

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CHANTHA YOEURP

## Sur la dérivation des intégrales stochastiques

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 14 (1980), p. 249-253

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1980\\_\\_14\\_\\_249\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__249_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LA DERIVATION DES INTEGRALES STOCHASTIQUES

CH. YOEURP

D. Isaacson ([2]) a montré, en 1969, le résultat suivant :

Soient un mouvement brownien  $(B_t)$  et un processus continu prévisible  $(\phi_t)$  tel que  $\int_0^t \phi_s^2 ds < \infty$ , pour tout  $t$ . Alors, pour chaque  $t$  fixé, le rapport

$$\frac{\int_t^{t+\epsilon} \phi_s dB_s}{B_{t+\epsilon} - B_t}$$
 converge en probabilité vers  $\phi_t$ , quand  $\epsilon \rightarrow 0$ .

L'objet de cet article est de montrer que l'on ne peut pas, en général, étendre cette propriété à une martingale continue quelconque. Nous remercions ici P.A. Meyer et M. Yor pour leurs discussions fructueuses sur ce travail.

1 Soit  $B = (B_t)$  un mouvement brownien par rapport à sa filtration naturelle  $(\mathcal{F}_t)$ , défini sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ , vérifiant les conditions habituelles.

Nous allons construire une martingale continue changée de temps de  $B$ , qui ne possède pas la propriété de "dérivation".

Pour chaque  $n \geq 1$ , définissons :

$$R_n = \text{Inf}\{t > \frac{1}{n} / |B_t| = \frac{1}{n}\}$$
$$= \infty \text{ si } \{\cdot\} = \emptyset$$

On a le lemme suivant :

Lemme 1 :

$(R_n)$  est une suite de t.a. tendant vers 0 en probabilité.

Démonstration :

$$\text{Soit } D_{1/n} = \text{Inf}\{t > \frac{1}{n} / B_t = 0\}$$
$$= \infty \text{ si } \{\cdot\} = \emptyset$$

Puisque 0 est un point d'accumulation des zéros de  $B$ ,  $(D_{1/n})$  est une suite de t.a. tendant p.s. vers 0. Comme on a  $R_n \leq D_{1/n}$  sur l'ensemble

$\{|B_{1/n}| \geq \frac{1}{n}\}$  dont la probabilité tend vers 1, on en conclut que  $R_n$  converge vers 0 en probabilité. □

Quitte à extraire une sous suite, on peut supposer que  $(R_n)$  converge vers 0 p.s.. Rendons cette suite décroissante, en posant :

$$S_n = R_1 \wedge R_2 \wedge \dots \wedge R_n \wedge 1.$$

La prochaine étape est la construction d'un changement de temps continu  $(\tau_t)$

tel que  $\tau_{\frac{1}{n}} = S_n$ . Pour cela, nous avons besoin d'une extension immédiate d'un lemme d'Emery ([1]) :

Lemme 2 :

Soient a et b deux réels tels que  $a < b$ , et S et S' deux t.a. prévisibles tels que  $S \leq S'$ .

Il existe un processus continu adapté strictement croissant  $(A_t)$  tel que  $A_S = a$ , et sur  $\{S < S'\}$ ,  $A_{S'} = b$ .

On applique le lemme 2 à la suite de t.a. prévisibles (car ce sont des t.a. du mouvement brownien)  $(S_n)$  construite précédemment :

pour  $n \geq 1$ , il existe  $(A_t^n)$ , processus continu adapté strictement croissant

vérifiant  $A_{S_{n+1}}^n = \frac{1}{n+1}$ , et sur  $\{S_{n+1} < S_n\}$ ,  $A_{S_n}^n = \frac{1}{n}$ .

Posons :  $A_t = \sum_{n \geq 1} A_t^n \mathbb{I}_{[S_{n+1}, S_n]} + \mathbb{I}_{[S_1, \infty]}$

C'est un processus adapté strictement croissant. Son inverse à droite  $(\tau_t)$  définit donc un changement de temps continu tel que  $\tau_{1/n} = S_n$ . La formule de changement de variables nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\int_0^{1/n} B_{\tau_s} dB_{\tau_s}}{B_{\tau_{1/n}}} &= \frac{\int_0^{\tau_{1/n}} B_s dB_s}{B_{\tau_{1/n}}} = \frac{1}{2} \left( B_{\tau_{1/n}} - \frac{\tau_{1/n}}{B_{\tau_{1/n}}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( B_{S_n} - \frac{S_n}{B_{S_n}} \right) \end{aligned}$$

Au second membre de la dernière égalité,  $B_{S_n}$  converge vers 0 p.s., mais

$\frac{S_n}{B_{S_n}}$  ne converge pas vers 0 en probabilité, d'après les définitions de  $S_n$  et de  $R_n$

On en conclut donc que la martingale continue  $(B_{\tau_t})_{t \in [0,1]}$  répond à la question.

Remarque 1 :

Etant donné un mouvement brownien  $(B_t)$  et un processus prévisible continu

$(\phi_t)$  tel que  $\int_0^t \phi_s^2 ds < \infty$ , pour tout  $t$ , est-ce-que  $M_t \equiv \int_0^t \phi_s dB_s$  est

l'unique martingale, à une constante additive près, telle que la limite en

probabilité, quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , de  $\frac{M_{t+\varepsilon} - M_t}{B_{t+\varepsilon} - B_t}$  soit égale à  $\phi_t$ , pour tout  $t$  ?

La réponse à cette question est affirmative, si on travaille relativement à la filtration naturelle de  $(B_t)$ . En effet, toute martingale peut s'écrire comme intégrale stochastique par rapport à  $(B_t)$ , à une constante additive près.

2. On étudie ici les "dérivées partielles" des intégrales stochastiques par rapport à un mouvement brownien dans  $\mathbb{R}^n$ . Pour ne pas compliquer les choses, on fait les calculs dans  $\mathbb{R}^2$  seulement, mais les résultats s'étendent au cas où  $n$  est quelconque.

Soit  $Z = (X, Y)$  un  $(\mathcal{F}_t)$  mouvement brownien dans  $\mathbb{R}^2$ , c'est-à-dire :

$X = (X_t)$  et  $Y = (Y_t)$  sont deux  $(\mathcal{F}_t)$  mouvements browniens réels indépendants,

et soit  $H = (\phi, \psi)$  un processus  $(\mathcal{F}_t)$  prévisible continu tel que

$\int_0^t (\phi_s^2 + \psi_s^2) ds < \infty$ , pour tout  $t$ . Notons  $M$  l'intégrale stochastique de  $H$  par

rapport à  $Z : M_t = \int_0^t \phi_s dX_s + \int_0^t \psi_s dY_s$ . Désignons par  $R$  et  $S$  deux v.a. gaussiennes, centrées, réduites, indépendantes entre elles, et indépendantes de

$(\phi, \psi)$ .

Posons :

$$\Delta_\varepsilon^1 = \frac{M_{t+\varepsilon} - M_t}{X_{t+\varepsilon} - X_t} = \frac{\int_t^{t+\varepsilon} \phi_s dX_s}{X_{t+\varepsilon} - X_t} + \frac{\int_t^{t+\varepsilon} \psi_s dY_s}{X_{t+\varepsilon} - X_t}$$

$$\Delta_\varepsilon^2 = \frac{M_{t+\varepsilon} - M_t}{Y_{t+\varepsilon} - Y_t} = \frac{\int_t^{t+\varepsilon} \phi_s dX_s}{Y_{t+\varepsilon} - Y_t} + \frac{\int_t^{t+\varepsilon} \psi_s dY_s}{Y_{t+\varepsilon} - Y_t}$$

$$D^1 = \phi_t + \psi_t \frac{S}{R}$$

$$D^2 = \phi_t \frac{R}{S} + \psi_t$$

On a le résultat suivant qui avait été aussi obtenu par Yor, mais il ne l'a pas publié.

Proposition 1 :

Le couple  $(\Delta_\epsilon^1, \Delta_\epsilon^2)$  converge en loi vers  $(D^1, D^2)$ , quand  $\epsilon$  tend vers 0.

Démonstration :

A cette fin, on utilise les transformées de Fourier. On va montrer que :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} E(e^{i\lambda \Delta_\epsilon^1 + i\mu \Delta_\epsilon^2}) = E(e^{i\lambda D^1 + i\mu D^2})$$

pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ . On peut écrire :

$$\Delta_\epsilon^1 = \left[ \frac{\int_t^{t+\epsilon} (\phi_s - \phi_t) dX_s}{X_{t+\epsilon} - X_t} + \frac{\int_t^{t+\epsilon} (\psi_s - \psi_t) dY_s}{Y_{t+\epsilon} - Y_t} \right] + \left[ \phi_t + \psi_t \frac{Y_{t+\epsilon} - Y_t}{X_{t+\epsilon} - X_t} \right] \stackrel{\text{Déf.}}{=} a_\epsilon^1 + b_\epsilon^1$$

$$\Delta_\epsilon^2 = \left[ \frac{\int_t^{t+\epsilon} (\phi_s - \phi_t) dX_s}{Y_{t+\epsilon} - Y_t} + \frac{\int_t^{t+\epsilon} (\psi_s - \psi_t) dY_s}{X_{t+\epsilon} - X_t} \right] + \left[ \phi_t \frac{X_{t+\epsilon} - X_t}{Y_{t+\epsilon} - Y_t} + \psi_t \right] \stackrel{\text{Déf.}}{=} a_\epsilon^2 + b_\epsilon^2$$

Puisque le couple  $(X_{t+\epsilon} - X_t, Y_{t+\epsilon} - Y_t)$  est indépendant de  $\mathcal{F}_t$  il est facile de voir que  $(b_\epsilon^1, b_\epsilon^2)$  et  $(D^1, D^2)$  ont même loi. On a donc pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned} E(e^{i\lambda \Delta_\epsilon^1 + i\mu \Delta_\epsilon^2}) - E(e^{i\lambda D^1 + i\mu D^2}) &= E(e^{i\lambda a_\epsilon^1 + i\mu a_\epsilon^2 + i\lambda b_\epsilon^1 + i\mu b_\epsilon^2}) - E(e^{i\lambda b_\epsilon^1 + i\mu b_\epsilon^2}) \\ &= E(e^{i\lambda a_\epsilon^1 + i\mu a_\epsilon^2} (e^{i\lambda b_\epsilon^1 + i\mu b_\epsilon^2} - 1)) \end{aligned}$$

D'où :

$$|E(e^{i\lambda \Delta_\epsilon^1 + i\mu \Delta_\epsilon^2}) - E(e^{i\lambda D^1 + i\mu D^2})| \leq E(|e^{i\lambda a_\epsilon^1 + i\mu a_\epsilon^2} - 1|)$$

D'autre part, en reprenant le même raisonnement que celui de Isaacson [2], on voit sans difficulté que  $a_\epsilon^1$  et  $a_\epsilon^2$  tendent vers 0 en probabilité, quand  $\epsilon \rightarrow 0$ . Il en résulte que le second membre de l'inégalité ci-dessus converge vers 0, quand  $\epsilon \rightarrow 0$ . D'où le résultat désiré.  $\blacksquare$

Remarque 2 :

Si l'on fait l'hypothèse que, pour  $t$  fixé :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} E\left(\int_t^{t+\epsilon} (\phi_s - \phi_t)^2 ds\right) = 0$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} E\left(\int_t^{t+\epsilon} (\psi_s - \psi_t)^2 ds\right) = 0$$

les mêmes calculs que ceux de Zabczyk [3] montrent que  $a_\varepsilon^1$  et  $a_\varepsilon^2$  convergent vers 0 dans  $L^p$ , pour tout  $p \in ]0, \frac{2}{3}[$ .  $\square$

On peut se demander si à partir du "vecteur gradient"  $(D^1, D^2)$ , on peut remonter à  $(\phi, \psi)$ , ce qui était évidemment vrai dans le cas uni-dimensionnel. Ici, il se trouve qu'il y a une perte d'information dans les "dérivées partielles" et qu'on ne peut pas obtenir la loi de  $(\phi, \psi)$  à partir de celle de  $(D^1, D^2)$ . En effet,  $D^2 = \frac{R}{S} D^1$  et le système d'équations :

$$\begin{cases} \phi_t + \psi_t \frac{S}{R} = D^1 \\ \phi_t \frac{R}{S} + \psi_t = D^2 \end{cases}$$

est "indéterminé".

#### BIBLIOGRAPHIE.

- [1] M. EMERY : Une propriété des temps prévisibles, dans ce volume.
- [2] D. ISAACSON : Stochastic integrals and derivatives, Ann. Math. Statistic, 40 (1969), p. 1610-1616.
- [3] J. ZABCZYK : Remarks on stochastic derivation, Bulletin de l'Académie polonaise des sciences, Série des sciences math., astr. et phys., vol XXI, N° 3, 1973.