SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JIA-AN YAN

Sur une équation différentielle stochastique générale

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 305-315
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__305_0>

SUR UNE EQUATION DIFFERENTIELLE STOCHASTIQUE GENERALE

par YAN Jia-An *

Soit $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ un espace probabilisé complet, muni d'une filtration $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ satisfaisant aux conditions habituelles. On désigne par $\mathfrak{X}$ l'ensemble des processus càdlàg. adaptés, et par $\mathcal{P}$ l'ensemble des processus prévisibles. Dans cette note, nous allons étudier l'équation différentielle stochastique du type suivant :

$$(*) \qquad X_t = \Phi(X)_t + \int_0^t F(X)_s dM_s \quad ,$$

où M est une semimartingale, F est une application de $\mathfrak{X}$ dans $\mathcal{P}$ telle que pour tout $X\in\mathfrak{X}$, F(X) soit intégrable par rapport à M au sens de Jacod [6], et Φ est une application de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{X}$. Sous certaines conditions, on va montrer que l'équation (*) admet une solution et une seule dans $\mathfrak{X}$, et étudier la stabilité des solutions. Cela généralise les résultats principaux d'Emery [3], tandis que la méthode que l'on utilise dans cette note est très inspirée d'Emery [3], et de Doléans-Dade et Meyer [2].

1. PRELIMINAIRES

Les trois définitions suivantes sont dues à Emery [3].

<u>Définition</u> 1. Soit X un processus optionnel. On pose pour $1\leqq p\leqq+\infty$

$$\|X\|_{\mathcal{S}^p} = \|X^*\|_{L^p}$$

où $X^*=\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|X_t|$. On dit que X appartient à $\mathcal{S}^p$ si $\|X\|_{\mathcal{S}^p} < +\infty$ [1].

Evidemment, $\mathcal{S}^p\cap\mathfrak{X}$ est un espace de Banach.

<u>Définition</u> 2 . Soit M une semimartingale admettant une décomposition $M=N+A$ (N martingale locale, A processus à variation finie). Pour $1\leqq p\leqq+\infty$, posons

$$j_p(N,A) = \| \, [N,N]_\infty^{1/2} + \int_{0-}^\infty |dA_s| \, \|_{L^p}$$

$$\|M\|_{\mathcal{H}^p} = \inf_{M=N+A} j_p(N,A) \ .$$

On dit que M appartient à $\mathcal{H}^p$ si $\|M\|_{\mathcal{H}^p} < +\infty$.

<u>Définition</u> 3 . Soient $b>0$ une constante et M une semimartingale. On dit que M appartient à $\mathcal{D}(b)$ si $M\in\mathcal{H}^\infty$, et s'il existe une suite finie de temps d'arrêt $0=T_0\leqq T_1\ldots\leqq T_k$, telle que $M=M^{T_k-}$ et que, pour $i=1,2..,k$ on ait

$$\|(M-M^{T_{i-1}})^{T_i-}\|_{\mathcal{H}^\infty} \leqq b \quad .$$

1. La nouvelle édition du livre de Dellacherie-Meyer écrit $\mathcal{R}^p$ et non $\mathcal{S}^p$.

(*) Institut de Recherche Mathématique, Academia Sinica, Pékin, Chine.

Ici, comme d'habitude, pour tout $X\in\mathfrak{X}$ et tout temps d'arrêt T, on pose

$$X^{T-} = X^T - \Delta X_T I_{[\![T,\infty [\![}$$

en convenant que $X_{0-}=0$. Dans ce cas, on dit que la suite $(T_0,\dots,T_k)$ découpe M en tranches plus petites que b.

Le lemme suivant est dû à Emery [3] .

Lemme 1. Soit M une semimartingale.

1) Pour tout temps d'arrêt T, on a

$$\|M^T\|_{\mathcal{H}^\infty} \leqq \|M\|_{\mathcal{H}^\infty} \quad , \quad \|M^{T-}\|_{\mathcal{H}^\infty} \leqq 2\|M\|_{\mathcal{H}^\infty} \quad .$$

2) Si $M\in\mathcal{D}(b)$, alors pour tout temps d'arrêt T on a $M^{T-}\in\mathcal{D}(2b)$.

3) Pour tout b>0, il existe des temps d'arrêt $T_n\uparrow\infty$ p.s., tels que pour chaque n , $M^{T_n-}\in\mathcal{D}(b)$.

Le lemme suivant, dû à Emery [3], a été généralisé par Meyer [4].

Lemme 2. Soit $1\leqq p<+\infty$. Si $M\in\mathcal{H}^\infty$ et si H est un processus prévisible tel que $H\in\mathcal{S}^p$, alors H est intégrable par rapport à M (au sens de Jacod [1] [6]), et l'on a

$$\|H\cdot M\|_{\mathcal{H}^p} \leqq c_p \|H\|_{\mathcal{S}^p} \|M\|_{\mathcal{H}^\infty}$$

où c_p est une constante qui ne dépend que de p.

Définition 4 . Soient $X\in\mathfrak{X}$, et (X^n) une suite d'éléments de $\mathfrak{X}$. On dit que (X^n) converge vers X prélocalement dans $\mathcal{S}^p$ (resp. $\mathcal{H}^p$) s'il existe des temps d'arrêt $T_k\uparrow+\infty$ p.s., tels que

i) pour tout k et tout n, X^{T_k-} et $(X^n)^{T_k-}$ sont dans $\mathcal{S}^p$ (resp. $\mathcal{H}^p$) ;

ii) pour tout k la suite $(X^n-X)^{T_k-}$ tend vers 0 dans $\mathcal{S}^p$ (resp. $\mathcal{H}^p$) .

Soient $X,Y\in\mathfrak{X}$; posons

$$d(X,Y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} E\left[\frac{\sup_{t\leqq n} |X_t-Y_t|}{1+\sup_{t\leqq n}|X_t-Y_t|} \right]$$

Il est clair que la distance d définit sur $\mathfrak{X}$ la topologie de la convergence uniforme sur tout compact en probabilité.

Le lemme suivant est dû à Emery [3].

Lemme 3. Soient $X\in\mathfrak{X}$ et (X^n) une suite d'éléments de $\mathfrak{X}$. Soit $1\leqq p<+\infty$. Pour que $d(X^n,X) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, il faut et il suffit que, de toute sous-suite de (X^n), on puisse à nouveau extraire une sous-suite qui converge vers X prélocalement dans $\mathcal{S}^p$.

1. Note du Séminaire : en fait, Lenglart vient de démontrer qu'un $H\in\mathcal{S}^p$ prévisible est localement borné. On n'a donc pas besoin de l'i.s. de Jacod.

2. EXISTENCE ET UNICITE DES SOLUTIONS

Lemme 4. Soit M une semimartingale. Pour tout $b>0$, il existe des temps d'arrêt $T_n \uparrow +\infty$ (avec $T_0=0$) tels que pour tout $n \geqq 1$ on ait $T_n > T_{n-1}$ sur $\{T_{n-1}<\infty\}$ et que

$$\| M^{T_n -} - M^{T_{n-1}} \|_{\mathcal{H}^\infty} \leqq b \ .$$

Démonstration. Posons $\bar{A}_t = \Sigma_{0<s\leqq t} \Delta M_s I_{\{|\Delta M_s|>b/8\}}$. Soit $M-\bar{A} = N+B$ la décomposition canonique de la semimartingale spéciale $M-\bar{A}$. Il est bien connu que pour tout temps d'arrêt $T>0$ on a $|\Delta N_T| \leqq b/4$ p.s.. Notons $A=\bar{A}+B$, et définissons une suite de temps d'arrêt T_n par

$$T_0=0$$
$$T_{n+1}=\inf\{t>T_n \ : \ [N,N]_t-[N,N]_{T_n} > 3b^2/16 \text{ ou } \int_{T_n}^t |dA_s| > b/4\}$$

On a alors $T_n \uparrow +\infty$ p.s. et $T_n > T_{n-1}$ sur $\{T_{n-1}<+\infty\}$. Notons

$$\begin{aligned} M^{T_n -} - M^{T_{n-1}} &= (N^{T_n} - N^{T_{n-1}}) + (A^{T_n -} - A^{T_{n-1}} - \Delta N_{T_n} I_{[\![T_n,\infty [\![}) \\ &= \qquad N^n \qquad + \qquad A^n \end{aligned}$$

On a pour tout $n \geqq 1$

$$[N^n,N^n]_\infty = [N,N]_{T_n} - [N,N]_{T_{n-1}} \leqq \frac{3}{16} b^2 + \frac{1}{16} b^2 = \frac{b^2}{4}$$

$$\int_0^\infty |dA_s^n| = \int_{T_{n-1}}^{T_n -} |dA_s| + |\Delta N_{T_n}| \leqq \frac{b}{4} + \frac{b}{4} = \frac{b}{2}$$

Par conséquent on a (définition 2)

$$\| M^{T_n -} - M^{T_{n-1}} \|_{\mathcal{H}^\infty} \leqq j_\infty(N^n,A^n) \leqq b \ .$$ CQFD .

Lemme 5 . Soient M une semimartingale et H un processus prévisible qui est localement dans $\mathcal{S}^p$ pour un certain $p \geqq 1$. Alors H est intégrable par rapport à M au sens de Jacod [6].

Démonstration. Ce lemme se déduit aisément des lemmes 1 et 2 .

Lemme 6 . Soient M une semimartingale et F une application de $\mathfrak{X}$ dans $\mathcal{P}$. Si les conditions suivantes sont vérifiées

(i) Pour tout $X \in \mathfrak{X}$ et pour tout temps d'arrêt T, on a

$$F(X) I_{]\!]0,T]\!]} = F(X^{T-}) I_{]\!]0,T]\!]}$$

(ii) Il existe $1 \leqq p < +\infty$ et $a>0$ tels que pour $X,Y \in \mathfrak{X}$ on ait

$$\| F(X)-F(Y) \|_{\mathcal{S}^p} \leqq a \| X-Y \|_{\mathcal{S}^p}$$

(iii) $F(0)$ est intégrable par rapport à M .

Alors pour tout $X\in\mathfrak{X}$ $F(X)$ est intégrable par rapport à M .

Démonstration. Soit $X\in\mathfrak{X}$. Posons

$$T_n=\inf\{\ t\ :\ |X_t|\geqq n\ \}\ .$$

On a $X^{T_n-}\leqq n$, et

$$\|(F(X)-F(0))I_{]\!]0,T_n]\!]}\|_{\mathcal{S}^p}=\|(F(X^{T_n-})-F(0))I_{]\!]0,T_n]\!]}\|_{\mathcal{S}^p}$$
$$\leqq\|F(X^{T_n-})-F(0)\|_{\mathcal{S}^p}\leqq a\|X^{T_n-}\|_{\mathcal{S}^p}\leqq an$$

Comme $T_n\uparrow+\infty$ p.s., cela signifie que $F(X)-F(0)$ est localement dans $\mathcal{S}^p$. D'après le lemme précédent, $F(X)-F(0)$ est intégrable par rapport à M. On conclut en vertu de la propriété de linéarité pour les intégrales stochastiques (cf. Jacod [6], chap. II, p. 55). CQFD

Lemme 7. Soit Φ une application de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{X}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) Pour tout $X\in\mathfrak{X}$ et tout temps d'arrêt T, on a

$$\Phi(X)I_{[\![0,T[\![}=\Phi(X^{T-})I_{[\![0,T[\![}\ .$$

(ii) Il existe $1\leqq p<+\infty$ et $0\leqq\beta<1$ tels que pour $X,Y\in\mathfrak{X}$ on ait

$$\|\Phi(X)-\Phi(Y)\|_{\mathcal{S}^p}\leqq\beta\|X-Y\|_{\mathcal{S}^p}\ .$$

Si $X,Y\in\mathfrak{X}$ et T est un temps d'arrêt tel que l'on ait

$$X-Y=(\Phi(X)-\Phi(Y))^{T-}\ ,$$

on a alors $X=Y$.

Démonstration. Posons $T_n=\inf\{t\ :\ |X_t-Y_t|\geqq n\}$. On a

$$\|X^{T_n-}-Y^{T_n-}\|_{\mathcal{S}^p}\leqq n<+\infty\ ;$$
$$\|X^{T_n-}-Y^{T_n-}\|_{\mathcal{S}^p}=\|(\Phi(X)-\Phi(Y))^{T_n\wedge T-}\|_{\mathcal{S}^p}\leqq\|\Phi(X)^{T_n-}-\Phi(Y)^{T_n-}\|_{\mathcal{S}^p}$$
$$=\|(\Phi(X^{T_n-})-\Phi(Y^{T_n-}))^{T_n-}\|_{\mathcal{S}^p}\leqq\|\Phi(X^{T_n-})-\Phi(Y^{T_n-})\|_{\mathcal{S}^p}$$
$$\leqq\beta\|X^{T_n-}-Y^{T_n-}\|_{\mathcal{S}^p}$$

d'où $\|X^{T_n-}-Y^{T_n-}\|_{\mathcal{S}^p}=0$, i.e. $X^{T_n-}=Y^{T_n-}$. Comme $T_n\uparrow+\infty$, on a $X=Y$. CQFD.

Notations. Dans toute la suite on désignera par $\mathfrak{L}^p_M(a)$ l'ensemble des applications de $\mathfrak{X}$ dans $\mathcal{P}$ vérifiant les conditions (i)-(iii) du lemme 6, et par $\mathcal{C}^p(\beta)$ l'ensemble des applications de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{X}$ vérifiant les conditions (i) et (ii) du lemme 7.

Lemme 8 . Soient $1 \leq p < \infty$, $a > 0$, $1 > \beta \geq 0$. Si $M \in \mathcal{H}^\infty$ est telle que $M_0 = 0$ et $\|M\|_{\mathcal{H}^\infty} < \frac{1-\beta}{ac_p}$ (c_p est la constante figurant dans le lemme 2), si $\Phi \in \mathcal{A}^p(\beta)$ est telle que $\Phi(0) \in \mathcal{S}^p$, et $F \in \mathcal{L}_M^p(a)$ est telle que $F(0)=0$, l'équation

$$X = \Phi(X) + F(X) \cdot M$$

admet une solution et une seule dans $\mathcal{S}^p \cap \mathfrak{X}$.

Démonstration. Soit $X \in \mathcal{S}^p \cap \mathfrak{X}$. Comme $F(0)=0$, on a $F(X) \in \mathcal{S}^p \cap \mathfrak{X}$. Posons

$$W(X) = \Phi(X) + F(X) \cdot M .$$

D'après le lemme 2, on a pour $X, Y \in \mathcal{S}^p \cap \mathfrak{X}$

$$\begin{aligned} \|W(X)-W(Y)\|_{\mathcal{S}^p} &\leq \|\Phi(X)-\Phi(Y)\|_{\mathcal{S}^p} + \|F(X) \cdot M - F(Y) \cdot M\|_{\mathcal{S}^p} \\ &\leq \beta \|X-Y\|_{\mathcal{S}^p} + c_p \|F(X)-F(Y)\|_{\mathcal{S}^p} \|M\|_{\mathcal{H}^\infty} \\ &\leq (\beta + ac_p \|M\|_{\mathcal{H}^\infty}) \|X-Y\|_{\mathcal{S}^p} . \end{aligned}$$

Comme $W(0) = \Phi(0) \in \mathcal{S}^p \cap \mathfrak{X}$, on déduit de l'inégalité ci-dessus que pour tout $X \in \mathcal{S}^p \cap \mathfrak{X}$ on a $W(X) \in \mathcal{S}^p \cap \mathfrak{X}$. Comme on a $\beta + ac_p \|M\|_{\mathcal{H}^\infty} < 1$ par hypothèse, il est bien connu que l'équation $W(X)=X$ admet une solution et une seule dans $\mathcal{S}^p \cap \mathfrak{X}$.

CQFD.

Lemme 9. Soient $1 \leq p < +\infty$, $a > 0$, $1 > \beta \geq 0$. Soient $M \in \mathcal{H}^\infty$ telle que $M_0 = 0$ et que $\|M\|_{\mathcal{H}^\infty} < \frac{1-\beta}{2ac_p}$, $\Phi \in \mathcal{A}^p(\beta)$, $F \in \mathcal{L}_M^p(a)$. Alors l'équation

$$X = \Phi(X) + F(X) \cdot M \tag{9.1}$$

admet une solution et une seule dans $\mathfrak{X}$.

Démonstration. Posons $\Psi(X) = \Phi(X) + F(0) \cdot M$, $G(X) = F(X) - F(0)$. Alors $\Psi \in \mathcal{A}^p(\beta)$, $G \in \mathcal{L}_M^p(a)$ et $G(0)=0$. L'équation (9.1) est équivalente à celle que voici

$$X = \Psi(X) + G(X) \cdot M . \tag{9.2}$$

Soit $T_n = \inf\{t : |\Psi(0)_t| \geq n\}$, on a $|\Psi(0)^{T_n^-}| \leq n$. Notons $\Psi^n(X) = \Psi(X)^{T_n^-}$, on a encore $\Psi^n \in \mathcal{A}^p(\beta)$, mais maintenant on a $\Psi^n(0) \in \mathcal{S}^p$ et $\|M^{T_n^-}\|_{\mathcal{H}^\infty} < \frac{1-\beta}{ac_p}$ (lemme 1). En vertu du lemme 8, l'équation

$$Z = \Psi^n(Z) + G(Z) \cdot M^{T_n^-}$$

admet une solution et une seule X^n dans $\mathcal{S}^p \cap \mathfrak{X}$. D'après le fait évident que $(H \cdot M)^{T-} = H \cdot (M^{T-}) = (H I_{[\![0,T[\![}) \cdot M^{T-}$ et les propriétés de Ψ et G, on voit aisément que l'on a

$$(X^n)^{T_n^-} = X^n , \quad (X^{n+1})^{T_n^-} = X^n$$

Donc il existe un unique élément X de $\mathfrak{X}$ tel que pour tout n on ait $X^{T_n^-} = X^n$.

En conséquence, on a pour tout n

$$(9.3) \qquad X^{T_n-} = \Psi(X^{T_n-})^{T_n-} + G(X^{T_n-}).M^{T_n-}$$
$$= \Psi(X)^{T_n-} + (G(X).M)^{T_n-} .$$

Comme $T_n \uparrow +\infty$ p.s., cela signifie que X est une solution de l'équation de l'équation (9.2).

Passons à l'unicité. Soit $\overline{X}$ une autre solution de l'équation (9.2) appartenant à $\mathfrak{X}$. Posons

$$S_n = \inf\{ t : |\overline{X}_t| \geqq n\} \wedge T_n .$$

On a $|\overline{X}^{S_n-}| \leqq n$. Par conséquent $\overline{X}^{S_n-}$ est l'unique solution dans $\mathcal{S}^p \cap \mathfrak{X}$ de l'équation

$$Z = \Psi(Z)^{S_n-} + G(Z).M^{S_n-} .$$

Mais d'après (9.3), X^{S_n-} en est une seconde. Donc on a $\overline{X}^{S_n-} = X^{S_n-}$; comme $S_n \uparrow +\infty$ on a $\overline{X}=X$, d'où l'unicité. CQFD

Le théorème suivant est le résultat principal de cette note.

Théorème 10 . Soient $1 \leqq p < +\infty$, $a>0$, $1>\beta \geqq 0$. Si M est une semimartingale nulle en 0, et si $F \in \mathcal{L}^p_M(a)$, $\Phi \in \mathcal{C}^p(\beta)$, l'équation

$$(10.1) \qquad X = \Phi(X) + F(X).M$$

admet une solution et une seule dans $\mathfrak{X}$.

Démonstration. Choisissons un b tel que $0<b< \frac{1-\beta}{2ac_p}$. D'après le lemme 4, il existe des temps d'arrêt $T_n \uparrow +\infty$ ($T_0=0$) tels que pour tout $n \geqq 1$ on ait $T_n > T_{n-1}$ sur $\{T_{n-1}<+\infty\}$ et $\|M^{T_n-} - M^{T_{n-1}}\|_{\mathcal{H}^\infty} \leqq b$. Notons $\Phi^1(X) = \Phi(X)^{T_1-}$. D'après le lemme 9, l'équation

$$(10.2) \qquad Z = \Phi^1(Z) + F(Z).M^{T_1-}$$

admet une seule solution X^1 dans $\mathfrak{X}$. Raisonnons par récurrence, en supposant que l'équation

$$(10.3) \qquad Z = \Phi(Z)^{T_n-} + F(Z).M^{T_n-}$$

admette une solution unique X^n dans $\mathfrak{X}$. Posons

$$(10.4) \qquad \begin{aligned} M^{n+1} &= M^{T_{n+1}-} - M^{T_n} \\ \Phi^{n+1}(X) &= \Phi(X)^{T_{n+1}-} + F(X^n).M^{T_n} \end{aligned}$$

Alors $\Phi^{n+1} \in \mathcal{C}^p(\beta)$, $F \in \mathcal{L}^p_{M^{n+1}}(a)$. D'après le lemme 9, l'équation

(10.5) $$Z = \Phi^{n+1}(Z)+F(Z)\cdot M^{n+1}$$

admet une solution unique X^{n+1} dans $\mathfrak{X}$. Il résulte de (10.3)-(10.5) et du fait que $(M^{n+1})^{T_n^-} = 0$, que

$$\begin{aligned}(X^{n+1})^{T_n^-} &= \Phi^{n+1}(X^{n+1})^{T_n^-} = \Phi(X^{n+1})^{T_n^-} + F(X^n)\cdot M^{T_n^-} \\ &= X^n + \Phi((X^{n+1})^{T_n^-})^{T_n^-} - \Phi(X^n)^{T_n^-} .\end{aligned}$$

Par conséquent, on a d'après le lemme 7

(10.6) $$(X^{n+1})^{T_n^-} = X^n .$$

Enfin de (10.4)-(10.6) on déduit que

$$\begin{aligned}X^{n+1} &= \Phi^{n+1}(X^{n+1})+F(X^{n+1})\cdot M^{T_{n+1}^-} - F(X^{n+1})\cdot M^{T_n} \\ &= \Phi^{n+1}(X^{n+1})+F(X^{n+1})\cdot M^{T_{n+1}^-} - F((X^{n+1})^{T_n^-})\cdot M^{T_n} \\ &= \Phi^{n+1}(X^{n+1})-F(X^n)\cdot M^{T_n} + F(X^{n+1})\cdot M^{T_{n+1}^-} \\ &= \Phi(X^{n+1})^{T_{n+1}^-} + F(X^{n+1})\cdot M^{T_{n+1}^-}\end{aligned}$$

ce qui montre que X^{n+1} est l'unique solution dans $\mathfrak{X}$ de l'équation suivante

(10.7) $$Z = \Phi(Z)^{T_{n+1}^-} + F(Z)\cdot M^{T_{n+1}^-}$$

(l'unicité provient du fait que toute solution de (10.7) satisfait à (10.6), puis à (10.5)). On peut donc passer du rang n au rang n+1.

D'après (10.6), il existe un unique élément X de $\mathfrak{X}$ tel que l'on ait, pour tout n, $X^n = X^{T_n^-}$. Par conséquent, on a pour tout n

$$\begin{aligned}X^{T_n^-} &= \Phi(X^{T_n^-})^{T_n^-} + F(X^{T_n^-})\cdot M^{T_n^-} \\ &= \Phi(X)^{T_n^-} + F(X)\cdot M^{T_n^-} \\ &= (\Phi(X)+F(X)\cdot M)^{T_n^-}\end{aligned}$$

Cela signifie que X est solution dans $\mathfrak{X}$ de l'équation (10.1), et l'unicité est immédiate, comme dans le lemme 9 . CQFD

3. STABILITE DES SOLUTIONS

Lemme 11. Soient $1 \leq p < +\infty$, $a > 0$, $1 > \beta \geq 0$, $b < \frac{1-\beta}{ac_p}$. Soient M une semimartingale nulle en 0, $\Phi \in \mathcal{O}^p(\beta)$, $F \in \mathcal{L}^p_M(a)$, et X l'unique solution dans $\mathfrak{X}$ de l'équation

$$X = \Phi(X) + F(X) \cdot M \quad .$$

Si

(i) $M \in \mathcal{B}(b)$ et la suite finie de temps d'arrêt $(T_0, \ldots, T_k)$ découpe M en tranches plus petites que b (définition 3),

(ii) $\Phi(0)^{T_k -} \in \mathcal{S}^p$, $F(0) \cdot M \in \mathcal{S}^p$

alors on a

$$\|X^{T_k -}\|_{\mathcal{S}^p} \leq \frac{1}{1-\beta-ac_p b} \; \frac{\alpha^k - 1}{\alpha - 1} (\; \|\Phi(0)^{T_k -}\|_{\mathcal{S}^p} + \|F(0) \cdot M\|_{\mathcal{S}^p} \;) \tag{11.1}$$

où

$$\alpha = \frac{2ac_p \|M\|_{\mathcal{H}^\infty}}{1-\beta-ac_p b} \tag{11.2}$$

(si $\alpha = 1$, on interprétera $(\alpha^k - 1)/(\alpha - 1)$ comme égal à k).

Démonstration. Soit $1 \leq i \leq k$. On a

$$\begin{aligned} X^{T_i -} &= \Phi(X)^{T_i -} + F(X) \cdot M^{T_i -} \\ &= \Phi(X^{T_i -})^{T_i -} + F(X^{T_i -}) \cdot M^{T_i -} \\ &= (\Phi(X^{T_i -}) - \Phi(0))^{T_i -} + \Phi(0)^{T_i -} + F(0) \cdot M^{T_i -} + \\ &\quad + (F(X^{T_i -}) - F(0)) \cdot (M^{T_{i-1}})^{T_i -} + (F(X^{T_i -}) - F(0)) \cdot (M - M^{T_{i-1}})^{T_i -} \end{aligned} \tag{11.3}$$

Comme

$$\|(M^{T_{i-1}})^{T_i -}\|_{\mathcal{H}^\infty} = \|(M^{T_i -})^{T_{i-1}}\|_{\mathcal{H}^\infty} \leq \|M^{T_i -}\|_{\mathcal{H}^\infty} \leq 2\|M\|_{\mathcal{H}^\infty}$$

on a (en remarquant que $F(X) . M^S = F(X^{S-}) . M^S$)

$$\begin{aligned} &\|(F(X^{T_i -}) - F(0)) \cdot (M^{T_{i-1}})^{T_i -}\|_{\mathcal{S}^p} \\ &= \|(F(X^{T_{i-1} -}) - F(0)) \cdot (M^{T_{i-1}})^{T_i -}\|_{\mathcal{S}^p} \\ &\leq 2ac_p \|X^{T_{i-1} -}\|_{\mathcal{S}^p} \|M\|_{\mathcal{H}^\infty} \quad . \end{aligned} \tag{11.4}$$

En outre, on a

$$\| \Phi(X^{T_i -})^{T_i -} - \Phi(0)^{T_i -} \|_{\mathcal{S}^p} \leq \beta \|X^{T_i -}\|_{\mathcal{S}^p} \tag{11.5}$$

(11.6) $\|(F(X^{T_i-})-F(0))\cdot(M-M^{T_{i-1}})^{T_i-}\|_{\mathcal{S}^p} \leqq ac_p b\|X^{T_i-}\|_{\mathcal{S}^p}$

(11.7) $\|\Phi(0)^{T_i-}\|_{\mathcal{S}^p} \leqq \|\Phi(0)^{T_k-}\|_{\mathcal{S}^p}$

(11.8) $\|F(0)\cdot M^{T_i-}\|_{\mathcal{S}^p} \leqq \|F(0)\cdot M\|_{\mathcal{S}^p}$.

On déduit de (11.3)-(11.8) que l'on a

$$\|X^{T_i-}\|_{\mathcal{S}^p} \leqq \frac{1}{1-\beta-ac_p b}\left(\|\Phi(0)^{T_k-}\|_{\mathcal{S}^p} + \|F(0)\cdot M\|_{\mathcal{S}^p} \right) + \alpha\|X^{T_{i-1}-}\|_{\mathcal{S}^p}$$

d'où par récurrence l'inégalité (11.1). CQFD

Le théorème suivant est le théorème de stabilité des solutions.

Théorème 12 . Soient $1\leqq p<+\infty$, $a>0$, $1>\beta\geqq 0$, M une semimartingale nulle en 0, $\Phi\in\mathcal{O}^p(\beta)$, $F\in\mathcal{L}^p_M(a)$, et X l'unique élément de $\mathfrak{X}$ tel que

(12.1) $X = \Phi(X) + F(X)\cdot M$.

Soient d'autre part, pour tout n , $\Phi^n\in\mathcal{O}^p(\beta)$, $F^n\in\mathcal{L}^p_M(a)$, et X^n l'unique élément de $\mathfrak{X}$ tel que

(12.2) $X^n = \Phi(X^n) + F^n(X^n)\cdot M$.

1) Si $\Phi^n(X)-\Phi(X)$ et $(F^n(X)-F(X))\cdot M$ convergent vers 0 prélocalement dans $\mathcal{S}^p$, alors X^n-X converge vers 0 prélocalement dans $\mathcal{S}^p$.

2) Si $\Phi^n(X)$ et $F^n(X)\cdot M$ convergent vers $\Phi(X)$ et $F(X)\cdot M$ respectivement, uniformément sur tout compact en probabilité, alors X^n converge vers X uniformément sur tout compact en probabilité.

Démonstration. 1) On a

$$X^n-X = \Phi^n(X^n) - \Phi(X) + (F^n(X^n)-F(X))\cdot M .$$

Soit $Y\in\mathfrak{X}$. Posons

$$\Psi^n(Y) = \Phi^n(Y+X)-\Phi(X) , \quad G^n(Y) = F^n(Y+X)-F(X) .$$

On a $\Psi^n\in\mathcal{O}^p(\beta)$, $G^n\in\mathcal{L}^p_M(a)$. Si l'on pose $Y^n=X^n-X$, Y^n est l'unique élément de $\mathfrak{X}$ satisfaisant à

$$Y^n = \Psi^n(Y^n) + G^n(Y^n)\cdot M$$

Par hypothèse il existe des temps d'arrêt $S_k\uparrow+\infty$ tels que, pour chaque k, on ait

$$\lim_{n\to\infty} \|(\Phi^n(X)-\Phi(X))^{S_k-}\|_{\mathcal{S}^p} = 0 ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \| F^n(X)-F(X))\cdot M^{S_k-} \|_{\mathcal{S}^p} = 0 .$$

D'autre part, choisissons un $b<\frac{1-\beta}{ac_p}$. En vertu du lemme 1, il existe des temps d'arrêt $U_k\uparrow+\infty$ tels que pour chaque k, on ait $M^{U_k-}\in \mathcal{B}(b/2)$. Posons $T_k=S_k\wedge U_k$; on a d'après le lemme 1 $M^{T_k-}\in \mathcal{B}(b)$. En remarquant

$$\Psi^n(0) = \Phi^n(X)-\Phi(X) \ , \quad G^n(0) = F^n(X)-F(X)$$

on a pour tout k, d'après le lemme 11

$$\lim_{n\to\infty} \|(Y^n)^{T_k-}\|_{\mathcal{S}^p} = 0$$

ce qui signifie que X^n-X converge vers 0 prélocalement dans $\mathcal{S}^p$.

2). C'est une conséquence immédiate du point 1) ci-dessus et du lemme 3.

4. REMARQUES SUPPLEMENTAIRES

Ce paragraphe est inspiré de Protter [5].

Dans ce paragraphe on désigne par $\tilde{\mathfrak{X}}$ l'espace des semi-martingales. On va examiner l'équation suivante

$$X = \Phi(X) + F(X)\cdot M$$

où M est une semi-martingale nulle en 0, Φ est une application de $\tilde{\mathfrak{X}}$ dans $\tilde{\mathfrak{X}}$, et F est une application de $\tilde{\mathfrak{X}}$ dans $\mathcal{P}$.

<u>Notations</u>. 1) Soient $1\leqq p<+\infty$ et $0\leqq\beta<1$. On désignera par $\tilde{\mathcal{C}}^p(\beta)$ l'ensemble des applications Φ de $\tilde{\mathfrak{X}}$ dans $\tilde{\mathfrak{X}}$ vérifiant les conditions suivantes

(i) Pour tout $X\in\tilde{\mathfrak{X}}$ et tout temps d'arrêt T, on a

$$\Phi(X)I_{[\![0,T[\![} = \Phi(X^{T-})I_{[\![0,T[\![} \ .$$

(ii) Pour $X,Y \in \tilde{\mathfrak{X}}$, on a

$$\|\Phi(X)-\Phi(Y)\|_{\mathcal{H}^p} \leqq \beta\|X-Y\|_{\mathcal{H}^p} \ .$$

2) Soient $1\leqq p<+\infty$, $a>0$, et M une semi-martingale nulle en 0. On désignera par $\tilde{\mathcal{F}}^p_M(a)$ l'ensemble des applications F de $\tilde{\mathfrak{X}}$ dans $\mathcal{P}$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) Pour tout $X\in\tilde{\mathfrak{X}}$ et tout temps d'arrêt T, on a

$$F(X)I_{]\!]0,T]\!]} = F(X^{T-})I_{]\!]0,T]\!]} \ .$$

(ii) Pour $X,Y \in \tilde{\mathfrak{X}}$, on a

$$\|F(X)-F(Y)\|_{\mathcal{S}^p} \leqq a\|X-Y\|_{\mathcal{H}^p}$$

(iii) F(0) est intégrable par rapport à M.

Soit $M \in \mathcal{H}^p$ ($1 \leqq p < \infty$) ; alors M est une semi-martingale spéciale, et nous désignons par $M=N+A$ sa décomposition canonique (i.e. N est une martingale locale, A est un processus prévisible nul en 0 à variation finie). Meyer a démontré dans [4] qu'il existe une constante $\alpha_p > 1$, ne dépendant que de p, telle que l'on ait

$$\|M\|_{\mathcal{H}^p} \leqq j_p(N,A) \leqq \alpha_p \|M\|_{\mathcal{H}^p}$$

où $j_p(N,A) = \| [N,N]_\infty^{1/2} + \int_0^\infty |dA_s| \|_{L^p}$. En conséquence, $\mathcal{H}^p$ est un espace de Banach.

Par des raisonnements tout à fait analogues à ceux des deux paragraphes précédents, on obtient les deux théorèmes suivants :

Théorème 13. Soient $1 \leqq p < +\infty$, $a > 0$, $1 > \beta \geqq 0$. Si M est une semi-martingale nulle en 0, et si $F \in \tilde{\mathcal{L}}^p_M(a)$, $\Phi \in \tilde{\mathcal{C}}^p(\beta)$, l'équation

$$X = \Phi(X) + F(X) \cdot M$$

admet une solution et une seule dans $\tilde{\mathfrak{X}}$.

Théorème 14. Conservons les mêmes notations. Soient d'autre part, pour tout n, $\Phi^n \in \tilde{C}^p(\beta)$, $F^n \in \tilde{\mathcal{L}}^p_M(a)$, et X^n l'unique solution de l'équation

$$X^n = \Phi^n(X^n) + F^n(X^n) \cdot M .$$

Si $\Phi^n(X) - \Phi(X)$ et $(F^n(X) - F(X)) \cdot M$ convergent vers 0 prélocalement dans $\mathcal{H}^p$, alors $X^n - X$ converge vers 0 prélocalement dans $\mathcal{H}^p$.

Enfin, il faut noter que les résultats obtenus peuvent être généralisés au cas d'équations (ou systèmes d'équations) du type

$$X_t = \Phi(X)_t + \sum_{i=1}^n \int_0^t F^i(X)_s dM^i_s .$$

Références

[1] Doléans-Dade (C.). On the Existence and Unicity of Solutions of Stochastic Integral Equations. Z.W. 36, 1976, p. 93-101.

[2] Doléans-Dade (C.) et Meyer (P.A.). Equations différentielles stochastiques. Sém. Prob. XI, Lecture Notes in M. 581, 1977.

[3] Emery (M.). Stabilité des solutions des équations différentielles stochastiques. Z.W. 41, 1978, p. 241-262.

[4] Meyer (P.A.). Inégalités de normes pour les intégrales stochastiques. Sém. Prob. XII, 1978, Lect. Notes in M. 649.

[5] Protter (P.). H^p stability of solutions of stochastic differential equations. Z.W. 44, 1978, p. 337-352.

[6] Jacod (J.). Calcul stochastique et problèmes de martingales. Lect. Notes in M. 714, Springer 1979.