SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JIA-AN YAN

Remarques sur certaines classes de semimartingales et sur les intégrales stochastiques optionnelles

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 223-226

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__223_0>

Séminaire de Probabilités XIV 1978/79

REMARQUES SUR CERTAINES CLASSES DE SEMIMARTINGALES ET SUR LES INTEGRALES STOCHASTIQUES OPTIONNELLES

par YAN Jia-An

1. SEMIMARTINGALES NORMALES

Nous nous proposons de définir dans cette section une classe de semimartingales, dans laquelle on peut définir de manière naturelle, non seulement la partie martingale locale continue d'une semimartingale, mais aussi la partie à variation finie continue. Pour simplifier, nous ne considérons dans toute cette note que des semimartingales nulles en 0 .

On se place sur un espace $(\Omega,\underline{\underline{F}},P,(\underline{\underline{F}}_t))$ satisfaisant aux conditions habituelles.

L'espace des semimartingales $\underline{\underline{S}}$ admet la décomposition en $\underline{\underline{L}}+\underline{\underline{V}}$ (non directe), où $\underline{\underline{L}}$ (resp. $\underline{\underline{V}}$) est l'espace des martingales locales (resp. des processus à variation finie). On a les décompositions plus fines

(1) $$\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{L}}^c \oplus \underline{\underline{L}}^d = \underline{\underline{L}}^c \oplus \underline{\underline{L}}^{di} \oplus \underline{\underline{L}}^{dp}$$

$\underline{\underline{L}}^c$ est l'espace des m.l. continues
$\underline{\underline{L}}^d$ --------------------- sommes compensées de sauts
$\underline{\underline{L}}^{di}$--------------------- s.c. de sauts totalement inaccessibles
$\underline{\underline{L}}^{dp}$--------------------- s.c. de sauts en des temps prévisibles

(2) $$\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{V}}^c \oplus \underline{\underline{V}}^d = \underline{\underline{V}}^c \oplus \underline{\underline{V}}^{di} \oplus \underline{\underline{V}}^{da}$$

$\underline{\underline{V}}^c$ est l'espace des processus à v.f. continus
$\underline{\underline{V}}^d$ ---------------------------------- sommes de sauts
$\underline{\underline{V}}^{di}$---------------------------------- s. de sauts totalement inaccessibles
$\underline{\underline{V}}^{da}$---------------------------------- s. de sauts en des temps prévisibles

On a écrit $\underline{\underline{V}}^{da}$ et non $\underline{\underline{V}}^{dp}$, car ces processus sont accessibles, mais non prévisibles en général, et $\underline{\underline{V}}^{dp}$ désigne plus naturellement l'espace des processus à v.f., sommes de sauts et prévisibles.

Par combinaison, on reconstitue alors d'autres espaces, par exemple

$\underline{\underline{S}}^c$, espace des semimartingales continues : $\underline{\underline{S}}^c=\underline{\underline{L}}^c\oplus\underline{\underline{V}}^c$
$\underline{\underline{L}}^q$, espace des m.l. quasi-continues à gauche : $\underline{\underline{L}}^q= \underline{\underline{L}}^c\oplus\underline{\underline{L}}^{di}$
$\underline{\underline{V}}^q$, espace des processus à v.f. quasi-continus à gauche : $\underline{\underline{V}}^q=\underline{\underline{V}}^c\oplus\underline{\underline{V}}^{di}$
$\underline{\underline{S}}^q$, espace des semimartingales quasi-continues à gauche : $\underline{\underline{S}}^q=\underline{\underline{L}}^q+\underline{\underline{V}}^q$ (somme non directe)
$\underline{\underline{S}}^{da}$, espace défini par $\underline{\underline{S}}^{da}=\underline{\underline{L}}^{dp}+\underline{\underline{V}}^{da}$ (semimartingales purement discontinues à sauts accessibles). On a évidemment

(3) $$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}}^q \oplus \underline{\underline{S}}^{da}$$

On remarquera que $\underline{\underline{S}}$, $\underline{\underline{S}}^d$, $\underline{\underline{S}}^{da}$ sont invariants par changement équivalent de probabilités. Il en est donc de même pour la décomposition (3).

La proposition suivante est la remarque essentielle de cette section.

PROPOSITION 1. *Toute semimartingale continue appartenant à $\underline{\underline{L}}^d+\underline{\underline{V}}^{da}$ est nulle*.

DEMONSTRATION. Soit X une telle semimartingale. On peut écrire

$$X = M+A = L+V \text{ avec } M\in\underline{\underline{L}}^c,\ A\in\underline{\underline{V}}^c,\ L\in\underline{\underline{L}}^d,\ V\in\underline{\underline{V}}^{da}\ .$$

On a d'abord $M=L+V-A$, qui n'a pas de partie martingale locale continue, donc $M=0$. Alors $V-A=-L$ est une martingale locale, donc comme A est prévisible, V est à variation localement intégrable, et $A=\tilde{V}$. Mais le compensateur prévisible d'un élément de $\underline{\underline{V}}^{da}$ est purement de sauts, donc $A=0$, et $X=0$.

Nous poserons alors

$$\underline{\underline{S}}^\nu = \underline{\underline{S}}^c \oplus (\underline{\underline{L}}^d+\underline{\underline{V}}^{da}) \tag{4}$$

somme qui est directe d'après la proposition 1. Les éléments de $\underline{\underline{S}}^\nu$ seront appelés *semimartingales normales*, et la décomposition (4) exprime la possibilité de définir la *partie semimartingale continue* d'une semimartingale normale (elle même à nouveau décomposable, puisque $\underline{\underline{S}}^c=\underline{\underline{L}}^c\oplus\underline{\underline{V}}^c$).

Toute semimartingale spéciale est normale, car l'espace des semimartingales spéciales s'écrit $\underline{\underline{L}}\oplus\underline{\underline{V}}^p$, et $\underline{\underline{L}}=\underline{\underline{L}}^c\oplus\underline{\underline{L}}^d\subset\underline{\underline{S}}^\nu$, $\underline{\underline{V}}^p\subset\underline{\underline{V}}^c\oplus\underline{\underline{V}}^{da}\subset\underline{\underline{S}}^\nu$. Comme la notion de semimartingale spéciale, la notion de semimartingale normale n'est préservée que par les changements de probabilités avec densité bornée. On a un critère de normalité tout à fait analogue à la caractérisation usuelle des semimartingales spéciales. Avant de l'énoncer, rappelons que si X est une semimartingale, l'ensemble $J(X)=\{\Delta X\neq 0\}$ est une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt. En ne conservant que les parties totalement inaccessibles de cas graphes, on obtient l'ensemble $J_i(X)$ des *instants de sauts totalement inaccessibles* de X. Si nous notons $X=X^q+X^{da}$ la décomposition (3) de X, on a $J_i(X)=J(X^q)$.

Avec ces notations, on a

PROPOSITION 2. *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

a) X *est normale*

b) X^q *est spéciale*

c) *Le processus* $\Sigma_{s\in J_i(X),s\leq t} |\Delta X_s| I_{\{|\Delta X_s|>1\}}$ *est localement intégrable*

d) *Pour toute décomposition* $X=M+A$ ($M\in\underline{\underline{L}}$, $A\in\underline{\underline{V}}$) *le processus* $\Sigma_{s\in J_i(A),s\leq t} |\Delta A_s|$ *est localement intégrable* .

DEMONSTRATION. Comme X^{da} est toujours normale, il est équivalent de dire que X est normale ou que X^q est normale. Ecrivons $X^q=Y+Z$, avec $Y\in\underline{\underline{L}}^q+\underline{\underline{V}}^c$, $Z\in\underline{\underline{V}}^{di}$; Y est spéciale. Supposons X^q normale, alors $X^q=U+V$, $U\in\underline{\underline{L}}^d$, $V\in\underline{\underline{V}}^{da}$. Les sauts de X^q sont alors les sauts totalement inaccessibles de U, et comme U est spéciale, X^q est spéciale. La réciproque étant évidente, on voit que a)<=>b). Alors c) exprime le critère usuel pour que X^q soit spéciale. Dans la décomposition d), M est toujours normale , il faut donc simplement exprimer que A est normale, i.e. que $\Sigma_{s\in J_i(A),s\leq t}|\Delta A_s|I_{\{|\Delta A_s|\geq 1\}}$ est localement intégrable. Mais par ailleurs $\Sigma_{s\in J_i(A),s\leq t}|\Delta A_s|I_{\{|\Delta A_s|<1\}}$ est toujours localement intégrable, et par addition on obtient la condition de l'énoncé.

2. L'INTEGRALE STOCHASTIQUE DES PROCESSUS OPTIONNELS

Soient X une semimartingale, H un processus optionnel (nous supposons pour l'instant que H est borné, pour fixer les idées). Yor a défini dans [2] l'intégrale optionnelle non compensée H·X de la manière suivante : on dit que H est X-<u>intégrable</u> s'il existe un processus prévisible borné K, tel que l'ensemble $\{K\neq H\}$ soit mince, et que l'on ait pour tout t

(5) $$\Sigma_{s\leq t}|K_s-H_s||\Delta X_s| < \infty \text{ p.s.}$$

On pose alors

(6) $$(H\cdot X)_t = (K\cdot X)_t + \Sigma_{s\leq t}(H_s-K_s)\Delta X_s \ .$$

qui ne dépend pas du processus prévisible K utilisé. Dans [1], chap. VIII, n°73, Dellacherie et Meyer font remarquer que si la filtration est quasi-continue à gauche, et s'il existe un processus prévisible K satisfaisant à (5), alors le processus prévisible ${}^pH$ satisfait aussi à (5), et ils en déduisent par exemple que si H est à la fois X-intégrable et Y-intégrable, H est (X+Y)-intégrable, et H·(X+Y)=H·X+H·Y, propriété qu'on ne sait pas démontrer en général pour l'intégrale de Yor.

En utilisant les décompositions de la section précédente, nous allons modifier la définition de Yor, de manière à obtenir dans tous les cas une intégrale stochastique optionnelle raisonnable.

LEMME. <u>Soient</u> X <u>une semimartingale</u>, H <u>un processus prévisible</u> (non nécessairement localement borné) X-<u>intégrable</u>, <u>et soit</u> Y=H·X . <u>Soient</u>

$$X = X^q+X^{da} \quad , \quad Y = Y^q+Y^{da} \quad ,$$

<u>les décompositions de</u> X <u>et</u> Y <u>suivant</u> $\underline{\underline{S}}^q \oplus \underline{\underline{S}}^{da}$. <u>Alors</u> H <u>est séparément intégrable p.r.à</u> X^{da} <u>et</u> X^q, <u>et l'on a</u>

$$Y^{da}=H\cdot X^{da} \quad , \quad Y^q = H.X^q$$

DEMONSTRATION. C'est évident lorsque X est une martingale locale ou un processus à variation finie, l'i.s. H·X existant au sens usuel. Le cas général en résulte par addition, compte tenu de l'unicité de la décomposition (3).

En ce qui concerne la première de ces deux intégrales stochastiques, nous remarquerons aussi que $Y^{da}=H\cdot X^{da}$ est l'unique élément de $\underline{\underline{S}}^{da}$ dont le processus de sauts est $H\Delta X^{da}$.

Soit maintenant H un processus <u>optionnel</u>. Nous allons définir H·X en appliquant les trois règles ci-dessous :

1) H est X-intégrable si et seulement si H est séparément X^{da}-intégrable et X^q-intégrable, et alors $H\cdot X = H\cdot X^{da} + H\cdot X^q$.

2) H est X^{da}-intégrable si et seulement s'il existe une semimartingale Y telle que $\Delta Y = H\Delta X^{da}$. Nous posons alors $H\cdot X^{da} = Y^{da}$; $H\cdot X^{da}$ peut être caractérisé comme l'unique élément de $\underline{\underline{S}}^{da}$ dont le processus des sauts est $H\Delta X^{da}$.

3) H est X^q-intégrable si et seulement s'il existe un processus prévisible K, X^q-intégrable, tel que l'ensemble $\{K\neq H\}$ soit mince et que le processus croissant $\Sigma_{s\leq t} |K_s-H_s||\Delta X^q_s|$ soit à valeurs finies. On pose alors

$$(H\cdot X^q)_t = (K\cdot X^q)_t + \Sigma_{s\leq t} (H_s-K_s)\Delta X^q_s .$$

C'est donc l'i.s. de Yor, mais on a de plus la propriété que, s'il existe un processus K satisfaisant à la définition, tout processus prévisible $\overline{K}$ tel que $\{\overline{K}\neq H\}$ soit mince les possède. En effet, $\overline{K}-K$ est prévisible mince, les sauts de X^q sont totalement inaccessibles, donc $\Sigma_s |\overline{K}_s-K_s||\Delta X^q_s| = 0$, et le remplacement de K par $\overline{K}$ ne change rien.

Il est facile de voir que cette définition de l'i.s. optionnelle, un peu plus générale que celle de Yor, ne présente plus de difficulté quant à la vérification de l'additivité $H\cdot(X+Y)=H\cdot X+H\cdot Y$.

L'intégrale peut s'étendre aux processus progressifs : étant donné un processus progressif H, il existe un processus optionnel H' unique tel que $H_T=H'_T$ p.s. pour tout temps d'arrêt T ($H'={}^oH$ si H est borné ; pour définir H' en général, prendre $H'=f^{-1}({}^o(f(H)))$, où f est une bijection croissante de $[-\infty,\infty]$ sur $[0,1]$). On dit alors que H est X-intégrable si et seulement si H' l'est, et on pose $H\cdot X = H'\cdot X$.

[1]. C. Dellacherie et P.A. Meyer. Probabilités et Potentiels B. Hermann, Paris 1980.

[2]. M. Yor. En cherchant une définition naturelle des intégrales stochastiques optionnelles. Sém. Prob. XIII, Lect. Notes in M. n°721, Springer 1979.

Institut de Recherche Mathématique
Academia Sinica, Pékin, Chine

Note sur les épreuves : Je remercie vivement P.A. Meyer pour les améliorations apportées à cette note lors de la frappe définitive (Y.J-A.).