

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JIA-AN YAN

Sur une équation différentielle stochastique générale

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 305-315

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__305_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR UNE EQUATION DIFFERENTIELLE STOCHASTIQUE GENERALE

par YAN Jia-An *

Soit $(\Omega, \underline{F}, P)$ un espace probabilisé complet, muni d'une filtration $(\underline{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ satisfaisant aux conditions habituelles. On désigne par \mathbb{X} l'ensemble des processus càdlàg. adaptés, et par \mathbb{P} l'ensemble des processus prévisibles. Dans cette note, nous allons étudier l'équation différentielle stochastique du type suivant :

$$(*) \quad X_t = \mathfrak{f}(X)_t + \int_0^t F(X)_s dM_s, \quad ,$$

où M est une semimartingale, F est une application de \mathbb{X} dans \mathbb{P} telle que pour tout $X \in \mathbb{X}$, $F(X)$ soit intégrable par rapport à M au sens de Jacod [6], et \mathfrak{f} est une application de \mathbb{X} dans \mathbb{X} . Sous certaines conditions, on va montrer que l'équation (*) admet une solution et une seule dans \mathbb{X} , et étudier la stabilité des solutions. Cela généralise les résultats principaux d'Emery [3], tandis que la méthode que l'on utilise dans cette note est très inspirée d'Emery [3], et de Doléans-Dade et Meyer [2].

1. PRELIMINAIRES

Les trois définitions suivantes sont dues à Emery [3].

Définition 1. Soit X un processus optionnel. On pose pour $1 \leq p \leq +\infty$

$$\|X\|_{\mathfrak{S}^p} = \|X^*\|_{L^p}$$

où $X^* = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |X_t|$. On dit que X appartient à \mathfrak{S}^p si $\|X\|_{\mathfrak{S}^p} < +\infty$.

Evidemment, $\mathfrak{S}^p \cap \mathbb{X}$ est un espace de Banach.

Définition 2. Soit M une semimartingale admettant une décomposition $M = N + A$ (N martingale locale, A processus à variation finie). Pour $1 \leq p \leq +\infty$, posons

$$j_p(N, A) = \| [N, N]_{\infty}^{1/2} + \int_{0-}^{\infty} |dA_s| \|_{L^p}$$

$$\|M\|_{\mathfrak{H}^p} = \inf_{M=N+A} j_p(N, A).$$

On dit que M appartient à \mathfrak{H}^p si $\|M\|_{\mathfrak{H}^p} < +\infty$.

Définition 3. Soient $b > 0$ une constante et M une semimartingale. On dit que M appartient à $\mathfrak{D}(b)$ si $M \in \mathfrak{H}^{\infty}$, et s'il existe une suite finie de temps d'arrêt $0 = T_0 \leq T_1 \leq \dots \leq T_k$, telle que $M = M^{T_k}$ et que, pour $i=1, 2, \dots, k$ on ait

$$\|(M - M^{T_{i-1}})^{T_i} \|_{\mathfrak{H}^{\infty}} \leq b.$$

1. La nouvelle édition du livre de Dellacherie-Meyer écrit \mathfrak{R}^p et non \mathfrak{S}^p .
 (*) Institut de Recherche Mathématique, Academia Sinica, Pékin, Chine.

Ici, comme d'habitude, pour tout $X \in \mathfrak{X}$ et tout temps d'arrêt T , on pose

$$X^{T-} = X^T - \Delta X_{T-}^I \llbracket T, \infty \rrbracket$$

en convenant que $X_{0-} = 0$. Dans ce cas, on dit que la suite (T_0, \dots, T_k) découpe M en tranches plus petites que b .

Le lemme suivant est dû à Emery [3].

Lemme 1. Soit M une semimartingale.

1) Pour tout temps d'arrêt T , on a

$$\|M^T\|_{\mathfrak{H}^\infty} \leq \|M\|_{\mathfrak{H}^\infty}, \quad \|M^{T-}\|_{\mathfrak{H}^\infty} \leq 2\|M\|_{\mathfrak{H}^\infty}.$$

2) Si $M \in \mathcal{B}(b)$, alors pour tout temps d'arrêt T on a $M^{T-} \in \mathcal{B}(2b)$.

3) Pour tout $b > 0$, il existe des temps d'arrêt $T_n \uparrow \infty$ p.s., tels que pour chaque n , $M^{T_n-} \in \mathcal{B}(b)$.

Le lemme suivant, dû à Emery [3], a été généralisé par Meyer [4].

Lemme 2. Soit $1 \leq p < +\infty$. Si $M \in \mathfrak{H}^\infty$ et si H est un processus prévisible tel que $H \in \mathfrak{S}^p$, alors H est intégrable par rapport à M (au sens de Jacod [6]), et l'on a

$$\|H \cdot M\|_{\mathfrak{H}^p} \leq c_p \|H\|_{\mathfrak{S}^p} \|M\|_{\mathfrak{H}^\infty}$$

où c_p est une constante qui ne dépend que de p .

Définition 4. Soient $X \in \mathfrak{X}$, et (X^n) une suite d'éléments de \mathfrak{X} . On dit que (X^n) converge vers X prélocalement dans \mathfrak{S}^p (resp. \mathfrak{H}^p) s'il existe des temps d'arrêt $T_k \uparrow +\infty$ p.s., tels que

- i) pour tout k et tout n , X^{T_k-} et $(X^n)^{T_k-}$ sont dans \mathfrak{S}^p (resp. \mathfrak{H}^p);
- ii) pour tout k la suite $(X^n - X)^{T_k-}$ tend vers 0 dans \mathfrak{S}^p (resp. \mathfrak{H}^p).

Soient $X, Y \in \mathfrak{X}$; posons

$$d(X, Y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} E \left[\frac{\sup_{t \leq n} |X_t - Y_t|}{1 + \sup_{t \leq n} |X_t - Y_t|} \right]$$

Il est clair que la distance d définit sur \mathfrak{X} la topologie de la convergence uniforme sur tout compact en probabilité.

Le lemme suivant est dû à Emery [3].

Lemme 3. Soient $X \in \mathfrak{X}$ et (X^n) une suite d'éléments de \mathfrak{X} . Soit $1 \leq p < +\infty$.

Pour que $d(X^n, X) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, il faut et il suffit que, de toute sous-suite de (X^n) , on puisse à nouveau extraire une sous-suite qui converge vers X prélocalement dans \mathfrak{S}^p .

1. Note du Séminaire : en fait, Lengart vient de démontrer qu'un $H \in \mathfrak{S}^p$ prévisible est localement borné. On n'a donc pas besoin de l'i.s. de Jacod.

2. EXISTENCE ET UNICITE DES SOLUTIONS

Lemme 4. Soit M une semimartingale. Pour tout $b > 0$, il existe des temps d'arrêt $T_n \uparrow +\infty$ (avec $T_0 = 0$) tels que pour tout $n \geq 1$ on ait $T_n > T_{n-1}$ sur $\{T_{n-1} < \infty\}$ et que

$$\|M^{T_n} - M^{T_{n-1}}\|_{\mathbb{H}^\infty} \leq b.$$

Démonstration. Posons $\bar{A}_t = \sum_{0 < s \leq t} \Delta M_s I_{\{|\Delta M_s| > b/8\}}$. Soit $M - \bar{A} = N + B$ la décomposition canonique de la semimartingale spéciale $M - \bar{A}$. Il est bien connu que pour tout temps d'arrêt $T > 0$ on a $|\Delta N_T| \leq b/4$ p.s.. Notons $A = \bar{A} + B$, et définissons une suite de temps d'arrêt T_n par

$$T_0 = 0 \\ T_{n+1} = \inf\{t > T_n : [N, N]_t - [N, N]_{T_n} > 3b^2/16 \text{ ou } \int_{T_n}^t |dA_s| > b/4\}$$

On a alors $T_n \uparrow +\infty$ p.s. et $T_n > T_{n-1}$ sur $\{T_{n-1} < \infty\}$. Notons

$$M^{T_n} - M^{T_{n-1}} = (N^{T_n} - N^{T_{n-1}}) + (A^{T_n} - A^{T_{n-1}} - \Delta N_{T_n} I_{\llbracket T_n, \infty \rrbracket}) \\ = N^n + A^n$$

On a pour tout $n \geq 1$

$$[N^n, N^n]_\infty = [N, N]_{T_n} - [N, N]_{T_{n-1}} \leq \frac{3}{16} b^2 + \frac{1}{16} b^2 = \frac{b^2}{4} \\ \int_0^\infty |dA_s^n| = \int_{T_{n-1}}^{T_n} |dA_s| + |\Delta N_{T_n}| \leq \frac{b}{4} + \frac{b}{4} = \frac{b}{2}$$

Par conséquent on a (définition 2)

$$\|M^{T_n} - M^{T_{n-1}}\|_{\mathbb{H}^\infty} \leq j_\infty(N^n, A^n) \leq b. \quad \text{CQFD.}$$

Lemme 5. Soient M une semimartingale et H un processus prévisible qui est localement dans \mathcal{S}^p pour un certain $p \geq 1$. Alors H est intégrable par rapport à M au sens de Jacod [6].

Démonstration. Ce lemme se déduit aisément des lemmes 1 et 2.

Lemme 6. Soient M une semimartingale et F une application de \mathbb{X} dans \mathcal{F} . Si les conditions suivantes sont vérifiées

(i) Pour tout $X \in \mathbb{X}$ et pour tout temps d'arrêt T , on a

$$F(X) I_{\llbracket 0, T \rrbracket} = F(X^{T-}) I_{\llbracket 0, T \rrbracket}$$

(ii) Il existe $1 \leq p < +\infty$ et $a > 0$ tels que pour $X, Y \in \mathbb{X}$ on ait

$$\|F(X) - F(Y)\|_{\mathcal{S}^p} \leq a \|X - Y\|_{\mathcal{S}^p}$$

(iii) $F(0)$ est intégrable par rapport à M .

Alors pour tout $X \in \mathfrak{X}$ $F(X)$ est intégrable par rapport à M .

Démonstration. Soit $X \in \mathfrak{X}$. Posons

$T_n = \inf\{t : |X_t| \geq n\}$.
On a $X^{T_n-} \leq n$, et

$$\begin{aligned} \|(F(X)-F(0))I_{[0, T_n]} \|_{\mathfrak{S}^p} &= \|(F(X^{T_n-})-F(0))I_{[0, T_n]} \|_{\mathfrak{S}^p} \\ &\leq \|F(X^{T_n-})-F(0)\|_{\mathfrak{S}^p} \leq a \|X^{T_n-}\|_{\mathfrak{S}^p} \leq an \end{aligned}$$

Comme $T_n \uparrow +\infty$ p.s., cela signifie que $F(X)-F(0)$ est localement dans \mathfrak{S}^p .
D'après le lemme précédent, $F(X)-F(0)$ est intégrable par rapport à M . On conclut en vertu de la propriété de linéarité pour les intégrales stochastiques (cf. Jacod [6], chap. II, p. 55). CQFD

Lemme 7. Soit \mathfrak{F} une application de \mathfrak{X} dans \mathfrak{X} satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) Pour tout $X \in \mathfrak{X}$ et tout temps d'arrêt T , on a

$$\mathfrak{F}(X)I_{[0, T]} = \mathfrak{F}(X^{T-})I_{[0, T]} .$$

(ii) Il existe $1 \leq p < +\infty$ et $0 \leq \beta < 1$ tels que pour $X, Y \in \mathfrak{X}$ on ait

$$\|\mathfrak{F}(X)-\mathfrak{F}(Y)\|_{\mathfrak{S}^p} \leq \beta \|X-Y\|_{\mathfrak{S}^p} .$$

Si $X, Y \in \mathfrak{X}$ et T est un temps d'arrêt tel que l'on ait

$$X-Y = (\mathfrak{F}(X)-\mathfrak{F}(Y))^{T-} ,$$

on a alors $X=Y$.

Démonstration. Posons $T_n = \inf\{t : |X_t - Y_t| \geq n\}$. On a

$$\begin{aligned} \|X^{T_n-} - Y^{T_n-}\|_{\mathfrak{S}^p} &\leq n < +\infty ; \\ \|X^{T_n-} - Y^{T_n-}\|_{\mathfrak{S}^p} &= \|(\mathfrak{F}(X)-\mathfrak{F}(Y))^{T_n \wedge T-}\|_{\mathfrak{S}^p} \leq \|\mathfrak{F}(X)^{T_n-} - \mathfrak{F}(Y)^{T_n-}\|_{\mathfrak{S}^p} \\ &= \|(\mathfrak{F}(X^{T_n-}) - \mathfrak{F}(Y^{T_n-}))^{T_n-}\|_{\mathfrak{S}^p} \leq \|\mathfrak{F}(X^{T_n-}) - \mathfrak{F}(Y^{T_n-})\|_{\mathfrak{S}^p} \\ &\leq \beta \|X^{T_n-} - Y^{T_n-}\|_{\mathfrak{S}^p} \end{aligned}$$

d'où $\|X^{T_n-} - Y^{T_n-}\|_{\mathfrak{S}^p} = 0$, i.e. $X^{T_n-} = Y^{T_n-}$. Comme $T_n \uparrow +\infty$, on a $X=Y$. CQFD.

Notations. Dans toute la suite on désignera par $\mathfrak{L}_M^p(a)$ l'ensemble des applications de \mathfrak{X} dans \mathfrak{P} vérifiant les conditions (i)-(iii) du lemme 6, et par $\mathfrak{G}^p(\beta)$ l'ensemble des applications de \mathfrak{X} dans \mathfrak{X} vérifiant les conditions (i) et (ii) du lemme 7.

Lemme 8 . Soient $1 \leq p < \infty$, $a > 0$, $1 > \beta \geq 0$. Si $M \in \mathcal{H}^\infty$ est telle que $M_0 = 0$ et $\|M\|_{\mathcal{H}^\infty} < \frac{1-\beta}{ac_p}$ (c_p est la constante figurant dans le lemme 2), si $\mathfrak{F} \in \mathcal{G}^p(\beta)$ est telle que $\mathfrak{F}(0) \in \mathcal{S}^p$, et $F \in \mathcal{L}_M^p(a)$ est telle que $F(0) = 0$, l'équation

$$X = \mathfrak{F}(X) + F(X) \cdot M$$

admet une solution et une seule dans $\mathcal{S}^p \cap \mathfrak{X}$.

Démonstration. Soit $X \in \mathcal{S}^p \cap \mathfrak{X}$. Comme $F(0) = 0$, on a $F(X) \in \mathcal{S}^p \cap \mathfrak{X}$. Posons

$$W(X) = \mathfrak{F}(X) + F(X) \cdot M .$$

D'après le lemme 2, on a pour $X, Y \in \mathcal{S}^p \cap \mathfrak{X}$

$$\begin{aligned} \|W(X) - W(Y)\|_{\mathcal{S}^p} &\leq \|\mathfrak{F}(X) - \mathfrak{F}(Y)\|_{\mathcal{S}^p} + \|F(X) \cdot M - F(Y) \cdot M\|_{\mathcal{S}^p} \\ &\leq \beta \|X - Y\|_{\mathcal{S}^p} + c_p \|F(X) - F(Y)\|_{\mathcal{S}^p} \|M\|_{\mathcal{H}^\infty} \\ &\leq (\beta + ac_p \|M\|_{\mathcal{H}^\infty}) \|X - Y\|_{\mathcal{S}^p} . \end{aligned}$$

Comme $W(0) = \mathfrak{F}(0) \in \mathcal{S}^p \cap \mathfrak{X}$, on déduit de l'inégalité ci-dessus que pour tout $X \in \mathcal{S}^p \cap \mathfrak{X}$ on a $W(X) \in \mathcal{S}^p \cap \mathfrak{X}$. Comme on a $\beta + ac_p \|M\|_{\mathcal{H}^\infty} < 1$ par hypothèse, il est bien connu que l'équation $W(X) = X$ admet une solution et une seule dans $\mathcal{S}^p \cap \mathfrak{X}$.

CQFD.

Lemme 9. Soient $1 \leq p < \infty$, $a > 0$, $1 > \beta \geq 0$. Soient $M \in \mathcal{H}^\infty$ telle que $M_0 = 0$ et que $\|M\|_{\mathcal{H}^\infty} < \frac{1-\beta}{2ac_p}$, $\mathfrak{F} \in \mathcal{G}^p(\beta)$, $F \in \mathcal{L}_M^p(a)$. Alors l'équation

$$(9.1) \quad X = \mathfrak{F}(X) + F(X) \cdot M$$

admet une solution et une seule dans \mathfrak{X} .

Démonstration. Posons $\Psi(X) = \mathfrak{F}(X) + F(0) \cdot M$, $G(X) = F(X) - F(0)$. Alors $\Psi \in \mathcal{G}^p(\beta)$, $G \in \mathcal{L}_M^p(a)$ et $G(0) = 0$. L'équation (9.1) est équivalente à celle que voici

$$(9.2) \quad X = \Psi(X) + G(X) \cdot M .$$

Soit $T_n = \inf\{t : |\Psi(0)_t| \geq n\}$, on a $|\Psi(0)_{T_n^-}| \leq n$. Notons $\Psi^n(X) = \Psi(X)_{T_n^-}$, on a encore $\Psi^n \in \mathcal{G}^p(\beta)$, mais maintenant on a $\Psi^n(0) \in \mathcal{S}^p$ et $\|M_{T_n^-}\|_{\mathcal{H}^\infty} < \frac{1-\beta}{ac_p}$

(lemme 1). En vertu du lemme 8, l'équation

$$Z = \Psi^n(Z) + G(Z) \cdot M_{T_n^-}$$

admet une solution et une seule X^n dans $\mathcal{S}^p \cap \mathfrak{X}$. D'après le fait évident que $(H \cdot M)^{T^-} = H \cdot (M^{T^-}) = (H \Pi_{[0, T^-]}) \cdot M^{T^-}$ et les propriétés de Ψ et G , on voit aisément que l'on a

$$(X^n)_{T_n^-} = X^n, \quad (X^{n+1})_{T_n^-} = X^n$$

Donc il existe un unique élément X de \mathfrak{X} tel que pour tout n on ait $X_{T_n^-} = X^n$.

En conséquence, on a pour tout n

$$(9.3) \quad \begin{aligned} \bar{X}^{T_n^-} &= \psi(X^{T_n^-})^{T_n^-} + G(X^{T_n^-}) \cdot M^{T_n^-} \\ &= \psi(X)^{T_n^-} + (G(X) \cdot M)^{T_n^-} \end{aligned}$$

Comme $T_n \uparrow +\infty$ p.s., cela signifie que X est une solution de l'équation de l'équation (9.2).

Passons à l'unicité. Soit \bar{X} une autre solution de l'équation (9.2) appartenant à \mathfrak{X} . Posons

$$S_n = \inf\{t : |\bar{X}_t| \geq n\} \wedge T_n.$$

On a $|\bar{X}^{S_n^-}| \leq n$. Par conséquent $\bar{X}^{S_n^-}$ est l'unique solution dans $\mathfrak{S}^D \cap \mathfrak{X}$ de l'équation

$$Z = \psi(Z)^{S_n^-} + G(Z) \cdot M^{S_n^-}.$$

Mais d'après (9.3), $X^{S_n^-}$ en est une seconde. Donc on a $\bar{X}^{S_n^-} = X^{S_n^-}$; comme $S_n \uparrow +\infty$ on a $\bar{X} = X$, d'où l'unicité. CQFD

Le théorème suivant est le résultat principal de cette note.

Théorème 10. Soient $1 \leq p < +\infty$, $a > 0$, $1 > \beta \geq 0$. Si M est une semimartingale nulle en 0, et si $F \in \mathfrak{L}_M^D(a)$, $\mathfrak{F} \in \mathfrak{C}^D(\beta)$, l'équation

$$(10.1) \quad X = \mathfrak{F}(X) + F(X) \cdot M$$

admet une solution et une seule dans \mathfrak{X} .

Démonstration. Choisissons un b tel que $0 < b < \frac{1-\beta}{2ac_p}$. D'après le lemme 4, il existe des temps d'arrêt $T_n \uparrow +\infty$ ($T_0 = 0$) tels que pour tout $n \geq 1$ on ait $T_n > T_{n-1}$ sur $\{T_{n-1} < +\infty\}$ et $\|M^{T_n^-} - M^{T_{n-1}^-}\|_{\mathfrak{H}^\infty} \leq b$. Notons $\mathfrak{F}^1(X) = \mathfrak{F}(X)^{T_1^-}$.

D'après le lemme 9, l'équation

$$(10.2) \quad Z = \mathfrak{F}^1(Z) + F(Z) \cdot M^{T_1^-}$$

admet une seule solution X^1 dans \mathfrak{X} . Raisonnons par récurrence, en supposant que l'équation

$$(10.3) \quad Z = \mathfrak{F}(Z)^{T_n^-} + F(Z) \cdot M^{T_n^-}$$

admette une solution unique X^n dans \mathfrak{X} . Posons

$$(10.4) \quad \begin{aligned} M^{n+1} &= M^{T_{n+1}^-} - M^{T_n^-} \\ \mathfrak{F}^{n+1}(X) &= \mathfrak{F}(X)^{T_{n+1}^-} + F(X^n) \cdot M^{T_n^-} \end{aligned}$$

Alors $\mathfrak{F}^{n+1} \in \mathfrak{C}^D(\beta)$, $F \in \mathfrak{L}_{M^{n+1}}^D(a)$. D'après le lemme 9, l'équation

$$(10.5) \quad Z = \mathfrak{g}^{n+1}(Z) + F(Z) \cdot M^{n+1}$$

admet une solution unique X^{n+1} dans \mathfrak{X} . Il résulte de (10.3)-(10.5) et du fait que $(M^{n+1})^T_{n^-} = 0$, que

$$\begin{aligned} (X^{n+1})^T_{n^-} &= \mathfrak{g}^{n+1}(X^{n+1})^T_{n^-} = \mathfrak{g}(X^{n+1})^T_{n^-} + F(X^n) \cdot M^T_{n^-} \\ &= X^n + \mathfrak{g}((X^{n+1})^T_{n^-})^T_{n^-} - \mathfrak{g}(X^n)^T_{n^-}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a d'après le lemme 7

$$(10.6) \quad (X^{n+1})^T_{n^-} = X^n.$$

Enfin de (10.4)-(10.6) on déduit que

$$\begin{aligned} X^{n+1} &= \mathfrak{g}^{n+1}(X^{n+1}) + F(X^{n+1}) \cdot M^T_{n+1} - F(X^{n+1}) \cdot M^T_n \\ &= \mathfrak{g}^{n+1}(X^{n+1}) + F(X^{n+1}) \cdot M^T_{n+1} - F((X^{n+1})^T_{n^-}) \cdot M^T_n \\ &= \mathfrak{g}^{n+1}(X^{n+1}) - F(X^n) \cdot M^T_n + F(X^{n+1}) \cdot M^T_{n+1} \\ &= \mathfrak{g}(X^{n+1})^T_{n+1} + F(X^{n+1}) \cdot M^T_{n+1} \end{aligned}$$

ce qui montre que X^{n+1} est l'unique solution dans \mathfrak{X} de l'équation suivante

$$(10.7) \quad Z = \mathfrak{g}(Z)^T_{n+1} + F(Z) \cdot M^T_{n+1}$$

(l'unicité provient du fait que toute solution de (10.7) satisfait à (10.6), puis à (10.5)). On peut donc passer du rang n au rang $n+1$.

D'après (10.6), il existe un unique élément X de \mathfrak{X} tel que l'on ait, pour tout n , $X^n = X^T_{n^-}$. Par conséquent, on a pour tout n

$$\begin{aligned} X^T_{n^-} &= \mathfrak{g}(X^T_{n^-})^T_{n^-} + F(X^T_{n^-}) \cdot M^T_{n^-} \\ &= \mathfrak{g}(X)^T_{n^-} + F(X) \cdot M^T_{n^-} \\ &= (\mathfrak{g}(X) + F(X) \cdot M)^T_{n^-} \end{aligned}$$

Cela signifie que X est solution dans \mathfrak{X} de l'équation (10.1), et l'unicité est immédiate, comme dans le lemme 9. CQFD

3. STABILITE DES SOLUTIONS

Lemme 11. Soient $1 \leq p < +\infty$, $a > 0$, $1 > \beta \geq 0$, $b < \frac{1-\beta}{ac}$. Soient M une semimartingale nulle en 0, $\mathfrak{F} \in \mathcal{G}^p(\beta)$, $F \in \mathcal{L}_M^p(a)$, et X l'unique solution dans \mathfrak{X} de l'équation

$$X = \mathfrak{F}(X) + F(X) \cdot M.$$

Si

(i) $M \in \mathcal{B}(b)$ et la suite finie de temps d'arrêt (T_0, \dots, T_k) découpe M en tranches plus petites que b (définition 3),

(ii) $\mathfrak{F}(0) \stackrel{T_k^-}{\in} \mathcal{S}^p$, $F(0) \cdot M \in \mathcal{S}^p$

alors on a

$$(11.1) \quad \|X \stackrel{T_k^-}{\in} \mathcal{S}^p\| \leq \frac{1}{1-\beta-ac \cdot b} \frac{\alpha^k - 1}{\alpha - 1} (\|\mathfrak{F}(0) \stackrel{T_k^-}{\in} \mathcal{S}^p\| + \|F(0) \cdot M\|_{\mathcal{S}^p})$$

où

$$(11.2) \quad \alpha = \frac{2ac_p \|M\|_{\mathfrak{H}^\infty}}{1-\beta-ac \cdot b}$$

(si $\alpha=1$, on interprétera $(\alpha^k-1)/(\alpha-1)$ comme égal à k).

Démonstration. Soit $1 \leq i \leq k$. On a

$$(11.3) \quad \begin{aligned} X \stackrel{T_i^-}{\in} &= \mathfrak{F}(X) \stackrel{T_i^-}{\in} + F(X) \cdot M \stackrel{T_i^-}{\in} \\ &= \mathfrak{F}(X \stackrel{T_i^-}{\in}) \stackrel{T_i^-}{\in} + F(X \stackrel{T_i^-}{\in}) \cdot M \stackrel{T_i^-}{\in} \\ &= (\mathfrak{F}(X \stackrel{T_i^-}{\in}) - \mathfrak{F}(0)) \stackrel{T_i^-}{\in} + \mathfrak{F}(0) \stackrel{T_i^-}{\in} + F(0) \cdot M \stackrel{T_i^-}{\in} + \\ &\quad + (F(X \stackrel{T_i^-}{\in}) - F(0)) \cdot (M \stackrel{T_{i-1}^-}{\in}) \stackrel{T_i^-}{\in} + (F(X \stackrel{T_i^-}{\in}) - F(0)) \cdot (M - M \stackrel{T_{i-1}^-}{\in}) \stackrel{T_i^-}{\in} \end{aligned}$$

Comme

$$\|(M \stackrel{T_{i-1}^-}{\in}) \stackrel{T_i^-}{\in}\|_{\mathfrak{H}^\infty} = \|(M \stackrel{T_i^-}{\in}) \stackrel{T_{i-1}^-}{\in}\|_{\mathfrak{H}^\infty} \leq \|M \stackrel{T_i^-}{\in}\|_{\mathfrak{H}^\infty} \leq 2\|M\|_{\mathfrak{H}^\infty}$$

on a (en remarquant que $F(X) \cdot M^S = F(X^S) \cdot M^S$)

$$(11.4) \quad \begin{aligned} \|(F(X \stackrel{T_i^-}{\in}) - F(0)) \cdot (M \stackrel{T_{i-1}^-}{\in}) \stackrel{T_i^-}{\in}\|_{\mathcal{S}^p} &= \|(F(X \stackrel{T_{i-1}^-}{\in}) - F(0)) \cdot (M \stackrel{T_{i-1}^-}{\in}) \stackrel{T_i^-}{\in}\|_{\mathcal{S}^p} \\ &\leq 2ac_p \|X \stackrel{T_{i-1}^-}{\in}\|_{\mathcal{S}^p} \|M\|_{\mathfrak{H}^\infty}. \end{aligned}$$

En outre, on a

$$(11.5) \quad \|\mathfrak{F}(X \stackrel{T_i^-}{\in}) \stackrel{T_i^-}{\in} - \mathfrak{F}(0) \stackrel{T_i^-}{\in}\|_{\mathcal{S}^p} \leq \beta \|X \stackrel{T_i^-}{\in}\|_{\mathcal{S}^p}$$

$$(11.6) \quad \| (F(X^{T_i^-}) - F(0)) \cdot (M - M^{T_{i-1}^-})^{T_i^-} \|_{\mathfrak{S}^p} \leq \alpha c_p b \| X^{T_i^-} \|_{\mathfrak{S}^p}$$

$$(11.7) \quad \| \mathfrak{F}(0)^{T_i^-} \|_{\mathfrak{S}^p} \leq \| \mathfrak{F}(0)^{T_k^-} \|_{\mathfrak{S}^p}$$

$$(11.8) \quad \| F(0) \cdot M^{T_i^-} \|_{\mathfrak{S}^p} \leq \| F(0) \cdot M \|_{\mathfrak{S}^p} .$$

On déduit de (11.3)-(11.8) que l'on a

$$\| X^{T_i^-} \|_{\mathfrak{S}^p} \leq \frac{1}{1 - \beta - \alpha c_p b} (\| \mathfrak{F}(0)^{T_k^-} \|_{\mathfrak{S}^p} + \| F(0) \cdot M \|_{\mathfrak{S}^p}) + \alpha \| X^{T_{i-1}^-} \|_{\mathfrak{S}^p}$$

d'où par récurrence l'inégalité (11.1).

CQFD

Le théorème suivant est le théorème de stabilité des solutions.

Théorème 12. Soient $1 < p < +\infty$, $\alpha > 0$, $1 > \beta \geq 0$, M une semimartingale nulle en 0, $\mathfrak{F} \in \mathcal{G}^p(\beta)$, $F \in \mathcal{L}_M^p(a)$, et X l'unique élément de \mathfrak{X} tel que

$$(12.1) \quad X = \mathfrak{F}(X) + F(X) \cdot M .$$

Soient d'autre part, pour tout n , $\mathfrak{F}^n \in \mathcal{G}^p(\beta)$, $F^n \in \mathcal{L}_M^p(a)$, et X^n l'unique élément de \mathfrak{X} tel que

$$(12.2) \quad X^n = \mathfrak{F}^n(X^n) + F^n(X^n) \cdot M .$$

1) Si $\mathfrak{F}^n(X) - \mathfrak{F}(X)$ et $(F^n(X) - F(X)) \cdot M$ convergent vers 0 prélocalement dans \mathfrak{S}^p , alors $X^n - X$ converge vers 0 prélocalement dans \mathfrak{S}^p .

2) Si $\mathfrak{F}^n(X)$ et $F^n(X) \cdot M$ convergent vers $\mathfrak{F}(X)$ et $F(X) \cdot M$ respectivement, uniformément sur tout compact en probabilité, alors X^n converge vers X uniformément sur tout compact en probabilité.

Démonstration. 1) On a

$$X^n - X = \mathfrak{F}^n(X^n) - \mathfrak{F}(X) + (F^n(X^n) - F(X)) \cdot M .$$

Soit $Y \in \mathfrak{X}$. Posons

$$\Psi^n(Y) = \mathfrak{F}^n(Y+X) - \mathfrak{F}(X), \quad G^n(Y) = F^n(Y+X) - F(X) .$$

On a $\Psi^n \in \mathcal{G}^p(\beta)$, $G^n \in \mathcal{L}_M^p(a)$. Si l'on pose $Y^n = X^n - X$, Y^n est l'unique élément de \mathfrak{X} satisfaisant à

$$Y^n = \Psi^n(Y^n) + G^n(Y^n) \cdot M$$

Par hypothèse il existe des temps d'arrêt $S_k \uparrow +\infty$ tels que, pour chaque k , on ait

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| (\Psi^n(X) - \mathfrak{F}(X))^{S_k^-} \|_{\mathfrak{S}^p} = 0 ,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| F^n(X) - F(X) \cdot M^{S_k^-} \|_{\mathfrak{S}^D} = 0 .$$

D'autre part, choisissons un $b < \frac{1-\beta}{ac^p}$. En vertu du lemme 1, il existe des temps d'arrêt $U_k \uparrow +\infty$ tels que pour chaque k , on ait $M^{U_k^-} \in \mathcal{D}(b/2)$. Posons $T_k = S_k \wedge U_k$; on a d'après le lemme 1 $M^{T_k^-} \in \mathcal{D}(b)$. En remarquant

$$\psi^n(0) = \mathfrak{F}^n(X) - \mathfrak{F}(X) , \quad G^n(0) = F^n(X) - F(X)$$

on a pour tout k , d'après le lemme 11

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| (Y^n)^{T_k^-} \|_{\mathfrak{S}^D} = 0$$

ce qui signifie que $X^n - X$ converge vers 0 prélocalement dans \mathfrak{S}^D .

2). C'est une conséquence immédiate du point 1) ci-dessus et du lemme 3.

4. REMARQUES SUPPLEMENTAIRES

Ce paragraphe est inspiré de Protter [5].

Dans ce paragraphe on désigne par $\tilde{\mathfrak{X}}$ l'espace des semi-martingales. On va examiner l'équation suivante

$$X = \mathfrak{F}(X) + F(X) \cdot M$$

où M est une semi-martingale nulle en 0, \mathfrak{F} est une application de $\tilde{\mathfrak{X}}$ dans $\tilde{\mathfrak{X}}$, et F est une application de $\tilde{\mathfrak{X}}$ dans \mathfrak{F} .

Notations. 1) Soient $1 \leq p < +\infty$ et $0 \leq \beta < 1$. On désignera par $\tilde{C}^p(\beta)$ l'ensemble des applications \mathfrak{F} de $\tilde{\mathfrak{X}}$ dans $\tilde{\mathfrak{X}}$ vérifiant les conditions suivantes

(i) Pour tout $X \in \tilde{\mathfrak{X}}$ et tout temps d'arrêt T , on a

$$\mathfrak{F}(X) I_{\llbracket 0, T \rrbracket} = \mathfrak{F}(X^{T-}) I_{\llbracket 0, T \rrbracket} .$$

(ii) Pour $X, Y \in \tilde{\mathfrak{X}}$, on a

$$\| \mathfrak{F}(X) - \mathfrak{F}(Y) \|_{\mathfrak{M}^D} \leq \beta \| X - Y \|_{\mathfrak{M}^D} .$$

2) Soient $1 \leq p < +\infty$, $a > 0$, et M une semi-martingale nulle en 0. On désignera par $\tilde{\mathfrak{F}}_M^p(a)$ l'ensemble des applications F de $\tilde{\mathfrak{X}}$ dans \mathfrak{F} vérifiant les conditions suivantes :

(i) Pour tout $X \in \tilde{\mathfrak{X}}$ et tout temps d'arrêt T , on a

$$F(X) I_{\llbracket 0, T \rrbracket} = F(X^{T-}) I_{\llbracket 0, T \rrbracket} .$$

(ii) Pour $X, Y \in \tilde{\mathfrak{X}}$, on a

$$\| F(X) - F(Y) \|_{\mathfrak{S}^D} \leq a \| X - Y \|_{\mathfrak{M}^D}$$

(iii) $F(0)$ est intégrable par rapport à M .

Soit $M \in \mathcal{M}^p$ ($1 \leq p < \infty$) ; alors M est une semi-martingale spéciale, et nous désignons par $M=N+A$ sa décomposition canonique (i.e. N est une martingale locale, A est un processus prévisible nul en 0 à variation finie). Meyer a démontré dans [4] qu'il existe une constante $\alpha_p > 1$, ne dépendant que de p , telle que l'on ait

$$\|M\|_{\mathcal{M}^p} \leq j_p(N,A) \leq \alpha_p \|M\|_{\mathcal{M}^p}$$

où $j_p(N,A) = \|[N,N]_{\infty}^{1/2} + \int_0^{\infty} |dA_s|\|_{L^p}$. En conséquence, \mathcal{M}^p est un espace de Banach.

Par des raisonnements tout à fait analogues à ceux des deux paragraphes précédents, on obtient les deux théorèmes suivants :

Théorème 13. Soient $1 \leq p < \infty$, $a > 0$, $1 > \beta \geq 0$. Si M est une semi-martingale nulle en 0, et si $F \in \tilde{\mathcal{L}}_M^p(a)$, $\Phi \in \tilde{\mathcal{C}}^p(\beta)$, l'équation

$$X = \Phi(X) + F(X) \cdot M$$

admet une solution et une seule dans $\tilde{\mathcal{X}}$.

Théorème 14. Conservons les mêmes notations. Soient d'autre part, pour tout n , $\Phi^n \in \tilde{\mathcal{C}}^p(\beta)$, $F^n \in \tilde{\mathcal{L}}_M^p(a)$, et X^n l'unique solution de l'équation

$$X^n = \Phi^n(X^n) + F^n(X^n) \cdot M.$$

Si $\Phi^n(X) - \Phi(X)$ et $(F^n(X) - F(X)) \cdot M$ convergent vers 0 prélocalement dans \mathcal{M}^p , alors $X^n - X$ converge vers 0 prélocalement dans \mathcal{M}^p .

Enfin, il faut noter que les résultats obtenus peuvent être généralisés au cas d'équations (ou systèmes d'équations) du type

$$X_t = \Phi(X)_t + \sum_{i=1}^n \int_0^t F^i(X)_s dM_s^i.$$

Références

- [1] Doléans-Dade (C.). On the Existence and Unicity of Solutions of Stochastic Integral Equations. Z.W. 36, 1976, p. 93-101.
- [2] Doléans-Dade (C.) et Meyer (P.A.). Equations différentielles stochastiques. Sémin. Prob. XI, Lecture Notes in M. 581, 1977.
- [3] Emery (M.). Stabilité des solutions des équations différentielles stochastiques. Z.W. 41, 1978, p. 241-262.
- [4] Meyer (P.A.). Inégalités de normes pour les intégrales stochastiques. Sémin. Prob. XII, 1978, Lect. Notes in M. 649.
- [5] Protter (P.). H^p stability of solutions of stochastic differential equations. Z.W. 44, 1978, p. 337-352.
- [6] Jacod (J.). Calcul stochastique et problèmes de martingales. Lect. Notes in M. 714, Springer 1979.