SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MASATOSHI FUJISAKI

Contrôle stochastique continu et martingales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 256-281

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__256_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (http://portail.mathdoc.fr/SemProba/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CONTROLE STOCHASTIQUE CONTINU ET MARTINGALES

par Masatoshi FUJISAKI

INTRODUCTION Il y a quelques années, R.W.Rishel[14], M.H.A.Davis et P.Varaiya[2] ont démontré que pour qu'un paramètre de contrôle choisi dans une classe assez grande soit optimal, il faut et il suffit que l'éspérance conditionnelle de la fonction de perte soit une martingale uniformément intégrable.

Dans cet article nous développons cette situation et nous résolvons quelques problèmes associés au contrôle stochastique continu.

Les paragraphes 1 à 3 sont consacrés à la formulation du contrôle stochastique continu en terme de théorie des martingales, et les paragraphes 4,5 à quelques exemples.

Les résultats des paragraphes 1 à 4 sont relativement connus, mais nous les réformulons pour résoudre d'autre problèmes. Dans le paragraphe 5 nous obtenons, pour les deux cas (linéaire et nonlinéaire), l'unicité des lois optimales, dont les existences sont déjà vérifiées dans [6] et [10].

Je remercie ici P.A.Meyer de m'avoir accueilli à Strasbourg avec beaucoup de gentillesse pendant deux ans; je remercie aussi les membres du séminaire de probabilités de l'Université de Strasbourg pour des discussions très instructives. Mais surtout, je remercie ici M. Yor avec qui j'ai également eu de nombreuses discussions au sujet de cet article.

§1. PRELIMINAIRES, NOTATIONS, DEFINITIONS.

Soit T un temps fixé, fini. Soit C^n l'espace des fonctions continues sur $[0,T]$ à valeurs dans R^n, muni de la norme uniforme. Désignons un élément de C^n par w, et $\|w\|=\sup_{0\leq t\leq T}|w(t)|$. Soient $\underline{\underline{F}}$ la tribu borélienne de C^n et $(\underline{\underline{F}}_t)$, $0\leq t\leq T$, la famille croissante des sous tribus de $\underline{\underline{F}}$, telle que pour tout $t>0$ $\underline{\underline{F}}_t$ soit engendrée par les variables ($w(s)$; $s\leq t$). Soit U un ensemble borélien de R^l que nous appelons l'espace de contrôle. Posons

$$g_1(t,w,u) : [0,T]\times C^n\times U \to R^{n-m},$$

$$g_2(t,w,u) : [0,T]\times C^n\times U \to R^m,$$

$$\sigma_1(t,w) : [0,T]\times C^n \to R^{n-m}\otimes R^{n-m},$$

$\sigma_2(t,w) : [0,T]\times C^n \rightarrow R^m \otimes R^m,$

où $0\leq m\leq n$, $R^k \otimes R^k$ désigne l'espace des matrices carrées à k dimensions.

Nous considérons le système des équations différentielles stochastiques suivant avec condition initiale $Z(o) = z$, où z est un vecteur fixé de R^n:

$$(1.1) \quad \begin{cases} dZ_t = g(t,Z,u(t,Z))dt + \sigma(t,Z)dB_t, & 0<t\leq T, \\ Z_o = z, \end{cases}$$

où
$$Z_t = \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}, \quad B_t = \begin{pmatrix} B_t^1 \\ B_t^2 \end{pmatrix},$$

et X_t, $B_t^1 \in R^{n-m}$, Y_t, $B_t^2 \in R^m$. $B = (B_t), 0\leq t\leq T$, est un mouvement brownien à n dimension, $X = (X_t), 0\leq t\leq T$, est un processus inobservable que nous appelons l'état du système et $Y = (Y_t), 0\leq t\leq T$, est un processus observable que nous appelons "output". $u = u(t,Z)$ est le paramètre du contrôle: il sera défini rigoureusement plus loin. Nous allons considérer d'abord l'existence et l'unicité de la solution de cette équation (1.1). Ici l'existence signifie celle d'une solution faible et l'unicité signifie l'unicité en loi (voir [13] pour les définitions de la solution faible et l'unicité en loi).

Supposons que le coefficient g de (1.1) ait la forme

$$(1.2) \quad g(t,w,u) = b(t,w) + \sigma(t,w)\theta(t,w,u)$$

où b, σ, θ satisfont aux conditions suivantes:

(b.1) $b(t,w)$ est une application de $[0,T]\times C^n$ dans R^n, mesurable en (t,w),

(b.2) pour tout t, $b(t,w)$ est $\underline{\underline{F}}_t$ - mesurable,

(b.3) $|b(t,w)|^2 \leq k(1 + |w_t|^2)$, k étant une constante positive, et $|.|$ désigne la norme dans R^n.

$\sigma = \sigma(t,w)$ est une application de $[0,T]\times C^n$ dans $R^n \times R^n$ satisfaisant aux conditions (b.1) et (b.2). Quant à $\theta = \theta(t,w,u)$, il satisfait aux conditions suivantes:

(θ.1) $\theta(t,w,u)$ est une application de $[0,T]\times C^n \times U$ dans R^n, mesurable en (t,w,u),

(θ.2) pour tout t et u, $\theta(t,w,u)$ est $\underline{\underline{F}}_t$ - mesurable,

(θ.3) $|g(t,w,u)|^2 \leq k(1 + |w_t|^2 + |u|^2)$.

Nous commençons par considérer l'équation différentielle stochastique suivante:

(1.3) $dZ_t = b(t,Z)dt + \sigma(t,Z)dB_t, \quad Z_o = z.$

Hypothèse L'équation (1.3) a une solution faible et une seule(unicité en loi).

Les exemples suivants vérifient cette hypothèse.

Exemple 1. $b(t,w)$ et $\sigma(t,w)$ satisfont (b,1), (b.2) et (b,3) et la condition lipshitzienne suivante:

(b.4) $|b(t,w) - b(t,w')| \leq k \sup_{0 \leq s \leq t} |w_s - w'_s|$, où k peut dépendre de t.

Exemple 2. (Stroock et Varadhan) $b = b(t,x):[0,T] \times R^n \to R^n$, $\sigma = \sigma(t,x):[0,T] \times R^n \to R^n \otimes R^n$, autrement dit, $b(t,Z) = b(t,Z_t)$ et $\sigma(t,Z) = \sigma(t,Z_t)$. b et σ sont continues en x et bornées. De plus, $a(t,x) = \sigma'(t,x)\sigma(t,x)$ est uniformément définie positive, où σ' désigne la matrice transposée de σ.(Ultérieurement nous promettons que si A est une matrice quelconque alors A' désigne celle-ci transposée de A)

Comme d'habitude nous employons une méthode de Girsanov([9]) pour obtenir une solution faible de (1.1). Dans ce but, définissons la classe des contrôles. Soit $\underline{\underline{Y}}_t$ une sous tribu de $\underline{\underline{F}}_t$ engendrée par des ensembles $\{w = (w^1,w^2) \in C^{n-m} \times C^m;\ w^2_{s_1} \in \Gamma_1,\ w^2_{s_2} \in \Gamma_2, \dots, w^2_{s_n} \in \Gamma_n\}$,

où $0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_n \leq t$, $(\Gamma_i)_{1 \leq i \leq n}$, sont des ensemble boréliens dans R^m. Soit $s<t (0 \leq s < t \leq T)$ et soit $\underline{\underline{U}}^t_s$ l'ensemble des applications u ayant les trois propriétés suivantes:

(u.1) u est une application de $[s,t] \times C^n$ dans U, mesurable en (t,w),

(u,2) pour tout $r \in [s,t]$, $u(r,.)$ est $\underline{\underline{Y}}_r$ - mesurable,

(u.3) pour toute solution ν de (1.3), $E^\nu[\rho^t_s(u)] = 1$ p.s.ν ,

où $\rho^t_s(u)$ est défini par la formule:

(1.4) $\rho^t_s(u) = \exp\{\int^t_s \theta(r,Z,u(r,Z))dB^o_r - \frac{1}{2}\int^t_s |\theta|^2 dr\}$,

et $(\Omega,\Sigma,\nu,Z_t,B^o_t)$ est une solution de l'équation (1.3) et ensuite E [.] représente l'espérance par rapport à .

Définition 1.1 Nous appelons $\underline{\underline{U}}^t_s$ la <u>classe admissible des contrôles</u> sur [s,t]. Posons $\underline{\underline{U}}^T_0 = \underline{\underline{U}}$, nous appelons simplement cet ensemble la <u>classe admissible des contrôles</u>, et tout élément de $\underline{\underline{U}}$ un <u>contrôle admissible</u>.

Remarque 1.1 1) Si u' appartient à $\underline{\underline{U}}^s_r$ et u'' appartient à $\underline{\underline{U}}^t_s$ $(r \leq s \leq t)$ et si on définit $u(\tau,w) = u'(\tau,w)$ sur $[r,s)$ et $u(\tau,w) = u''(\tau,w)$ sur

$[s,t]$ alors $u(\tau,w)$ appatient à $\underline{\underline{U}}_r^t$.
2) Si u appartient à $\underline{\underline{U}}$ alors, pour tout intervalle $[s,t]$ contenu dans $[0,T]$, la restriction de u à $[s,t]$(nous désignons celle-ci par $u|_{[s,t]}$) appartient à $\underline{\underline{U}}_s^t$. (voir [2])

La proposition suivante est fondamentale puisqu'elle assure l'existence de la solution faible de l'équation (1.1) pour tout contrôle admissible.

<u>Proposition</u> 1.1 Pour tout u appartenant à $\underline{\underline{U}}$, il existe une et une seule solution faible (en loi) (Z,B) de (1.1) sur un espace probabilisé (Ω,Σ,μ). En général, μ dépend du paramètre u.

<u>Démonstration</u> Soit (Z,B^o) une solution de l'équation (1.3) sur un espace probabilisé (Ω,Σ,ν). Il résulte de (u.3) et du théorème de Girsanov que si on définit μ par

$$(1.5)\quad d\mu = \rho_0^T(u)d\nu \quad (\text{i.e. } \mu(A) = \int_A \rho_0^T(u)d\nu\,,\ A\varepsilon\Sigma\ ),$$

alors μ est aussi une mesure de probabilité sur (Ω,Σ) et

$$(1.6)\quad dB_t = dB_t^o - \theta(t,Z,u(t,Z))dt,\ B_o = 0,$$

est un mouvement brownien à n dimensions par rapport à cette nouvelle mesure μ. On sait par ailleurs que l'unicité en loi de l'équation (1.3) et la condition (u.3) entrainent unicité en loi de l'équation (1.1). (voir [13])

La <u>fonction</u> <u>de</u> <u>perte</u>. Soit $L(t,w,u)$ une application de $[0,T]\times C^n \times U$ à valeurs dans R_+(i.e. L est nonnégative) satisfaisant aux conditions suivantes:

(L.1) = (θ.1),
(L.2) = (θ.2),
(L.3) $L(t,w,u)$ est bornée uniformément en (t,w,u).

Soit $h(t,x)$ une application borélienne de $[0,T]\times R^n$ dans R_+(i.e.h est nonnégative) et de plus

(h.1) $h(t,x)$ est bornée uniformément en (t,x).

<u>Définition</u> 1.2 Posons

$$(1.7)\quad J(u) = E^{\mu}[\int_0^{\tau} L(t,Z,u(t,Z))dt + h(\tau,Z_{\tau})\,],$$

où $Z = (Z_t)$ est une solution de l'équation (1.1) sur un espace probbilisé (Ω,Σ,μ), E^{μ} désigne l'espérance par rapport à μ, et τ est le temps de sortie du processus Z d'un ensemble ouvert de R^n auquel le point initial appartient. Alors on dit que $J(u)$ est la <u>fonction</u> de perte.

Définition 1.3 On dit qu'un élément u^* appartenant à $\underline{\underline{U}}$ est optimal si

$$(1.8) \quad J(u^*) = \inf_{u \in \underline{\underline{U}}} J(u).$$

Remarque 1.2 1) Du fait de l'unicité en loi de l'équation (1.1), il est facile de voir que pour toute solution $Z = (Z_t)$ de (1.1) on a

$$(1.9) \quad E^{\mu}[\int_0^T L(t,Z,u(t,Z))dt + h(T,Z_T)] = E^{P^u}[\int_0^T L(t,w,u(t,w))dt + h(T,w_T)],$$

où P^u est la mesure de probabilité sur l'espace canonique $(C^n,\underline{\underline{F}})$ définie par $P^u(A) = \mu(Z\varepsilon A)$, $A\varepsilon\underline{\underline{F}}$. Si σ est une matrice positive alors il résulte de l'unicité en loi que P^u est uniquement déterminée par

$$(1.10) \quad P^u(A) = \int_A \alpha_0^T(u)dP, \text{ pour } A\varepsilon\underline{\underline{F}},$$

$$(1.11) \quad \alpha_0^T(u) = \exp\{\int_0^T \theta(t,w,u(t,w))d\hat{w}_t - \frac{1}{2}\int_0^T|\theta_t|^2dt\},$$

où P est la mesure sur $(C^n,\underline{\underline{F}})$ déterminée uniquement par la formule $\nu(Z\varepsilon A) = P(A)$, où (Z,ν) est une solution de l'équation (1.3), et $(\hat{w}_t,\underline{\underline{F}}_t,P)$ est un mouvement brownien défini par

$$(1.12) \quad d\hat{w}_t = \sigma^{-1}dw_t - \sigma^{-1}b(t,w)dt, \quad \hat{w}_0 = 0.$$

2) Soient u, $u'\varepsilon\underline{\underline{U}}$ et (Ω,Σ,μ,Z,B), $(\Omega',\Sigma',\mu',Z',B')$ des solutions arbitraires de (1.1) associées à u et u' respectivement. Soient P^u et $P^{u'}$ des distributions sur l'espace canonique $(C^n,\underline{\underline{F}})$associées à Z et Z'. Alors l'unicité en loi de l'équation (1.1) implique que P^u et $P^{u'}$ sont absolument continues. Par ailleurs, si σ est une matrice définie positive alors $P^u(P^{u'})$ est uniquement déterminée par (1.10).
3) En général le problème du contrôle stochastique est de chercher un contrôle optimal u^* qui minimise une fonction de perte $J(u)$ quelconque dans une classe suffisamment grande. A cause de la forme de $J(u)$ donnée en (1.7), il faut noter que l'on ne s'intéresse pas à la trajectoire elle-même de la solution de l'équation (1.1), mais à sa loi. Donc si l'on se restreint au problème de minimisation, on peut prendre une classe admissible plus général que $\underline{\underline{U}}$ dans la définition 1.1 . Par exemple, d'après [10] , on dit qu'un couple (u,B) est un système admissible sur un espace probabilisé $(\Omega,\Sigma,\mu,\Sigma_t)$ si $B = (B_t)$ est un mouvement brownien, $u = (u_t)$ est un processus optionnel et

uniformément borné sur cet espace. Dans ce cas il faut remarquer que le paramètre du contrôle u_t n'est pas nécessairement de forme de "feedback", c'est à dire, $u(t,\omega) = u(t,Z(\omega))$, $(t,\omega)\in[0,T]\times\Omega$, mais il est simplement adapté à la tribu Σ_t.

§2. LA FONCTION DE VALEUR ET LE PRINCIPE OPTIMAL

Dans ce paragraphe comme nous n'avons besoin que de la fonction de perte, nous pouvons nous placer dans le cas de l'espace canonique. D'après la remarque 1.2 (1.9), si $\tau = T$ alors

$$(2.1)\quad J(u) = E^u[\textstyle\int_0^T L(t,w,u(t,w))dt + h(T,w_T)] ,$$

où E^u désigne l'espérance relative à la mesure P^u définie par (1.10).

Hypothèse On suppose désormais que σ est une matrice définie positive.

Alors remarquons que P^u est donnée par la formule (1.10). Soit t arbitraire (fixé). Soient u, $v \in \underline{\underline{U}}$ et si on définit $u\overset{t}{\circ}v$ par

$$(2.2)\quad u\overset{t}{\circ}v(s,w) = \begin{cases} u(s,w) \text{ sur } [0,t) \\ v(s,w) \text{ sur } [t,T] \end{cases}$$

alors $u\overset{t}{\circ}v$ appartient à $\underline{\underline{U}}$ d'après la remarque 1.1. Supposons que les familles $(\underline{\underline{F}}_t)$ et $(\underline{\underline{Y}}_t)$, $0\leq t\leq T$, satisfont aux conditions habituelles, i.e. $(\underline{\underline{F}}_t)$ $((\underline{\underline{Y}}_t))$ est continue à droite et complète par rapport à P, et $\underline{\underline{F}}_o$ $(\underline{\underline{Y}}_o)$ est P - triviale.

Définition 2.1 Définissons $\psi(u\overset{t}{\circ}v)$ et $f(u\overset{t}{\circ}v)$ par les formules suivantes:

$$(2.3)\quad \psi(u\overset{t}{\circ}v) = E^{u\overset{t}{\circ}v}[\textstyle\int_t^T L(s,w,v(s,w))ds + h(T,w_T)|\, \underline{\underline{Y}}_t],$$

où l'espérance est relative à la mesure $dP^{u\overset{t}{\circ}v} = \alpha_0^T(u\overset{t}{\circ}v)dP$,

$$(2.4)\quad f(u\overset{t}{\circ}v) = E[\alpha_0^t(u)\alpha_t^T(v)\{\textstyle\int_t^T L(s,w,v(s,w))ds + h(T,w_T)\}|\underline{\underline{Y}}_t].$$

On a alors

Proposition 2.1

$$\psi(u\overset{t}{\circ}v) = \frac{f(u\overset{t}{\circ}v)}{E[\alpha_0^t(u)|\,\underline{\underline{Y}}_t]} \qquad \text{p.s.}(P).$$

Au lieu de $\psi(u\overset{t}{\circ}u)$, $f(u\overset{t}{\circ}u)$ nous écrirons $\psi_u(t)$, $f_u(t)$ respectivement. D'après l'hypothèse que $\underline{\underline{Y}}_o$ est P-triviale, si on met $t = 0$ dans (2.3) et (2.4) alors

(2.5) $\psi(u\overset{o}{\circ}v) = f(u\overset{o}{\circ}v) = J(v)$.

<u>Proposition</u> 2.2 Pour tout t, $f(u\overset{t}{\circ}v) \in L^1(C^n,\underline{\underline{F}},P)$.

<u>Démonstration</u> D'après (L.3) et (h,1), on a l'inégalité

$$E[|f(u\overset{t}{\circ}v)|] = E[\alpha_0^t(u)\alpha_t^T(v)\{\int_t^T L(s,w,v(s,w))dt + h(T,w_T)\}]$$

$$\leqq k\ E[\alpha_0^t(u)\alpha_t^T(v)] = k,$$ où k est une constante positive.

Il est bien connu que $L^1(C^n,\underline{\underline{F}},P)$ est un treillis complet par l'ordre partiel $\prec$ défini par: $f_1 \prec f_2 \Longleftrightarrow f_1(w) = f_2(w)$ p.s.(P). Notons que pour tout $t>0$, $u\in\underline{\underline{U}}_0^t$ il existe un élément f de $L^1(C^n,\underline{\underline{F}},P)$ tel que $f \leqq f(u\overset{t}{\circ}v)$ pour tout $v\in\underline{\underline{U}}_t^T$. En effet, pour tout (t,u,v), $f(u\overset{t}{\circ}v)\geqq 0$ puisque $L\geqq 0$ et $h\geqq 0$. Comme $L^1(C^n,\underline{\underline{F}},P)$ est un treillis et l'ensemble $\{f(u\overset{t}{\circ}v);\ v\in\underline{\underline{U}}_t^T\}$ est borné inférieurement on peut définir l'inf(1) de cet ensemble dans L^1. Par conséquent, pour tout $t\geqq 0$, $u\in\underline{\underline{U}}$, posons

(2.6) $$V_u(t) = \inf_{v\in\underline{\underline{U}}_t^T} f(u\overset{t}{\circ}v).$$

Nous allons définir une fonction qui jouera un rôle très important plus loin.

<u>Définition</u> 2.2 Posons pour tout $t\geqq 0$ et tout $u\in\underline{\underline{U}}_0^t$,

(2.7) $$W_u(t) = \inf_{v\in\underline{\underline{U}}_t^T} E^{u\overset{t}{\circ}v}[\int_t^T L(s,w,v(s,w))dt + h(T,w_T)|\underline{\underline{Y}}_t].$$

Alors on a

(2.8) $$W_u(t) = \inf_{v\in\underline{\underline{U}}_t^T} \psi(u\overset{t}{\circ}v) = \frac{\inf f(u\overset{t}{\circ}v)}{E[\alpha_0^t(u)|\underline{\underline{Y}}_t]} = \frac{V_u(t)}{E[\alpha_0^t(u)|\underline{\underline{Y}}_t]} \quad \text{p.s.(P)}.$$

Donc c'est une normalisation de $V_u(t)$. On dit que $W_u(t)$ est la <u>fonction de valeur</u>.

---

1) a) pour tout $v\in\underline{\underline{U}}_t^T$, $V_u(t) \leqq f(u\overset{t}{\circ}v)$ p.s.(P), b) pour tout $\varepsilon>0$, $M\in\underline{\underline{F}}$, il existe un élément $v\in\underline{\underline{U}}_t^T$ tel que $\int_M V_u(t)dP + \varepsilon > \int_M f(u\overset{t}{\circ}v)dP$.

D'après [4], l'inf $(=V_u(t))$ est $\underline{\underline{Y}}_t$ - adapté (plus précisément, $\underline{\underline{Y}}_t$ - optionnel puisque $(\underline{\underline{Y}}_t)$ est continue à droite).

Le théorème suivant est fondamental pour nos discussions ultérieures.

<u>Théorème</u> 2.3 (Rishel, Davis et Varaiya) Pour tout $t \geqq 0$, $h>0$, et $u \varepsilon \underline{\underline{U}}$, $W_u(t)$ vérifie le "principe optimal" suivant:

$$(2.9) \quad W_u(t) \leqq E^u[\int_t^{t+h} L(s,w,u(s,w))ds \,|\, \underline{\underline{Y}}_t] + E^u[W_u(t+h) \,|\, \underline{\underline{Y}}_t] \quad \text{p.s.}(P).$$

En particulier, pour que u soit <u>optimal</u> il faut et il suffit que

$$(2.10) \quad W_u(t) = E^u[\int_t^{t+h} L(s,w,u(s,w))ds \,|\, \underline{\underline{Y}}_t] + E^u[W_u(t+h) \,|\, \underline{\underline{Y}}_t] \quad \text{p.s.}(P).$$

Posons pour tout $t \geqq 0$, $u \varepsilon \underline{\underline{U}}$,

$$(2.11) \quad W_u'(t) = W_u(t) + E^u[\int_0^t L(s,w,u(s,w))ds \,|\, \underline{\underline{Y}}_t],$$

alors le théorème précédent entraine immédiatement l'énoncé suivant.

<u>Corollaire</u> 2.4 Pour que $u \varepsilon \underline{\underline{U}}$ soit <u>optimal</u> il faut et il suffit que $(W_u'(t), \underline{\underline{Y}}_t, P^u)$ soit une <u>martingale</u>. En général, pour <u>tout contrôle admissible</u> u, $(W_u'(t), \underline{\underline{Y}}_t, P^u)$ est une <u>sous-martingale</u>.

Il y a encore un autre critère pour que u soit optimal.

<u>Proposition</u> 2.5 Soit u un contrôle admissible. Les assertions suivantes sont équivalentes:

1) u est optimal,
2) pour tout $t \geqq 0$,

$$(2.12) \quad W_u(t) = E^u[\int_t^T L(s,w,u(s,w))ds + h(T,w_T) \,|\, \underline{\underline{Y}}_t] \quad \text{p.s.}(P),$$

3) pour tout $t \geqq 0$,

$$(2.13) \quad W_u'(t) = E^u[\int_0^T L(s,w,u(s,w))ds + h(T,w_T) \,|\, \underline{\underline{Y}}_t] \quad \text{p.s.}(P).$$

<u>Démonstration</u> Il est évident que (2) et (3) sont équivalentes d'après les définitions de $W_u(t)$ et $W_u'(t)$. Donc il suffit que l'on vérifie que (1) équivaut à (3). Supposons que (2.13) est vrai pour un élément u de $\underline{\underline{U}}$, alors $(W_u'(t), \underline{\underline{Y}}_t, P^u)$ est une martingale uniformément intégrable. Le corollaire 2.4 implique que u est optimal. Réciproquement, si u est optimal, alors d'après la définition 1.3,

$$J = E^u[\int_0^T L(s,w,u(s,w))ds + h(T,w_T)] = \inf_{v \varepsilon \underline{\underline{U}}} E^v[\int_0^T L(s,w,v(s,w))ds + h(T,w_T)].$$

Mais, $J \leqq \inf_{v \varepsilon \underline{\underline{U}}_t^T} E^{u \overset{t}{\circ} v}[\int_0^t L(s,w,u(s,w))ds + \int_t^T L(s,w,v(s,w))ds + h(T,w_T)]$

$$= E^u[\int_0^t L(s,w,u(s,w))ds] + \inf_{v\in \underline{\underline{U}}_t^T} E^{u\overset{t}{\circ}v}[\int_t^T L(s,w,v(s,w))ds +$$

$$h(T,w_T)] ,$$

où $u\overset{t}{\circ}v$ est un élément de $\underline{\underline{U}}$, défini en (2.2). Il résulte de la définition de $f(u\overset{t}{\circ}v)$ que

$$J \leq E^u[\int_0^t L(s,w,u(s,w))ds] + \inf_{v\in \underline{\underline{U}}_t^T} E[f(u\overset{t}{\circ}v)].$$

(voir (2.3), (2.4) et la proposition 2.1) D'après Davis et Varaiya [2], pour tout $\varepsilon > 0$, tout $t > 0$, il existe un élément v de $\underline{\underline{U}}_t^T$ tel que $f(u\overset{t}{\circ}v) < V_u(t) + \varepsilon$, p.s.(P)(1). Donc on a

$$J \leq E^u[\int_0^t L(s,w,u(s,w))ds] + E[V_u(t)] = E^u[\int_0^t L(s,w,u(s,w))ds]$$

$$+ E^u[W_u(t)].$$

Or, $J = J(u) = E^u[\int_0^T L(s,u)ds + h(T,w_T)] = E^u[\int_0^t L(s,u)ds] +$

$$+ E^u[\int_t^T L(s,u)ds + h(T,w_T)] = E^u[\int_0^t L(s,u)ds]$$

$$+ E^u[E^u[\int_t^T L(s,u)ds + h(T,w_T)|\underline{\underline{Y}}_t]].$$

Par conséquent, $E^u[W_u(t) - E^u[\int_t^T L(s,u)ds + h(T,w_T)|\underline{\underline{Y}}_t]] \geq 0$.

La définition de $W_u(t)$ implique que l'intérieur de l'intégrale est nul. Donc on a l'énoncé (2.12) (et par conséquent (2.13)).

§3. UNE FORMULATION EN TERMES DE THEORIE DES MARTINGALES

Supposons dorénavant que $\underline{\underline{Y}}_t = \underline{\underline{F}}_t$: Donc nos arguements ne concernent que le cas complètement observabable. Le cas général est un sujet pour le moment extrêment difficile sur lequel nous travaillerons ultérieurement. Rappelons que le système de contrôle et la fonction de perte sont toujours donnés par les formules suivantes:

$$(3.1) \begin{cases} dZ_t = g(t,Z,u(t,Z))dt + \sigma(t,Z)dB_t, & 0<t\leq T, \\ Z_0 = z, \end{cases}$$

$$(3.2) \quad J(u) = E^u[\int_0^T L(t,Z,u(t,Z))dt + h(T,w_T)] ,$$

où le coefficient g est du type $g(t,w,u) = b(t,w) + \sigma(t,w)\theta(t,w,u)$.

---

(1) Lorsque l'ensemble $\{f(u^t v);v\in \underline{\underline{U}}_t^T\}$ a cette propriété on dit qu'il est <u>relativement complet</u> (voir aussi[2]).

Pour le moment nous supposons vérifiées les même conditions que le paragraphe 1.

Nous allons, tout d'abord, modifier les résultats du paragraphe 2 (le théorème 2.3, le corollaire 2.4) auxquels on peut appliquer la théorie des martingales. Si dans (3.2) L ne dépend pas du paramètre de contrôle u, alors on peut vérifier aisément que $W'_u(t)$ donnée en (2.10) ne dépend pas non plus de u car $\underline{\underline{Y}}_t = \underline{\underline{F}}_t$. Par conséquent si on écrit celui-ci $W'(t)$ alors il résulte du corollaire 2.4 que u est optimal si et seulement si $(W'(t),\underline{\underline{F}}_t,P^u)$ est une martingale uniformément intégrable.

Dans le cas génégal où $W'_u(t)$ dépend de u, en utilisant la méthode analogue à celle de Pontriaguine on peut obtenir une martingale quelconque ayant la même propriété que $W'_u(t)$. Dans ce but nous introduisons un nouveau mouvement brownien à une dimension sur un espace probabilisé (Ω',Σ',μ') et nous définissons un nouveau processus $Z' = (Z'_t)$ sur l'espace probabilisé produit $(\bar{\Omega},\bar{\Sigma},\bar{\mu})$ où $\bar{\Omega}=\Omega\times\Omega'$, $\bar{\Sigma}=\Sigma\times\Sigma'$, $\bar{\mu}=\mu\times\mu'$ par la formule suivante:

$$(3.3)\quad dZ'_t = L(t,Z,u(t,Z))dt + dB'_t\ ,\quad Z'_0 = 0.$$

Ici, $Z = (Z_t)$ est une solution de l'équation (3.1) sur un espace probabilisé (Ω,Σ,μ) et u est un contrôle admissible(i.e. $u\in\underline{\underline{U}}$). Désignons par $\bar{Z}$ le couple des processus (Z,Z') sur l'espace $(\bar{\Omega},\bar{\Sigma},\bar{\mu})$ à valeurs dans R^{n+1}, alors $\bar{Z}$ est une solution de l'équation différentielle stochastique:

$$(3.4)\quad \begin{cases} d\bar{Z}_t = \bar{g}(t,\bar{Z},u(t,\bar{Z}))dt + \bar{\sigma}(t,\bar{Z})d\bar{B}_t \\ \bar{Z}_0 = \binom{z}{0} \end{cases}$$

où $\bar{B}_t = \binom{B_t}{B'_t}$ est un muvement brownien à n+1 dimensions, $\bar{g} = \binom{g}{L}$, $\bar{\sigma} = \begin{pmatrix}\sigma & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, et, naturellement, u ne dépend que de Z.

On désigne par C^{n+1} l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0,T]$ à valeurs dans R^{n+1} muni de la norme uniforme et par $\bar{\underline{\underline{F}}}$ la tribu borélienne de C^{n+1}. On désigne aussi par $(\bar{\underline{\underline{F}}}_t), 0\leq t\leq T$, la famille croissante des sous-tribu de $\bar{\underline{\underline{F}}}$ telles que chaque $\bar{\underline{\underline{F}}}_t$ est engendrée par des ensembles cylindriques jusqu'à l'instant t. Supposons de plus que , pour tout t, $\bar{\underline{\underline{F}}}_t$ vérifie les conditions habituelles par rapport à $\bar{P}$ qui est la mesure de probabilité sur $(C^{n+1},\bar{\underline{\underline{F}}})$ déterminée uniquement par la méthode analogue au paragraphe 1. Alors on a la

<u>Proposition</u> 3.1 Pour tout $u\in\underline{\underline{U}}$, l'équation (3.4) a une solution et une seule(toujours unicité en loi !). Sa loi $\bar{P}^u$ sur l'espace

canonique $(C^{n+1},\bar{\underline{\underline{F}}})$ est absolument continue relative à $\bar{P}$: sa densité sur $\bar{\underline{\underline{F}}}_t$ est donnée par

(3.5) $d\bar{P}^u/d\bar{P} = \bar{\alpha}_0^t(u) = \exp\{\int_0^t \bar{\theta}(s,w,u(s,w))d\hat{\bar{w}}_s - \frac{1}{2}\int_0^t|\bar{\theta}_s|^2ds\}$

où $\bar{\theta} = \binom{\theta}{L}$, $\bar{w} = \binom{w}{w'}$ est un élément de C^{n+1}, et $\hat{\bar{w}}$ est défini par

(3.6) $d\hat{\bar{w}}_t = \bar{\sigma}_t^{-1}(t,w)d\bar{w}_t - \bar{\sigma}_t^{-1}(t,w)\bar{b}(t,w)dt, \quad \hat{\bar{w}}_0 = 0.$

En effet l'énoncé résulte du fait que L est bornée et u appartient à $\underline{\underline{U}}$. Notons que $\hat{\bar{w}}_t$ est un mouvement brownien par rapport à $(\bar{\underline{\underline{F}}}_t,\bar{P})$ sur l'espace canonique $(C^{n+1},\bar{\underline{\underline{F}}})$. Pour la commodité nous écrirons encore $\bar{B}_t$ au lieu de $\hat{\bar{w}}_t - \int_0^t \bar{\theta}(s,w,u(s,w))ds$.(1)

De plus il faut remarquer que (3.2) peut s'écrire

(3.7) $J(u) = \bar{E}^u[\bar{h}(T,\bar{w}_T)] = E[\int_0^T L(s,w,u(s,w))ds + h(T,w_T)]$

où $\bar{E}^u$ exprime l'espérance par rapport à $\bar{P}^u$ et $\bar{h}$ est l'application de $[0,T]\times R^{n+1}$ dans R^1 telle que $\bar{h}(t,\bar{x}) = x_{n+1} + h(t,x)$ pour $\bar{x} = (x,x_{n+1})$, $x = (x_1,\dots,x_n)$, autrement dit,

(3.8) $\bar{h}(t,\bar{w}_t) = w'_t + h(t,w_t)$.

En fait, $\bar{E}^u[\bar{h}(T,\bar{w}_T)] = \bar{E}^u[w'_T + h(T,w_T)] = \bar{E}^u[\int_0^T L(s,w,u(s,w))ds$

$$+ B'_T + h(T,w_T)] = E^u[\int_0^T L(s,w,u(s,w))ds + h(T,w_T)],$$

puisque $(B'_t,\bar{\underline{\underline{F}}}_t,\bar{P}^u)$ est un mouvement brownien et que le reste ne dépend que de w.

<u>Définition</u> 3.1 Nous allons définir la <u>fonction de valeur</u> $\bar{W}_t$ dans cette situation (cf. [5]):

(3.9) $\bar{W}_t = \inf_{v\in\underline{\underline{U}}_t^T} \bar{E}^{u\overset{t}{\circ}v}[\bar{h}(T,\bar{w}_T)|\bar{\underline{\underline{F}}}_t]$.

Bien que l'application $\bar{h}$ ne soit pas non-négative, il est facile de vérifier que $\bar{E}^{u\overset{t}{\circ}v}[\bar{h}(T,\bar{w}_T)|\bar{\underline{\underline{F}}}_t]$ est bornée inférieurement par une fonction de $L^1(C^{n+1},\bar{\underline{\underline{F}}},\bar{P}^{u\overset{t}{\circ}v})$. Donc on peut bien définir $\bar{W}_t$ par (3.9). Il résulte des arguements précédents (voir §2) que, pour tout t,u, $\bar{W}_t$ est un élément de $L^1(C^{n+1},\bar{\underline{\underline{F}}},\bar{P}^u)$, $\bar{\underline{\underline{F}}}_t$ - adapté, et $\bar{W}_t$ ne dépend pas de contrôle u jusqu'à l'instant t. Par conséquent, on a des théorèmes

(1) Il faut noter que $\bar{B}_t$ est un mouvement brownien par rapport à $(\bar{\underline{\underline{F}}}_t,\bar{P}^u)$.

analogues à ceux du §2, ainsi:

Théorème 3.2 Les trois assertions suivantes sont équivalentes:

1) u^* est optimal dans $\underline{\underline{U}}$,

2) $(\overline{W}_t, \overline{\underline{\underline{F}}}_t, \overline{P}^{u^*})$ est une martingale uniformément intégrable,

3) pour tout $t \geq 0$,

(3.10) $\overline{W}_t = \overline{E}^{u^*}[\overline{h}(T,\overline{w}_T)|\overline{\underline{\underline{F}}}_t]$ p.s.$(\overline{P}^{u^*})$.

En général, pour tout $u \in \underline{\underline{U}}$, $(\overline{W}_t, \overline{\underline{\underline{F}}}_t, \overline{P}^u)$ est une sous-martingale.

Démonstration La démonstration est semblable aux démonstrations des théorème 2.3, corollaire 2.4, et proposition 2.5 en remplaçant L par 0, h(t,x) par $\overline{h}(t,\overline{x})$ dans la définition 1.2 de la fonction de perte.

Plus précisément on a une expression explicite de $\overline{W}_t$ de la manière suivante:

Proposition 3.3 Si u^* est optimal alors $\overline{W}_t$ vérifie l'égalité:

(3.11) $\overline{W}_t = W_t + \int_0^t L(s,w,u^*(s,w))ds + B'_t$ p.s.$(\overline{P})$,

où W_t est définie par (2.7) et $B' = (B'_t)$ est un mouvement brownien à une dimension relative à $(\overline{\underline{\underline{F}}}_t, \overline{P}^{u^*})$, défini par l'équation différentielle stochastique (3.4).

Démonstration Si $u^* = u^*(s,w)$ est optimal alors, d'après le théorème 3.2,

$$\begin{aligned}\overline{W}_t &= \overline{E}^{u^*}[\overline{h}(T,\overline{w}_T)|\overline{\underline{\underline{F}}}_t] = \overline{E}^{u^*}[w'_T + h(T,w_T)|\overline{\underline{\underline{F}}}_t] \\ &= \overline{E}^{u^*}[\int_0^T L(s,w,u^*(s,w))ds + h(T,w_T) + B'_T|\overline{\underline{\underline{F}}}_t] \\ &= E^{u^*}[\int_0^T L(s,w,u^*(s,w))ds + h(T,w_T)|\underline{\underline{F}}_t] + B'_t \\ &= W_t + \int_0^t L(s,w,u^*(s,w))ds + B'_t \qquad \text{p.s.}(\overline{P}).\end{aligned}$$

En effet, le terme $\int_0^T L(s,w,u^*)ds + h(T,w_T)$ ne dépend que $(\underline{\underline{F}}_t, P^{u^*})$ et (B'_t) est un mouvement brownien par rapport à $(\overline{\underline{\underline{F}}}_t, \overline{P}^{u^*})$. En utilisant la proposition 2.5, le résultat découle immédiatement.

Le théorème suivant assure que si u^* est optimal alors $\overline{W}_t$ est représentée comme intégrale stochastique relative au mouvement brownien $(\overline{B}_t)$ de l'équation (3.4) donc $\overline{W}_t$ est une martingale continue.

Soit $u \in \underline{\underline{U}}$, on a alors le

Théorème 3.4 Toute martingale M_t par rapport à $(\overline{\underline{\underline{F}}}_t, \overline{P}^u)$ est représentée comme intégrale stochastique relative au mouvement brownien $\overline{B} = (\overline{B}_t)$ de (3.4) associé à u. Autrement dit, il existe une fonction $\phi(t,w)$ prévisible par rapport à $(\overline{\underline{\underline{F}}}_t)$ telle que $\overline{E}^u[\int_0^T|\phi_s|^2 ds] < \infty$ et

$$(3.12)\quad M_t = M_0 + \int_0^t (\phi_s, d\bar{B}_s) = M_0 + \sum_{i=1}^{n+1} \int_0^t \phi_s^i d\bar{B}_s^i \quad \text{p.s.}(\bar{P}).$$

Dans ce cas là on dit que $\bar{B} = (\bar{B}_t)$ a la <u>propriété de représentation prévisible</u> par rapport à $(\bar{\underline{F}}_t, \bar{P})$. En génégal, soit (Ω, Σ, μ) un espace probabilisé et (Σ_t) une famille croissante des sous-tribu vérifiant les conditions habituelles.

<u>Définition</u> 3.2 (Jacod[11], Yor[16]) On dit qu'une martingale $N = (N_t)$ a la <u>propriété de représentation prévisible</u> par rapport à (Σ_t, μ) si toute (Σ_t, μ) - martingale réelle bornée $M = (M_t)$ peut s'écrire:

$$(3.13)\quad M_t = M_0 + \int_0^t (\phi_s, dN_s) \quad \text{p.s.}(\mu),$$

où ϕ est un processus (Σ_t) - prévisible, convenablement intégrable.

Le théorème 3.4 résulte du lemme bien connu suivant (voir [11], [12]):

<u>Lemme</u> 3.5 Soit N une martingale vérifiant les conditions de la définition 3.2. Soit ν une mesure absolument continue par rapport à μ telle que $d\nu/d\mu|_{\Sigma_t} = L_t$. Si la crochet $\langle N, L\rangle$ existe, alors

$$(3.14)\quad \tilde{N}_t = N_t - \int_0^t 1/L_{s-}\, d\langle N, L\rangle_s$$

est une martingale ayant la propriété de représentation prévisible par rapport à (Σ_t, ν).

<u>Démonstration</u> de <u>Théorème</u> 3.4 Admettant le lemme 3.5, l'énoncé est immédiat. En effet, il suffit de prendre $(\Omega, \Sigma, \mu) = (C^{n+1}, \bar{\underline{F}}, \bar{P})$, $N_t = \hat{\bar{w}}_t$, où $\hat{\bar{w}}_t$ est le mouvement brownien de (3.6) par rapport à $(\bar{\underline{F}}_t, \bar{P})$, $\nu = \bar{P}^u$, et $L_t = d\bar{P}^u/d\bar{P}|_{\bar{\underline{F}}_t} = \bar{\alpha}_0^t(u)$. Alors, d'après le lemme 3.5, $\tilde{N}_t$

$$= \hat{\bar{w}}_t - \int_0^t \bar{\alpha}_0^s(u)^{-1}\, \bar{\alpha}_0^s(u)\bar{\theta}_s ds = \hat{\bar{w}}_t - \int_0^t \bar{\theta}_s ds = \bar{B}_t \quad \text{a la propriété de}$$

représentation prévisible par rapport à $(\bar{\underline{F}}_t, \bar{P}^u)$.

Le théorème 3.2 et 3.4 entrainent immédiatement un résultat relative à $\bar{W}_t$.

<u>Proposition</u> 3.6 Soit u^* un contrôle optimal. Alors il existe ϕ^* processus $(\bar{\underline{F}}_t)$ - prévisible tel que

$$(3.15)\quad \bar{W}_t = W_0 + \int_0^t (\phi_s^*, d\bar{B}_s^*) \quad \text{p.s.}(\bar{P}),$$

où $\bar{B}^* = (\bar{B}_s^*)$ est le mouvement brownien de (3.4) associé à u^*.

<u>Remarque</u> 3.1 $\bar{P}^u = \bar{P}^v \Rightarrow P^u = P^v$ (voir les définitions (1.10),(3.5)). Ceci découle de ce que pour tout $A\varepsilon\underline{\underline{F}}$,

$$\bar{P}^u(AxC^1) = \bar{P}^v(AxC^1) \text{ où } (C^{n+1},\bar{\underline{\underline{F}}}) = (C^n x C^1, \underline{\underline{F}} x \underline{\underline{F}}').$$

Or, $\bar{P}^u(AxC^1) = \int_{AxC^1} d\bar{P}^u/d\bar{P}\cdot d\bar{P}(w,w') = \int_{AxC^1} d\bar{P}^u/d\bar{P}\cdot dPxdP'(w,w')$

$$= \int_{AxC^1} dP^u(w)\,\alpha_0^T(u,w,w')dP'(w') = \int_A dP^u(w) = P^u(A),$$

où $\alpha_0^T(u,w,w') = \exp\{\int_0^t L(s,w,u(s,w))dw' - \frac{1}{2}\int_0^t |L_s|^2 ds$.

De même, on a $\bar{P}^v(AxC^1) = P^v(A)$. Par conséquent il est immédiat que pour tout $A\varepsilon\underline{\underline{F}}$, $P^u(A) = P^v(A)$.

§4. APPLICATION AU CAS MARKOVIEN

Dans ce paragraphe on se donne une équation différentielle stochastique du type markovien comme système de contrôle.

$$(4.1)\quad \begin{cases} dX_t = g(t,X_t,u(t,X_t))dt + \sigma(t,X_t)dB_t, & 0<t\leq T, \\ X_0 = x\varepsilon R^n, \end{cases}$$

où $B = (B_t), 0\leq t\leq T$, est un mouvement brownien à n dimensions. Soit U un ensemble ouvert dans R^l(fixé). Les notations suivantes seront utilisées tout au long de ce paragraphe: T est un temps fixé (fini); $Q^o = (0,T) \times R^n$; $\underline{\underline{C}}^j(D)$ est la classe des fonctions continues admettant des dérivées partielles continues de tous ordres $\leq$ j sur D, D étant un ensemble ouvert dans R^n; pour $Q\subset R^{n+1}$, $\underline{\underline{C}}^{1,2}(Q)$ est l'ensemble des $\psi(t,x)$ telles que $\partial\psi/\partial t$, $\partial\psi/\partial x_i$, $\partial^2\psi/\partial x_i\partial x_j$, i,j=1,...,n, sont continues sur Q; $\underline{\underline{C}}_p^{1,2}(Q)$ est l'ensemble des $\psi(t,x)$ appartenant à $\underline{\underline{C}}^{1,2}(Q)$, satisfaisant en outre à la condition polynomiale; $|\psi(t,x)|\leq c(1+|x|^k)$ pour tout $(t,x)\varepsilon Q$, où c et k sont deux constantes positives. On suppose que les coefficients de (4.1) satisfont aux conditions suivantes:

A) $g = g(t,x,u)$: $\bar{Q}^o x\, U \to R^n$, $g\varepsilon\underline{\underline{C}}^1(\bar{Q}^o x\, U)$, $|g(t,0,0)|\leq c$, $|g_x| + |g_u| \leq c$, où $g_x = (\partial g/\partial x_i), 1\leq i\leq n$, $g_u = (\partial g/\partial u_j), 1\leq j\leq l$,

B) $\sigma = \sigma(t,x)$: $Q \to R^n \times R^n$(matrice carrée), $\sigma\varepsilon\underline{\underline{C}}^1(\bar{Q}^o)$, $|\sigma(t,0)| \leq c$, $|\sigma_x| \leq c$, est une matrice définie positive.

Soit Ψ la classe des fonctions $\psi = \psi(t,x)$:

(4.2) $\Psi = \{\psi = \psi(t,x); \overline{Q}^o \to U,\ \psi$ est borélienne $\}$.

Rappelons la définition 1.1 de la classe admissible des contrôles $\underline{\underline{U}}$ et posons

(4.3) $\underline{\underline{U}}' = \{u = u(t,w) \varepsilon \underline{\underline{U}};\ [0,T] \times C^n \to U$, il existe un élément ψ de Ψ tel que pour tout $(t,w), u(t,w) = \psi(t,w_t)\}$.

<u>Proposition</u> 4.1 Sous les conditions A) et B), pour tout élément $u \varepsilon \underline{\underline{U}}'$ il existe une solution faible de l'équation (4.1) et une seule(toujours en loi !). De plus il est bien connu que cette solution est un processus de Markov possédant une densité de probabilité de transition.

Soient L et h des applications de $\overline{Q}^o \times U$ dans R_+ et de $\overline{Q}^o$ dans R_+ respectivement, satisfaisant aux conditions suivantes:

C) $L(t,x,u) \leq c(1 + |x|^2 + |u|^2)$,

D) $h(t,x) \leq c(1 + |x|^2)$,

où c est une constante positive.

<u>Remarque</u> 4.1 Bien que dans ce cas L et h ne soient pas bornées, si on réstreint la classe admissible $\underline{\underline{U}}$ des contrôles , alors on peut avoir les même résultats à propos des $W_u(t)$, $\overline{W}(t)$, e.t.c.,que §2 et §3. En effet, prenons $\underline{\underline{U}}^* = \{ u \varepsilon \underline{\underline{U}};\ |u(t,w)|^2 \leq k(1 + |w_t|^2)$, pour tout $(t,w)\}$, k étant une constante positive, alors l'ensemble $\{ f(u \overset{t}{\circ} v);\ v \varepsilon \underline{\underline{U}}^{*T}_t \}$ est relativement complet et $\overline{W}(t)$ sera bien définie (voir (3.9)). Donc nous écrirons encore $\underline{\underline{U}}$ au lieu de $\underline{\underline{U}}^*$pour la classe admissible des contrôles.

<u>Définition</u> 4.1 La <u>fonction</u> <u>de</u> <u>perte</u> est donnée par

(4.4) $J(u) = E[\int_0^T L(s,X_s,u(s,X_s))ds + h(T,X_T)]$,

où $X = (X_t), 0 \leq t \leq T$, est une solution de (4.1) sur un espace probabilisé quelconque (Ω,Σ,μ) et l'espérance est prise pour cette mesure. Mais il faut noter que d'après l'unicité de la solution de (4.1) J(u) peut s'écrire uniquement:

(4.5) $J(u) = E^u[\int_0^T L(s,w_s,u(s,w_s))ds + h(T,w_T)]$,

ici E^u désigne l'espérance relative à P^u où $P^u(\cdot) = \mu(X \varepsilon \cdot)$ est une mesure de probabilité sur l'espace canonique $(C^n, \underline{\underline{F}})$. (voir la remarque 1.2)

Posons pour tout $u \varepsilon \underline{\underline{U}}$, (4.6) $$\underline{\underline{A}}^u(s) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} a_{ij}(s,y)\partial^2/\partial y_i\partial y_j + \sum_{i=1}^{n} g_i(s,y,u)\partial/\partial y_i,$$

où $a = (a_{ij}) = \sigma\sigma'$, est une matrice symétrique définie positive. Le théorème suivant est connu sous le nom de "principe de Bellman".

Théorème 4.2 Soit $V = V(s,y)$, $(s,y)\varepsilon\bar{Q}^o$, une solution de l'équation de Bellman:

(4.7) $$0 = \partial V/\partial s + \min_{v\varepsilon U}\{\underline{\underline{A}}^v(s)V + L(s,y,v)\},\ (s,y)\varepsilon Q^o,$$

avec la condition au bord

(4.8) $V(T,y) = h(T,y)$ pour tout $y\varepsilon R^n$,

telle que $V\varepsilon\underline{\underline{C}}^{1,2}(Q^o)$ et V est continue sur $\bar{Q}^o$. Alors:

1) pour tout $t>0$, tout $u\varepsilon\underline{\underline{U}}'$,

(4.9) $V(t,w_t) \leqq \psi(u\overset{t}{\circ}v)$ pour tout $v\varepsilon\underline{\underline{U}}_t^T$, où $\psi(u\overset{t}{\circ}v)$ est donnée en (2.3)

, et pour $t = 0$, $V(0,x) \leqq J(v)$ pour tout $v\varepsilon\underline{\underline{U}}$,

2) Si $u^*\varepsilon\underline{\underline{U}}'$ est tel que

(4.10) $$\underline{\underline{A}}^{u^*}(s)V + L^{u^*}(s,y) = \min_{v\varepsilon U}\{\underline{\underline{A}}^v(s)V + L(s,y,v)\},\ \text{pour tout } (s,y)\varepsilon Q^o,$$

alors pour tout $t\geqq 0$,

(4.11) $$V(t,w_t) = E^{u^*}[\int_t^T L(s,w_s,u^*(s,w_s))ds + h(T,w_T)|\underline{\underline{F}}_t]\quad p.s.(P^{u^*}),$$

si on pose $t=0$ dans (4.11) au dessus on a alors $V(0,x) = J(u^*)$. Par conséquent u^* est optimal dans $\underline{\underline{U}}$.

Démonstration D'après (4.7), pour tout élément $(s,y,u)\varepsilon\bar{Q}^o\times U$, on a

$$0 \leqq \partial V(s,y)/\partial s + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} a_{ij}(s,y)\partial^2 V(s,y)/\partial y_i\partial y_j + \sum_{i=1}^{n} g_i(s,y,u)\times \partial V(s,y)/\partial y_i + L(s,y,u).$$

Remplaçons (s,y,u) par $(t,w_t,v(t,w))$, $t\varepsilon(0,T)$, $v\varepsilon\underline{\underline{U}}$, on a alors l'inégalité suivante:

(4.12) $$0 \leqq \partial V(t,w_t)/\partial t + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} a_{ij}(t,w_t)\partial^2 V(t,w_t)/\partial y_i\partial y_j + \sum_{i=1}^{n} g_i(t,w_t,v(t,w_t))\partial V(t,w_t)/\partial y_i + L(t,w_t,v(t,w)).$$

Soient u et v des éléments arbitraires de $\underline{\underline{U}}$ et pour tout $t\geq 0$, soit $u\overset{t}{\circ}v$ un élément de $\underline{\underline{U}}$, défini en(2.2). Pour tout $t\geq 0$, en prenant l'espérance conditionnelle de (4.12) par rapport à $(P^{u\overset{t}{\circ}v}, \underline{\underline{F}}_t)$,

$$E^{u\overset{t}{\circ}v}[\int_t^T L(s,w_s,v(s,w))ds|\underline{\underline{F}}_t] \geq - E^{u\overset{t}{\circ}v}[\int_t^T\{V_s(s,w_s) + \underline{\underline{A}}^{u\overset{t}{\circ}v}(s)\times$$

$$V(s,w_s)\}ds|\underline{\underline{F}}_t] = - E^{u\overset{t}{\circ}v}[V(T,w_T) - V(t,w_t)|\underline{\underline{F}}_t] = V(t,w_t) -$$

$$E^{u\overset{t}{\circ}v}[h(T,w_T)|\underline{\underline{F}}_t] \quad p.s.(P^{u\overset{t}{\circ}v}),$$

Ici nous avons utilisé la formule d'Ito pour V puisque $V\in\underline{\underline{C}}^{1,2}(Q^o)$ et la condition (4.8). Finalement, pour tout $t\geq 0$, tout $v\in\underline{\underline{U}}_t^T$, on a

$$(4.13) \quad V(t,w_t) \leq E^v[\int_t^T L(s,w_s,v(s,w))ds + h(T,w_T)|\underline{\underline{F}}_t] \quad p.s.(P^v).$$

Mais le membre de droite est la définition de $\psi(u\overset{t}{\circ}v)$ de (2.3). Si on met t=0 dans l'inégalité ci-dessus, pour tout $v\in\underline{\underline{U}}$, on a alors:

$$V(0,x) \leq E^v[\int_0^T L(s,w_s,v(s,w))ds + h(T,w_T)] = J(v).$$

Donc l'enoncé est établi. Maintenant, on va démontrer l'énoncé 2). Pour $u^*\in\underline{\underline{U}}$ satisfaisant à (4.10),

$$E^{u^*}[\int_t^T L(s,w_s,u^*(s,w_s))ds + h(T,w_T)|\underline{\underline{F}}_t] = - E^{u^*}[\int_t^T\{V_s(s,w_s) +$$

$$\underline{\underline{A}}^{u^*}(s)V(s,w_s)\}ds|\underline{\underline{F}}_t] \overset{+h(T,w_T)}{=} - E^{u^*}[V(T,w_T) - V(t,w_t)|\underline{\underline{F}}_t] +$$

$$E^{u^*}[h(T,w_T)|\underline{\underline{F}}_t] = V(t,w_t) \quad p.s.(P^{u^*}).$$

Par conséquent on a la formule (4.11). Si on fait t=0 dans cette égalité alors $V(0,x) = J(u^*)$. D'après l'énoncé 1), $J(u^*) = V(0,x) \leq J(v)$ pour tout $v\in\underline{\underline{U}}$, alors u^* est optimal dans $\underline{\underline{U}}$.

<u>Remarque</u> 4.2 1) Il faut remarquer que $\inf_{v\in\underline{\underline{U}}'} J(v) = \inf_{v\in\underline{\underline{U}}} J(v)$. Comme $\underline{\underline{U}}' \subset \underline{\underline{U}}$ d'après les définitions de $\underline{\underline{U}}$, $\underline{\underline{U}}'$, il est clair que $\inf_{v\in\underline{\underline{U}}'} J(v) \geq \inf_{v\in\underline{\underline{U}}} J(v)$. Toutefois, la relation inverse est aussi immédiate du théorème 4.2. Il résulte de ces arguements qu'il suffit de considérer des contrôles appartenant à $\underline{\underline{U}}'$(qui est plus petit que $\underline{\underline{U}}$) lorsque les conditions du théorème 4.2 sont vérifiées.

2) Ce théorème donne une condition suffisante pour qu'un contrôle admissible u^* soit optimal. Or, sur le problème de l'existence de la

solution de l'équation de Bellman (4.7) et de l'existence du contrôle optimal, il y a jusqu'à présent quelques résultas (voir Fleming et Rishel[6] chapter VI, §6).

Nous allons préciser les résultats dans le cas markovien pour pouvoir les appliquer plus facilement à quelques exemples. Rappelons que lorsque un contrôle admissible u* est optimal, alors, d'après la proposition 2.5, pour tout $t \geq 0$,

$$(4.14)\quad W_t = \inf_{v \in \underline{\underline{U}}_t^T} E^v[\int_t^T L(s,w_s,v(s,w))ds + h(T,w_T)|\underline{\underline{F}}_t]$$
$$= E^{u^*}[\int_t^T L(s,w_s,u^*(s,w_s))ds + h(T,w_T)|\underline{\underline{F}}_t] \quad p.s.(P^{u^*}).$$

Cependent, d'après (4.11), W_t est égale à $V(t,w_t)$ lorsque les conditions du théorème 4.2 sont vérifiées. De même pour $W'_{u^*}(t)$ définie en (2.13), on a:

$$(4.15)\quad W'_{u^*}(t) = V(t,w_t) + \int_0^t L(s,w_s,u^*(s,w_s))ds, \quad p.s.(P^{u^*}).$$

Comme $V(t,y) \in \underline{\underline{C}}_p^{1,2}(Q^o)$, d'après la formule d'Ito, on a alors

$$(4.16)\quad W'_{u^*}(t) = V(0,x) + \int_0^t\{V_s(s,w_s) + \underline{\underline{A}}^{u^*}(s)V(s,w_s)\}ds +$$
$$\int_0^t(V_y(s,w_s),\sigma dB_s) + \int_0^t L(s,w_s,u^*(s,w_s))ds$$
$$= V(0,x) + \int_0^t(V_y(s,w_s),\sigma dB_s), \quad p.s.(P^{u^*}).$$

Ici nous avons utilisé (4.7) et (4.10). Il faut remarquer que $V(0,x) = J(u^*) = \inf_{v \in \underline{\underline{U}}} J(v) = W_o = W'_{u^*}(0)$. Finalement on peut résumer ainsi ce qui précéde:

<u>Théorème</u> 4.3 Sous les conditions 1) et 2) du théorème 4.2, si $u^* \in \underline{\underline{U}}'$ est un contrôle admissible qui est optimal et qui vérifie la formule (4.10), alors la fonction $W'_{u^*}(t)$ peut s'écrire (4.16).

Par conséquent on a une formule explicite de $W'_{u^*}(t)$ dans le cas markovien et la formule (4.16) justifie l'écriture de $W'_{u^*}(t)$ comme intégrale stochastique relative à (B_t,P^{u^*}) lorsque u* est optimal. Plus généralement, d'après la proposition 3.3 et (3.11), on a le résultat suivant:

<u>Corollaire</u>4.4 Sous les conditions du théorème 4.3, $\overline{W}_t$ donnée en (3.9) peut s'écrire:

$$(4.17)\quad \overline{W}_t = V(0,x) + \int_0^t(V_y(s,w_s),\sigma dB_s) + B'_t \qquad p.s.(\overline{P}^{u^*}),$$

où $\bar{B}_t = (B_t, B_t')$ est le mouvement brownien sur l'espace canonique $(C^{n+1}, \underline{\underline{F}})$ à valeurs dans R^{n+1}, déterminé uniquement par l'équation différentielle stochastique (3.4) associé à $u = u^*$. Par conséquent dans ce cas, ϕ^* définie en (3.15) est égale à $\begin{pmatrix} V_y(s,w_s) \\ 1 \end{pmatrix}$.

§5. QUELQUES EXEMPLES

I. Le cas linéaire

Bien qu'il y ait quelques résultats relativement à l'équation de Bellman (4.7) (4.8), il est en génégal difficile d'obtenir une solution explicite. Poutant dans le cas linéaire on peut avoir facilement une solution explicite de cette équation. Supposons que l'on se donne un système linéaire des équations différentielles stochastiques:

$$(5.1) \quad \begin{cases} dX_t = F_t X_t dt + G_t u_t dt + \sigma_t dB_t, & 0 < t \leq T, \\ X_0 = x \in R^n, \end{cases}$$

et la fonction de perte:

$$(5.2) \quad J(u) = E[\int_0^T \{X_t' M_t X_t + u_t' N_t u_t \; dt\} + X_T' D X_T],$$

où $X'(u')$ désigne le vecteur transposé de $X(u)$, respectivement.

Supposons que

A) $\sigma = (\sigma_{ij}(t)), 0 \leq t \leq T, 1 \leq i,j \leq n$, est une matrice carrée, définie positive,
$F = (F_{ij}(t))$, $G = (G_{ij}(t)), 0 \leq t \leq T, 1 \leq i,j \leq n$, sont des matrices carrées

B) $M = (M_{ij}(t))$, $D = (D_{ij}(t)), 0 \leq t \leq T, 1 \leq i,j \leq n$, sont des matrices carrées, définies nonnégatives, symétriques,
$N = (N_{ij}(t)), 0 \leq t \leq T, 1 \leq i,j \leq n$, est une matrice carrée, définie positive, symétrique.

Dans ce cas il n'y a pas de contrainte, autrement dit, $U = R^n$. Voici un résultat d'existence de la solution de Bellman que l'on peut calculer aisément à la main.

<u>Théorème</u> 5.1 Posons

$$(5.3) \quad V(s,y) = y' K_s y + q_s, \quad 0 \leq s \leq T,$$

où $K = (K_{ij}(s)), 0 \leq s \leq T, 1 \leq i,j \leq n$, est la matrice solution (unique) de l'équation de Ricatti munie de la condition terminale:

$$(5.4) \quad dK/ds = - FK - kF' + KGN^{-1}G'K - M, \quad K_T = D,$$

et $q = (q_s), 0 \leq s \leq T$, est définie par

$$(5.5) \quad q_s = \sum_{i,j=1}^{n} \int_s^T a_{ij}(s) K_{ij}(s) ds, \quad a = \sigma\sigma' .$$

Alors $V(s,y)$ est une solution de (4.7) (4.8), de plus si on pose

(5.6) $u^*(s,y) = - N_s^{-1} G_s' K_s y,$

alors $u^*(s,y)$ vérifie la formule (4.10), donc, d'après le théorème 4.2, $u(s,w) = u^*(s,w_s)$ est optimal.

Notons que $u^*(s,w)$ appartient à $\underline{\underline{U}}'$ (cf.la remarque 4.1). De plus on peut constater aisément que $K = (K_{ij}(s))$ est une matrice symétrique et, si D est définie positive, alors K est aussi définie positive. En différentiant des deux côtés de (5.3), on a alors

(5.7) $\partial V/\partial y(s,y) = 2K_s y.$

D'après le théorème 4.3, $W'_{u^*}(t)$ et $\overline{W}_t$ peuvent s'écrire:

(5.8) $W'_{u^*}(t) = V(0,x) + 2 \int_0^t (K_s w_s, \sigma_s dB_s^*) \quad \text{p.s.}(P^{u^*}),$

(5.9) $\overline{W}_t = V(0,x) + 2 \int_0^t (K_s w_s, \sigma_s dB_s) + B_t^{*\prime} \quad \text{p.s.}(\overline{P}^{u^*}),$

où $\overline{B}^* = (B^*, B^{*\prime})$ est le mouvement brownien sur $(C^{n+1}, \underline{\underline{F}})$ à n+1 dimensions de l'équation (3.4) associée à $u = u^*$.

Maintenant, nous allons démontrer unicité des lois optimales de la manière suivante: soit $u = u(t,w) \in \underline{\underline{U}}$ et soit $\overline{B} = (B,B')$ le mouvement brownien à n+1 dimensions sur $(C^{n+1}, \underline{\underline{F}})$, déterminé par l'équation (3.4) associée à u, tandis que l'équation (3.4) associée à u peut s'écrire:

$$dw_t = \{ F_t w_t + G_t u_t \}dt + \sigma_t dB_t, \quad w_0 = x,$$
$$dw_t' = \{ (w_t)' M_t w_t + (u_t)' N_t u_t \}dt + dB_t', \quad w_0' = 0.$$

Pour $u^*(s,y)$ défini en (5.6), de même on a l'équation associée à u^* car $u^* \in \underline{\underline{U}}$. En comparant cette deux équations, $\overline{B}^* = (B^*, B^{*\prime})$, le mouvement brownien associé à u^*, peut s'écrire:

$$dB_t^* = dB_t + (\sigma_t)^{-1} \{ G_t u_t - G_t u_t^* \}dt, \quad B_0^* = B_0 = 0,$$

$$dB_t^{*\prime} = dB_t' + \{(u_t)' N_t u_t - (u_t^*)' N_t u_t^* \}dt, \quad B_0^{*\prime} = B_0' = 0.$$

Par conséquent, la formule (5.9) peut s'écrire:

$$\overline{W}_t = V(0,x) + 2 \int_0^t (K_s w_s, \sigma_s dB_s) + 2 \int_0^t (K_s w_s, G_s u_s - G_s u_s^*) ds$$
$$+ B_t' + \int_0^t \{(u_s)' N_s u_s - (u_s^*)' N_s u_s^* \} ds$$
$$= V(0,x) + \overline{M}_t + \int_0^t \{ 2(K_s w_s, G_s u_s - G_s u_s^*) + (u_s, N_s u_s) -$$

$(u_s^*, N_s u_s^*)\}ds$,

où $\bar{M}_t = 2 \int_0^t (K_s w_s, \sigma_s dB_s) + B_t'$ représente la partie de martingale par rapport à $(\bar{\underline{F}}_t, \bar{P}^u)$ de $\bar{W}_t$. D'après le théorème 3.2, pour que u soit optimal dans $\underline{U}$ il faut et il suffit que $\bar{W}_t$ soit une martingale uniformément intégrable par rapport à $(\bar{\underline{F}}_t, \bar{P}^u)$. Donc u est optimal si et seulement si la partie de variation finie de $\bar{W}_t$ est nulle. Autrement dit,

$$2(K_t w_t, G_t u_t - G_t u_t^*) + (u_t, N_t u_t) - (u_t^*, N_t u_t^*) = 0$$

pour tout (t,w) sauf des ensembles négligeables relative à la mesure produite $dt \otimes dP$. Posons $u_t - u_t^* = v_t$, alors on a:

$$(u, Nu) = (v+u^*, N(v+u^*)) = (v, Nv) + 2(v, Nu^*) + (u^*, Nu^*),$$

puisque N est une matrice symétrique d'après l'hypothese. Par conséquent, on a alors

$$0 = 2(Kw, Gv) + (v, Nv) + 2(v, Nu^*).$$

Notons que $u_t^* = -(N_t)^{-1}(G_t)'K_t w_t$ d'après la définition de u*, (5.6), alors

$$(Kw, Gv) + (v, Nu^*) = (Kw, Gv) - (v, (G)'Kw) = 0,$$

par conséquent, $(v, Nv) = 0$. Du fait que N est une matrice définie positive d'après l'hypothèse il est immédiat que $v(t,w) = 0$ p.s.$(dt \otimes dP)$. Finalement nous pouvons récapituler ce qui précéde ainsi:

<u>Théorème</u> 5.2 Supposons que le système de contrôle et la fonction de perte soient donnés par (5.1) et (5.2) respectivement avec les conditions A) et B). Alors la loi optimale est unique, de plus il résulte du théorème 5.1 que cette unique loi est P^{u^*}, où u* est défini en (5.6).

<u>Remarque</u> 5.1 En ce qui concerne le contrôle stochastique dans le cas linéaire, il y a beaucoup de travails jusqu'à présent, mais surtout J.M.Bismut a montré dans son article [1], l'existence et l'unicité du contrôle optimal dans le cas où tous les coefficients mèmes sont des variables aléatoires et de plus σ dépend du paramètre de contrôle. Néanmoins il faut remarquer que notre résultat (le théorème 5.2) n'y est pas compris puisqu'au début la formulation est différente entre lui et nous.(cf. la remarque 1.2,(3) au §1.)

<u>Exemple</u> II

Considérons un exemple nonlinéaire déjà traité dans des articles ([7],[8],[10]). Le système de contrôle est donné par l'équation différentielle stochastique suivante:

$$(5.10)\quad \begin{cases} dX_t = u(t,X)dt + \sigma_t dB_t, & 0<t\leq T \\ X_0 = x\varepsilon R^n, \end{cases}$$

et la fonction de perte par:

$$(5.11)\quad J(u) = E[\int_0^T L(s,|X_s|)ds + h(T,|X_T|)],$$

A) $\sigma = (\sigma_{ij}(t)), 0\leq t\leq T, 1\leq i,j\leq n$, est une n-matrice carrée, définie positive, et $B = (B_i(t))$, $0\leq t\leq T$, est un mouvement brownien à n dimensions.

B) $L = L(t,x)$ est une application de $[0,T]\times R_+$ dans R_+(i.e.$L\geq 0$), mesurable en (t,x) et croissante en x pour tout t (fixé),

C) $h = h(t,x)$ est une application $[0,T]\times R_+$ dans R_+ vérifiant les même conditions que L.

On va définir la classe admissible des contrôles de la manière suivante: on écrit $u\varepsilon \underline{\underline{U}}^b$ si

i) $u = u(t,w)$ est une application de $[0,T]\times C^n$ dans R^n, mesurable en (t,w),

ii) pour tout t, $u(t,.)$ est $\underline{\underline{F}}_t$ - mesurable,

iii) $u(t,w)\varepsilon S_k$ pour tout (t,w), où $S_k = \{x\varepsilon R^n; |x|\leq k\}$.

<u>Définition</u> 5.1 On dit que u est un <u>contrôle</u> <u>admissible</u> si u appartient à $\underline{\underline{U}}^b$. On dit aussi que $\underline{\underline{U}}^b$ est la <u>classe</u> <u>admissible</u>.

Remarquons que pour tout $u\varepsilon\underline{\underline{U}}^b$ il existe une et une seule(toujours en loi !)solution faible de (5.10) puisque u est borné. Dans ce cas, évidemment, la classe admissible $\underline{\underline{U}}^b$ est plus petite que $\underline{\underline{U}}$ (cf. la définition 1.1 au §1). Mais remarquons aussi que nous pouvons utiliser $\underline{\underline{U}}^b$ au lieu de $\underline{\underline{U}}$ dans les discussions précédentes (§1,2,et§3) du fait que l'ensemble $\{f(u\overset{t}{\bullet}v); v\varepsilon(\underline{\underline{U}}^b)_t^T\}$ est aussi relativement complet.

Sur le problème de trouver un contrôle admissible u* minimisant J(u) dans $\underline{\underline{U}}^b$ le théorème suivant est bien connu ([10]):

<u>Théorème</u> 5.3 Soit ψ^* l'application de R^n à valeurs dans R^n telle que, pour tout $x = (x_1,\dots,x_n)$,

$$(5.12)\quad \psi_i^*(x) = \begin{cases} -kx_i/|x|, & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & , \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Alors $u^*(t,X) = \psi^*(X_t)$ est optimal dans $\underline{\underline{U}}^b$, où $X = (X_t)$ est une solution de l'équation (5.10) sur un espace probabilisé (Ω,Σ,μ) associée à $u = u^*$. Par ailleurs cette solution est unique au sens des trajectoires: donc elle est la solution forte de l'équation (5.10). (cf. , [7]) Comme dans cet exemple L apparaissant en (5.11) ne dépend pas du paramètre de contrôle u,

$$(5.13)\quad W_t^! = \inf_{v\in(\underline{\underline{U}}^b)_t^T} E^{u \overset{t}{\circ} v}[\int_t^T L(s,|w_s|)ds + h(T,|w_T|)|\underline{\underline{F}}_t] + \int_0^t L(s,|w_s|)ds$$

ne dépend plus de u, on n'a donc plus besoin ni d'un espace probabilisé $(C^{n+1},\overline{\underline{\underline{F}}},\overline{P})$ ni de $\overline{W}_t$ donnée en (3.11) mais il suffit de considérer W_t ou $W_t^!$ sur $(C^n,\underline{\underline{F}},P)$. D'après le paragraphe 2, on sait que lorsque $u = u^*(t,w) = \psi^*(w_t)$ défini en (5.12) est optimal, $(W_t,\underline{\underline{F}}_t,P^{u^*})$ est une sur-martingale et $(W_t^!,\underline{\underline{F}}_t,P^{u^*})$ est une martingale uniformèment intégrable (**cf.** le théorème 2.3, le corollaire 2.4). De plus on sait aussi que $u = u^*$ étant optimal, W_t peut s'écrire

$$(5.14)\quad W_t = E^{u^*}[\int_t^T L(s,|w_s|)ds + h(T,|w_T|)|\underline{\underline{F}}_t],\quad p.s.(P^{u^*}),$$

ou encore

$$(5.15)\quad W_t^! = E^{u^*}[\int_0^T L(s,|w_s|)ds + h(T,|w_T|)|\underline{\underline{F}}_t],\quad p.s.(P^{u^*}).$$

Ces égalités correspondent à (2.12) et (2.13). Or, d'après le théorème 3.4, $u = u^*$ étant optimal, $W_t^!$ est représentée comme intégrale stochastique par rapport à $B^* = (B_t^*)$ de la manière suivante: il existe une fonction ϕ^* prévisible par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$ telle que

$$(5.16)\quad W_t^! = W_0 + \int_0^t(\phi_s^*,dB_s^*)\qquad p.s.(P^{u^*}),$$

où $B^* = (B_t^*)$ est le mouvement brownien de l'équation (5.10) associée à $u = u^*$.

Maintenant nous allons vérifier si u^* de (5.12) est unique dans $\underline{\underline{U}}^b$. Désormais, supposons que $\sigma = I$, $L \equiv 0$. Le lemme suivant est efficace pour notre but.

<u>Lemme</u> 5.4 Posons $\xi_t = |w_t|^2 (= \sum_{i=1}^n |w_t^i|^2)$, alors $(\xi_t,\underline{\underline{F}}_t,P^{u^*})$ est un processus de Markov.

<u>Démonstration</u> Si $u = u^*$ alors l'équation (5.10) peut s'écrire:

$$(5.17)\quad dw_t = u^*(t,w)dt + dB_t^*,\quad w_0 = x,$$

mais, d'après (5.12), on a

$$(5.18)\quad dw_t^i = -\frac{kw_t^i}{|w_t|}dt + dB_t^{*i},\quad 1\leq i\leq n,\quad w_0 = x.$$

En utilisant la formule d'Ito, on a une équation différentielle stochastique relative à (ξ_t):

$$(5.19)\begin{cases} d\xi_t = -2k(\xi_t)^{1/2}dt + 2(\xi_t)^{1/2}d\beta_t^* + ndt, \\ \xi_0 = x^2, \end{cases}$$

où $\beta^* = (\beta_t^*)$ est un $(\underline{\underline{F}}_t, P^{u^*})$-mouvement brownien à une dimension, défini par la formule suivante:

$$(5.20)\begin{cases} d\beta_t^* = \dfrac{(w_t, dB_t^*)}{|w_t|} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} w_t^i dB_t^{*i}}{|w_t|}, & \text{si } w_t \neq 0, \\ \beta_0^* = 0, & \text{si } w_t = 0. \end{cases}$$

En effet, il est facile de voir que (β_t^*) est une martingale continue dont la crochet $\langle\beta^*,\beta^*\rangle_t$ est égale à t. Par conséquent β^* est un mouvement brownien à une dimension par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t, P^{u^*})$. D'après Yamada et Watanabe [15], on sait que l'équation (5.19) a une solution et une seule en trajectoire. Donc il est naturel que l'unique solution ξ_t de cette équation est un processus de Markov.

<u>Lemme</u> 5.5 Il existe une fonction $K_{\tilde{h}}: [0,T]\times R_+ \to R$ telle que

(5.21) $W_t = E^*[\tilde{h}(T,\xi_T)] + \int_0^t K_{\tilde{h}}(s,\xi_s)d\beta_s^*$, p.s.(P^{u^*}),

où W_t est définie en (2.7) et $\tilde{h}(t,x) = h(t,x^{1/2})$ pour tout (t,x), $x\geq 0$.

<u>Démonstration</u> Il faut noter que $W_t' = W_t$ car L=0 (cf.(2.11)). Pour la facilité, tout d'abord, discutons sur le cas où la fonction h ne dépend pas de t. Soit $P(t,x,dy)$ la probabilité de transition du processus ξ_t. Si $P_{\tilde{h}}(t,x) = \int\tilde{h}(t,y)P(t,x,dy) \in \underline{\underline{C}}^{1,2}(Q^o)$ (cf. §4), alors

$$\begin{aligned} W_t &= E^*[\tilde{h}(\xi_T)|\underline{\underline{F}}_t] = P_{\tilde{h}}(T-t,\xi_t) \\ &= P_{\tilde{h}}(T,\xi_0) + 2\int_0^t(\xi_s)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x}P_{\tilde{h}}(T-s,\xi_s)d\beta_s^*. \end{aligned}$$

En fait, ici nous avons utilisé la formule d'Ito et l'équation différentielle en arrière de Kolmogorov. Donc dans ce cas il suffit de prendre $2(\xi_s)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x}P_{\tilde{h}}(T-s,\xi_s)$ comme $K_{\tilde{h}}(s,\xi_s)$ en (5.21). Il faut remarquer que $P_{\tilde{h}}(T,\xi_0) = E^*[\tilde{h}(\xi_T)]$. Dans le cas général l'énoncé découle du fait que si ξ_t est un processus de Markov alors le couple (t,ξ_t) est aussi un processus de Markov. (Pour le détail, voir [3])

Soit u' un élément arbitraire de $\underline{\underline{U}}^b$, d'après le théorème de Girsanov, le processus défini par

(5.22) $d\beta_t' = d\beta_t^* - \{(u_t', w_t/|w_t|) + k\}dt$, $\beta_0' = 0$,

est un mouvement brownien à une dimension sous $P^{u'}$. En substituant (β') à (β^*) dans la formule (5.21), on a alors

$$W_t = E^*[\tilde{h}(T,\xi_T)]\,(=W_0) + \int_0^t K_{\tilde{h}}(s,\xi_s)d\beta'_s$$

$$+ \int_0^t K_{\tilde{h}}(s,\xi_s)\{(u'_s, w_s/|w_s|) + k\}\,ds.$$

Il résulte du corollaire 2.4 que pour que u' soit optimal il faut et il suffit que $W_t(=W'_t)$ soit une martingale uniformément intégrable relative à $(\underline{\underline{F}}_t, P^{u'})$. Par conséquent, il est immédiat que u' est optimal si et seulement si la partie de variation finie de membre de droite est nulle. Si la fonction $K_{\tilde{h}}(s,\xi_s)$ ne s'annule jamais sauf un ensemble négligeable relative à la mesure $ds \otimes dP^{u'}$, alors u' est optimal si et seulement si $(u'_s, w_s/|w_s|) + k = 0$ p.s.$(ds \otimes dP^{u'})$. Posons $v_s = u^*_s - u'_s$, alors $(v_s, u^*_s) = (-kw_s/|w_s| - u'_s, -kw_s/|w_s|) = k^2 + k(u'_s, w_s/|w_s|) = 0$ p.s.$(ds \otimes dP^{u'})$. Par conséquent deux vecteurs v et u* sont orthogonals, et ensuite il est immédiat que $(v,v) = 0$. En effet, $(u',u') = (u^*-v, u^*-v) = (u^*,u^*) + (v,v) = k^2 + (v,v)$. Toutefois, notons que $(u',u') \leq k^2$ car $u' \in \underline{\underline{U}}^b$(cf.la définition 5.1), donc si $u' \in \underline{\underline{U}}^b$ alors $(v,v) = 0$. En récapitulant ce qui précéde, on a le

<u>Théorème</u> 5.6 Supposons que $\sigma = I$ et $L = 0$ dans les formules (5.10) et (5.11). Si $K_{\tilde{h}}(s,\xi_s)$ apparaissant dans (5.21) ne s'annule jamais sauf un ensemble négligeable par rapport à $ds \otimes dP$ alors la loi optimale est unique, de plus il résulte du théorème 5.3 que cette unique loi est P^{u^*}, où u* est défini en (5.12).

<u>Remarque</u> 5.2 D'après [8], pour $u = u^*(t,w)$, $\alpha_0^T(u^*)$ définie en (1.11) est $\sigma\{|w_s|; s \leq t\}$- adaptée. Donc s'il y a unicité de loi optimale alors la loi optimale est $\sigma\{|w_s|; s \leq t\}$ - mesurable.

<u>BIBLIOGRAPHIE</u>

[1]. J.M.Bismut, Linear quadratic optimal stochastic control with random coefficients, SIAM J. Control 14(1976), p.419-444.

[2]. M.H.A.Davis and P.Varaiya, Dynamic programming conditions for partially observable stochastic systems, SIAM, J. Control, 11 (1973), p.226-261.

[3]. E.B.Dynkin, Foundations of the theory of Markov processes, English translation: Pergamon Press 1960.

[4]. N.El-Karoui, Cours de l'Ecole d'été de calcul des probabilités, 1979.

[5]. R.J.Elliott, The optimal control of a stochastic system, SIAM, J. Control, 15(1977), p.756-778.

[6]. W.H.Fleming and R.W.Rishel, Deterministic and stochastic control, 1975, Springer.

[7]. M.Fujisaki, On stochastic control of a Wiener process, J. Math. Kyoto Univ. 18-2(1978), p.229-238.

[8]. M.Fujisaki, On the uniqueness of optimal controls, Séminaire de probabilités XIII, Lecture notes in M. 721, Springer 1979.

[9]. I.V.Girsanov, On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution of measures, Theory of Prob, and its appl. 5(1960), p.285-301.

[10]. N.Ikeda and S.Watanabe, A comparison theorem for solutions of stochastic differential equations and its applications, Osaka J. Math. 14(1977), p.619-633.

[11]. J.Jacod, Calcul stochastique et problèmes de martingales, Lecture notes in M. 714, 1979 Springer.

[12]. J.Jacod et M.Yor, Etude des solutions extrémales et représentation intégrale des solutions pour certains problèmes de martingales, Z.W. 38(1977), p.83-125.

[13]. R.S.Liptzer and A.N.Shiryaev, Statistics of stochastic processes, Springer Verlag 1977.

[14]. R.Rishel, Necessary and sufficient dynamic programming conditions for continuous time stochastic optimal control, SIAM J. Control, 8(1970), p.559-571.

[15]. T. Yamada and S.Watanabe, On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations, J. Math. Kyoto Univ. 11 (1971), p.156-167.

[16]. M.Yor, Remarques sur la représentation des martingales comme intégrales stochastiques, Séminaire de Probabilités XI, Lecture Notes in M. 581, Springer 1977.

Institute de Recherche Mathématique Avancée
Laboratoire Associé au CNRS n°1
Université Louis Pasteur
7, Rue René-Descartes
67084 Strasbourg Cédex FRANCE
et
Kobe University of Commerce
4-3-3, Seiryodai Tarumi-ku
Kobé 655 JAPON