186.
- [3] D. WILLIAMS : On a stopped Brownian motion formula of H.M. Taylor. Séminaire de Probabilités X, Lect. Notes in Maths 511, Springer (1976).
- [4] M. YOR : Les filtrations de certaines martingales du mouvement brownien dans  $\mathbb{R}^n$ . Séminaire de Probabilités XIII. Lect. Notes 721. Springer (1979).