

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MICHEL ÉMERY

Une propriété des temps prévisibles

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 316-317

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__316_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UNE PROPRIÉTÉ DES TEMPS PRÉVISIBLES

par N. Emery

On est parfois amené à s'intéresser aux processus définis sur un intervalle $[[0, T[$, où T est un temps prévisible. Lors d'une séance du séminaire de Strasbourg, P.A. Meyer a remarqué que l'étude de ces processus doit pouvoir se ramener, par changement de temps, à la théorie générale, où les processus sont définis sur \mathbb{R}_+ tout entier. Cette courte note en apporte une démonstration.

Pour la simplicité, on supposera que $(\Omega, \mathbb{F}, P, (\mathbb{F}_t)_{t \geq 0})$ vérifie les conditions habituelles (faute de quoi, il conviendrait de truffer l'énoncé suivant de p.s.).

THEOREME. Soit T un temps prévisible qui ne s'annule pas. Il existe un processus A continu, strictement croissant et adapté, tel que $A_0 = 0$ et $A_T = 1$.

La démonstration, qui rappelle le théorème d'Urysohn, fait un usage répété du théorème d'annonçabilité des temps prévisibles par des temps prévisibles, très légèrement renforcé :

LEMME. Soit $\varepsilon > 0$. Si S et S' sont deux temps prévisibles tels que $S < S'$, il existe une suite (R_n) de temps prévisibles telle que $R_0 = S$, $0 < R_{n+1} - R_n \leq \varepsilon$ et $\lim_n R_n = S'$.

Démonstration du lemme. Il existe une suite (T_n) de temps prévisibles qui annonce S' (voir Probabilités et Potentiel, 2^e édition, chap. 4, th. 77) ; appelons S_n le temps prévisible $n\varepsilon$. L'ensemble

$$H = \bigcup_{n \geq 0} [[T_n] \cup \bigcup_{n \geq 0} [[S_n] \cup [[S]]$$

est prévisible, ainsi que $K = H \cap [[S, S'[$. Pour chaque ω , la coupe $K(\omega)$ est un ensemble infini de $[S(\omega), S'(\omega)[$ sans autre point d'accumulation que $S'(\omega)$, rencontrant tout intervalle de longueur $> \varepsilon$. Pour obtenir la suite

(R_n) , il suffit d'énumérer les points de K par ordre croissant ; $R_0 = S$ est prévisible, ainsi que, pour tout n , le début R_{n+1} de l'ensemble prévisible fermé à droite $K \cap]R_n, S'[$. —

Démonstration du théorème. Soit ε_n une suite qui décroît vers zéro.

On applique le lemme à l'intervalle $]S, S'[=]0, T[$ avec $\varepsilon = \varepsilon_1$, et on obtient une suite (R_n) ; on définit alors le processus A sur

$$H_1 = \bigcup_n]R_n, R_{n+1}[\cup]T, \infty[$$

par $A_T = 1$, $A_{R_n} = 1 - 2^{-n}$.

Ensuite, on applique le lemme avec $\varepsilon = \varepsilon_2$ à chaque intervalle

$]R_n, R_{n+1}[$; on obtient des suites $(R_{n,m})_{m \geq 0}$ et on définit A sur

$$H_2 = \bigcup_{m,n}]R_{n,m}, R_{n,m+1}[\cup]T, \infty[$$

par $A_{R_{n,m}} = A_{R_n} + (1 - 2^{-m})(A_{R_{n+1}} - A_{R_n})$.

On recommence avec ε_3 sur les intervalles $]R_{n,m}, R_{n,m+1}[$, etc...

On définit ainsi A sur des ensembles prévisibles à coupes dénombrables H_p de plus en plus grands.

La limite $H = \bigcup_p H_p$ est partout dense dans $]0, T[$ car H_p rencontre tout intervalle de longueur plus grande que ε_p . Le processus A est strictement croissant sur H car il l'est sur chaque H_p , continu sur H car il prend toutes les valeurs dyadiques de $[0, 1]$. On peut donc prolonger A par continuité à $]0, T[$, et le processus continu strictement croissant obtenu est optionnel car, pour tout x dyadique de $[0, 1[$, l'ensemble $\{A \geq x\}$ est de la forme $]R, T[$ où R est un temps d'arrêt.

Il ne reste, si on le désire, qu'à prolonger A après T par $A_{T+t} = 1+t$. —