

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JIA-AN YAN

Caractérisation d'une classe d'ensembles convexes de L^1 ou H^1

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 220-222

[<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__220_0>](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__220_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CARACTERISATION D'UNE CLASSE D'ENSEMBLES CONVEXES DE L^1 OU H^1
par YAN Jia-An¹

Le théorème de Dellacherie et Mokobodzki sur la caractérisation des semimartingales repose sur le seul résultat suivant (voir Meyer [1] ou Jacod [2])

Théorème 1. Soit K un sous-ensemble convexe de $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un réel $c > 0$ tel que $P\{\xi > c\} \leq \varepsilon$ pour tout $\xi \in K$, il existe une variable aléatoire bornée Z , telle que $Z > 0$ p.s. et que $\sup_{\xi \in K} E[Z\xi] < \infty$.

Le but de cette note est de préciser le théorème 1, et d'établir un résultat analogue dans l'espace H^1 de martingales.

Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace probabilisé. Nous désignerons par L^1 l'espace $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, par B_+ l'ensemble des v.a. bornées ≥ 0 sur Ω . Pour $G \subset L^1$, \bar{G} désigne l'adhérence de G dans L^1 . Nous mettons alors le théorème 1 sous forme de condition nécessaire et suffisante.

Théorème 2. Soit K un sous-ensemble convexe de L^1 tel que $0 \in K$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- a) Pour tout $\eta \in L_+^1$, $\eta \neq 0$, il existe $c > 0$ tel que $c\eta \notin \overline{K-B_+}$.
- b) Pour tout $A \in \mathcal{F}$ tel que $P(A) > 0$, il existe $c > 0$ tel que $cI_A \notin \overline{K-B_+}$.
- c) Il existe une v.a. bornée Z telle que $Z > 0$ p.s. et $\sup_{\xi \in K} E[Z\xi] < +\infty$.

Démonstration. Il est clair que a) \Rightarrow b). Nous allons montrer que b) \Rightarrow c), en nous inspirant beaucoup de Meyer [1]. Supposons que la condition b) soit vérifiée. Soit $A \in \mathcal{F}$ tel que $P(A) > 0$. Par hypothèse il existe un réel $c > 0$ tel que $cI_A \notin \overline{K-B_+}$. Comme le dual de L^1 est L^∞ et $K-B_+$ est convexe, d'après le théorème de Hahn-Banach (plus précisément, le théorème d'Ascoli-Mazur) il existe une v.a. bornée Y telle que

$$(1) \quad \sup_{\xi \in K, \eta \in B_+} E[Y(\xi - \eta)] < cE[YI_A] .$$

Remplaçant η par $a\eta$ ($a \in \mathbb{R}_+$) et faisant tendre a vers $+\infty$, on voit que $Y \geq 0$ p.s.. Appliquant (1) avec $\eta = 0$, on trouve alors

$$\sup_{\xi \in K} E[Y\xi] \leq cE[YI_A] < +\infty .$$

Soit $H = \{ Y \in B_+ : \sup_{\xi \in K} E[Y\xi] < +\infty \}$; d'après ce qui précède H n'est pas vide. Notons $\underline{C} = \{ \{Z=0\}, Z \in H \}$, montrons que \underline{C} est stable par intersection dénombrable. Soit (Z_n) une suite d'éléments de H . Notons

1. Institut de Recherche Mathématique, Academia Sinica, Pékin, Chine.

$c_n = \sup_{\xi \in K} E[Z_n \xi]$, $d_n = \|Z_n\|_{L^\infty}$, et posons $Z = \sum_n b_n Z_n$, où les $b_n > 0$ sont tels que $\sum_n b_n c_n < +\infty$, $\sum_n b_n d_n < +\infty$; il est évident que $Z \in H$ et que $\{Z=0\} = \bigcap_n \{Z_n=0\}$. Il existe donc $Z \in H$ tel que $P\{Z=0\} = \inf_{C \in \mathcal{G}} P(C)$, nous allons montrer que $Z > 0$ p.s.. Supposons que $P\{Z=0\} > 0$. Soit $Y \in H$ vérifiant (1) avec $A = \{Z=0\}$. Comme $0 \in K$, on a $0 < E[YI_A] = E[YI_{\{Z=0\}}]$, et alors la v.a. $Y+Z$ appartient à H , avec $P\{Y+Z=0\} = P\{Z=0\} - P\{Z=0, Y>0\} < P\{Z=0\}$, ce qui est absurde puisque $P\{Z=0\}$ est minimale. Donc $Z > 0$ p.s. et on a démontré que b) \Rightarrow c).

Il nous reste à démontrer que c) \Rightarrow a). Supposons que la condition a) ne soit pas satisfaite. Il existe alors $\eta \in L_+^1$, $\eta \neq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $n\eta \notin \overline{K-B_+}$, de sorte qu'il existe $\xi_n \in K$, $\zeta_n \in B_+$ et $\delta_n \in L_+^1$ tels que $n\eta = \xi_n - \zeta_n - \delta_n$, $\|\delta_n\|_{L_+^1} \leq 1/n$. Si Z est une v.a. bornée par 1 telle que $Z > 0$ p.s. on a alors $E[Z\xi_n] \geq nE[Z\eta] - 1/n$, donc $\sup_{\xi \in K} E[Z\xi] = +\infty$, et la condition c) n'est pas satisfaite. CQFD.

Pour voir que le théorème 2 entraîne le théorème 1, on peut se ramener par translation au cas où $0 \in K$. Vérifions alors que l'hypothèse du théorème 1 entraîne la condition b) du théorème 2. Soit $A \in \mathcal{F}$ tel que $P(A) > 0$. Par hypothèse il existe un réel $c > 0$ tel que $P\{\xi > c\} \leq P(A)/2$ pour tout $\xi \in K$. On voit aisément que $2cI_A \notin \overline{K-B_+}$, donc la condition b) est satisfaite.

Passons au cas de H^1 . Nous nous plaçons sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$ satisfaisant aux conditions habituelles. Nous ne restreignons pas la généralité en supposant que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\infty-}$, ce qui nous permet d'identifier une martingale uniformément intégrable (M_t) à sa v.a. terminale M_∞ (ainsi I_A désigne ci-dessous la martingale $P(A|\mathcal{F}_t)$, pour $A \in \mathcal{F}$). Dans l'énoncé suivant, B_+ désigne l'ensemble des martingales positives bornées, et les adhérences sont prises dans H^1 .

Théorème 3. Soit K un sous-ensemble convexe de H^1 contenant 0. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- a) Pour tout $N \in H_+^1$, $N \neq 0$, il existe un réel $c > 0$ tel que $cN \notin \overline{K-B_+}$.
- b) Pour tout $A \in \mathcal{F}$ tel que $P(A) > 0$, il existe $c > 0$ tel que $cI_A \notin \overline{K-B_+}$.
- c) Il existe une martingale $Z \in BMO$, telle que $Z > 0$ p.s. et que l'on ait $\sup_{\xi \in K} E[[Z, \xi]_\infty] < +\infty$.

Démonstration. Le raisonnement est tout à fait analogue à celui du théorème 2 : on applique le théorème de Hahn-Banach en utilisant le fait que le dual de H^1 est BMO , la dualité étant donnée par $\langle \xi, Y \rangle = E[[\xi, Y]_\infty]$ en général (qui vaut aussi $E[\xi Y]$ si $\xi \in B_+$). Les détails sont laissés aux lecteurs.

- [1]. Meyer (P.A.). Sémin. Prob. XIII, p.620-623 (LN 721, Springer 1979).
- [2]. Jacod (J.). Calcul stochastique et problèmes de martingales. LN 714.

COMMENTAIRES DU SEMINAIRE

1) Détails de démonstration. Au bas de la page 1, il est clair que H n'est pas vide, car $0 \in H$. Le "d'après ce qui précède" est donc inutile. Page 2, de même, le fait que $0 \in K$ entraîne que les c_n sont ≥ 0 .

2) Commentaires (C. Dellacherie). a) Tout élément de L_+^1 étant limite d'une suite d'éléments de B_+ , on peut remplacer $\overline{K-B_+}$ par $\overline{K-L_+^1}$ (soit dit en passant, on ne peut ni ôter l'adhérence au $K-L_+^1$, ni omettre que $0 \in K$), et la condition $\zeta \in \overline{K-L_+^1}$ peut s'écrire

$$\text{il existe des } k_n \in K \text{ tels que } (\zeta - k_n)^+ \rightarrow 0 \text{ p.s.}$$

b) La démonstration du théorème 1 par Mokobodzki permet de montrer que, étant donnée une suite (K_n) de convexes bornés en probabilité, il existe une même v.a. bornée Z , p.s. > 0 , telle que $\sup_{\xi \in K_n} E[Z\xi] < \infty$ pour tout n . Peut on démontrer ce résultat par la méthode de Yan ?

Réponse (P.A. Meyer) : ce résultat peut se déduire directement du théorème 1, et donc aussi bien de la démonstration de Yan que de celle de Mokobodzki ! En effet, soit pour $n \geq 0$, $m \geq 1$ un nombre $c_{nm} > 0$ tel que

$$\forall \xi \in K_n, P\{\xi > c_{nm}\} \leq \frac{1}{m} 2^{-(n+1)}$$

Choisissons des $\lambda_n > 0$ tels que, pour tout m , on ait $c_m = \sum_n \lambda_n c_{nm} < \infty$.

Posons $L_k = \sum_{p \leq k} \lambda_p K_p$; nous formons ainsi une suite croissante de parties convexes de L^1 , soit L leur réunion, qui est encore une partie convexe de L^1 . Tout élément ξ de L est une somme (finie) $\sum_n \lambda_n \xi_n$, $\xi_n \in K_n$, et on a

$$P\{\xi \geq c_m\} \leq \sum_n P\{\xi_n \geq c_{nm}\} \leq \sum_n \frac{1}{m} 2^{-(n+1)} = \frac{1}{m}$$

donc L satisfait au théorème 1, et la v.a. Z construite pour L convient pour chacun des K_n (cette astuce d'enveloppe convexe non fermée est empruntée à une autre démonstration de Mokobodzki !).