

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN PELLAUMAIL

Remarques sur l'intégrale stochastique

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 209-219

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__209_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

REMARQUES SUR L'INTEGRALE STOCHASTIQUE

J. PELLAUMAIL (*)

1. INTRODUCTION

Le but de l'exposé qui suit est de donner quelques remarques très simples, en liaison avec la construction de l'intégrale stochastique et l'étude des équations différentielles stochastiques. Le théorème 2 donné au § 5 ci-après, quoique d'un énoncé extrêmement simple, généralise les principaux théorèmes d'existence et d'unicité d'équations différentielles stochastiques dans le cas lipschitzien. Cet exposé s'adresse à des lecteurs familiarisés avec la terminologie classique : notamment on ne redonne pas la définition de termes tels que adapté, martingale, prévisible, temps d'arrêt, etc... Rappelons seulement ce qui suit :

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$ une base stochastique avec $T = [0, t_m]$.

Deux processus X et Y définis sur cette base stochastique sont dits P-équivalents si $P \{ \omega : \exists t, X_t(\omega) \neq Y_t(\omega) \} = 0$

Un processus X est dit prélocalement borné s'il existe une suite croissante $(u(k))_{k > 0}$ de temps d'arrêt telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} P([u(k) < u]) = 0$ et, pour

tout entier k, $X.1_{[0, u(k)[}$ est uniformément borné.

2. SUR LA DEFINITION DE L'INTEGRALE STOCHASTIQUE

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$ une base stochastique et H un espace de Banach séparable. Considérons le problème de la définition de l'intégrale stochastique $\int Y dX$ d'un processus prévisible réel uniformément borné Y par rapport à un processus X à valeurs dans H. On peut faire plusieurs sortes d'hypothèses sur le processus X, notamment :

a) Le processus X est un R- π -processus, (resp. R- π^* -processus), c'est-à-dire qu'il existe un processus Q cadlag adapté croissant tel que pour tout temps d'arrêt u et pour tout processus prévisible réel Y uniformément borné, on ait :

(*) Université de Rennes

$$E \left\{ \left| \int_{0,u} Y dX \right|^2 \right\} \text{ (resp. } E \left\{ \sup_{t < u} \left| \int_{0,t} Y dX \right|^2 \right\} \right) \leq E \left\{ Q_u^- \cdot \int_{0,u} |Y|^2 dQ_t \right\}$$

b) Le processus X est 0-sommable c'est-à-dire que l'application $A \rightarrow \int_A dX$ est une mesure définie sur la tribu des prévisibles et à valeurs dans l'espace $L_0^H(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

c) Le processus X est une semi-martingale, c'est-à-dire la somme d'une martingale locale et d'un processus à variation bornée.

Dans le cas particulier où H est un espace vectoriel de dimension finie, les trois propriétés ci-dessus a), b), et c) sont équivalentes (cf. MeP-2). Notons à ce sujet, que le fait que b) implique c) (théorème de Dellacherie, Meyer, Mokobodski) repose sur un lemme topologique essentiellement dû à Nikishin (cf. [Nik]).

Dans le cas où H n'est pas de dimension finie, on a c) implique a) et a) implique b) mais ceci n'est pas réciproque.

La condition c) a été introduite et étudiée systématiquement par l'école de Strasbourg. La condition b) est évidemment la condition naturelle pour avoir une "bonne définition" de l'intégrale stochastique : il faut noter que si cette condition est satisfaite, on peut prouver la formule de Ito ; Par contre, la condition b) ne semble pas suffisante pour prouver l'existence et l'unicité des solutions d'équations différentielles stochastiques ; pour obtenir de tels résultats, la "bonne hypothèse" semble de supposer que X est un π^* -processus.

Il faut aussi remarquer que la condition a) est très commode pour construire et étudier l'intégrale stochastique ; c'est cette condition qui est utilisée au début dans [MeP-2], pour des motifs pédagogiques : la condition b) est plus générale mais sa mise en oeuvre nécessite l'utilisation de théorèmes difficiles sur les mesures vectorielles.

De plus, la condition a) permet de définir l'intégrale stochastique $\int Y dX$ pour une classe très vaste de processus Y . Plus précisément, on a le théorème suivant sous une forme qui m'a été suggérée par M. Meyer :

3. INTEGRALE STOCHASTIQUE MAXIMALE

Théorème 1 : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in T})$ une base stochastique avec $T = [0, t_m]$.

Soit X un π -processus à valeurs dans un espace de Banach H séparable, dominé par le processus Q c'est-à-dire que, pour tout temps d'arrêt u et pour tout processus prévisible réel Y , on a :

$$E\left\{\left|\int_{]0,u[} Y \, dX\right|^2\right\} \leq E\left\{Q_{u-} \cdot \int_{]0,u[} |Y|_t^2 \, dQ_t\right\}$$

Soit v un temps d'arrêt.

Soit U un processus réel prévisible tel que le processus $W_t = \int_{]0,t]} |U|_s^2 \cdot dQ_s$ soit fini pour $t < v$, ce qui est notamment le cas si U est prélocalement borné sur $]0, v[$.

Alors, le processus intégrale stochastique $Z_t = \int_{]0,t]} Y \, dX$ est bien défini sur l'intervalle $]0, v[$.

Preuve :

Pour tout k , on pose $w(k) := v \wedge \inf. \{t : W_t > k\}$.

L'intégrale stochastique Z se construit comme une intégrale L^2 ordinaire sur $]0, w(k)[$ (cf. [MeP-2]) et on a un processus intégrale stochastique Z^k sur $]0, w(k)[$; ensuite, l'unicité de l'intégrale stochastique permet de définir Z sur $]0, v[$ par $Z \cdot 1_{]0, w(k)[} = Z^k \cdot 1_{]0, w(k)[}$

4. DONNEES ET NOTATIONS

Dans la suite, on considère :

- T un intervalle borné $[0, t_m]$ de l'axe réel
- H un espace vectoriel topologique muni d'une distance d , compatible avec sa topologie, pour laquelle H est séparable et complet ; on posera $\|h\| = d(h, 0)$.
- $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}) = B^I$ une base stochastique complète, la famille $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ étant supposée continue à droite : quand on parlera de processus adapté, de temps d'arrêt, etc..., ce sera toujours par rapport à cette base de processus.

On notera S (resp. S_b) l'espace des processus (resp. des processus uniformément bornés) cadlag adaptés à la base B^I , à valeurs dans H et définis à une P -équivalence près. On notera C l'ensemble des processus croissants positifs cadlag adaptés à la base B^I .

5. THEOREME D'EXISTENCE ET D'UNICITE

Théorème 2 : Soit f une application de S_b dans S satisfaisant aux deux conditions suivantes :

- (i) f est non anticipative au sens suivant : pour tout temps d'arrêt u , $X \in S_b$, $Y \in S_b$ et $X.1_{[0,u[} = Y.1_{[0,u[}$ implique $f(X).1_{[0,u[} = f(Y).1_{[0,u[}$
- (ii) pour tout réel $d > 0$ il existe un élément Q^d de C tel que, si X et Y sont deux éléments de S uniformément bornés par d , on a, pour tout temps d'arrêt u :
- $$E \left\{ \sup_{t < u} \|f(X)_t - f(Y)_t\|^2 \right\} \leq E \left\{ Q_{u-}^d \cdot \int_{[0,u[} \sup_{s < t} \|X_s - Y_s\|^2 \cdot d Q_t^d \right\}$$

Alors il existe un temps d'arrêt prévisible v et un processus X définis sur $[0,v[$ tels que, si on pose $w(k) := v \wedge \inf. \{t : \|X_t\| > k\}$, on a :

$$(iii) \quad X.1_{[0,w(k)[} = f(X).1_{[0,w(k)[}$$

$$(iv) \quad \text{pour tout entier } k, \quad P([w(k) < v < t_m]) = P([v < t_m])$$

$$(v) \quad w(k) \uparrow v$$

De plus, $X.1_{[0,v[}$ est unique à une P -équivalence près.

Preuve :

Tout d'abord, soit $(u(n))_{n>0}$ une suite de temps d'arrêt croissant vers un temps d'arrêt u . Soit X un processus appartenant à S tel que, pour tout entier n , $X.1_{[0,u(n)[}$ soit uniformément borné par n . Alors $f(X)$ est défini, à une P -équivalence près, sur le domaine $U = \bigcup_{n>0} [0,u(n)[$ (compte-tenu de

la condition (i)). Notamment le processus $f(X)$ est défini, à une P -équivalence près, pour tout processus X prélocalement borné.

De plus, si u est un temps d'arrêt et si X est un processus défini sur $[0, u[$ tel que $X.1_{[0, u[}$ appartienne à S et soit prélocalement borné, alors $f(X.1_{[0, u[})$ est défini sur $[0, u[$; dans ce cas, par abus de notation, on pose $f(X) := f(X.1_{[0, u[})$ sur $[0, u[$.

La preuve du théorème ci-dessus, à quelques détails formels près, est exactement la même que celle proposée en [MeP-1] ; voir aussi [MeP-2] . Nous la reproduisons dans le contexte ici proposé pour la commodité du lecteur.

Cette preuve se décompose en trois étapes :

- unicité (§ 6)
- extension d'une solution (§ 7)
- solution maximale (§ 8).

6. UNICITE

On se place sous les hypothèses du théorème 2. Soit v et v' deux temps d'arrêt et X et X' deux processus définis respectivement sur $[0, v[$ et $[0, v'[$ et tels que $X = f(X)$ sur $[0, v[$ et $X' = f(X')$ sur $[0, v'[$. Alors, X est P -équivalent à X' sur $[0, v \wedge v'[$.

Preuve :

On pose : $u := v \wedge v' \wedge \inf. \{t : ||X_t - X'_t|| > 0\}$.

Si $P[u < (v \wedge v')] = 0$, l'unicité est démontrée. On suppose donc

$P[u < (v \wedge v')] > 0$. Les processus X et X' étant cadlag, il existe un nombre positif d et un temps d'arrêt w' tels que

$$\sup_{u \leq s < w'} (||X_s|| + ||X'_s||) \leq d$$

$$P([w' > u]) > 0 \text{ et } w' \leq (v \wedge v')$$

Soit Q^d le processus intervenant dans la condition (ii).

Soit w le temps d'arrêt défini par

$$w := w' \wedge \inf. \{t : t \geq u, Q_t^d(Q_t^d - Q_u) > \frac{1}{2}\}$$

On pose $h := E \left\{ \sup_{u \leq s < w} \|X_s - X'_s\|^2 \right\}$ et on a :

$$h = E \left\{ \sup_{u \leq s < w} \|f(X)_s - f(X')_s\|^2 \right\}$$

$$\leq E \left\{ Q_{w-}^d \cdot \int_{]0, w[} \sup_{s < t} \|X_s - X'_s\|^2 \cdot dQ^d \right\}$$

$$\leq 1/2 h \text{ ce qui implique } h = 0 \text{ et } P[u < (v \wedge v')] = 0.$$

7. EXTENSION D'UNE SOLUTION

On se place sous les hypothèses du théorème 2. Soit X un processus défini sur $[0, u[$ tel que $X.1_{]0, u[}$ appartient à S et tel que $X = f(X)$ sur $[0, u[$. On suppose que :

$$P \{w : u(w) < t_m \text{ et } \lim_{t \rightarrow u(w)} \|X_t(w)\| < +\infty\} = a > 0$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un temps d'arrêt v et un processus Y tels que :

$$(i)' \quad P[v > u] \geq a - 2\varepsilon$$

$$(ii)' \quad Y.1_{]0, v[} \text{ appartient à } S \text{ et } Y \text{ est } P\text{-équivalent à } f(Y) \text{ sur } [0, v[$$

$$(iii)' \quad X \text{ est } P\text{-équivalent à } Y \text{ sur } [0, u[$$

Preuve :

Soit $d > 0$ tel que, si on pose $u' := u \wedge \inf. \{t : \|x_t\| > \frac{1}{2} d\}$

on a $P[u' = u < t_m] \geq a - \varepsilon$. On pose $X^0 := X.1_{]0, u'[}$, $X^1 := f(X^0)$,

$u(1) := \inf. \{t : t \geq u', Q_t^d(Q_t^d - Q_{u'}^d) > \frac{1}{8}, \|x_t^1 - x_t^0\| > (\frac{1}{4} d \wedge \frac{\sqrt{\varepsilon d}}{32})\}$.

La continuité à droite de Q^d , X^0 et X^1 implique que l'on a

$P[u(1) > u'] = P[u' < t_m]$. On construit alors la suite $(u(k))_{k \geq 1}$ de temps

d'arrêt et la suite associée de processus $(X^k)_{k \geq 0}$ de la façon suivante :

pour $k \geq 1$, $X^{k+1} := f(X^k) \cdot 1_{[0, u(k)[$

$$u(k+1) := u(k) \wedge \inf.\{t : \|X_t^{k+1} - X_t^k\| > 2^{-(k+2)}\} . d$$

La suite de temps d'arrêt $(u(k))_{k \geq 0}$ décroît vers un temps d'arrêt w et, pour tout k on a $\|X_t^{k+1}\| \leq d$ sur $[0, u(k+1)[$.

On pose $h_k := E\{\sup_{t < u(k+1)} \|X_t^{k+1} - X_t^k\|^2\}$ et on a :

$$\begin{aligned} h_k &= E\left\{\sup_{t < u(k+1)} \|f(X^k)_t - f(X^{k-1})_t\|^2\right\} \\ &\leq E\left\{Q_{u(k)-}^d \int_{[0, u(k)[} \sup_{s < t} \|X_s^k - X_s^{k-1}\|^2 \cdot d Q_t^d\right\} \\ &\leq \frac{1}{8} h_{k-1} \leq \left(\frac{1}{8}\right)^{k-1} h_1 \leq \left(\frac{1}{8}\right)^{k+2} \varepsilon d^2 \end{aligned}$$

Or $P[u(k+1) < u(k)] \leq h_k \cdot 4^{(k+2)} d^{-2} \leq 2^{-(k+2)} \cdot \varepsilon$ puisque $u(k+1) < u(k)$ implique $\|X^{k+1} - X^k\|^2 \geq 4^{-(k+2)} d^2$

$$\begin{aligned} \text{On a donc } P[w < u(1)] &\leq \varepsilon \quad \text{donc} \\ P[w > u \text{ et } u < t_m] &\geq a - 2\varepsilon \end{aligned}$$

Par ailleurs, la suite $(X^k)_{k \geq 0}$ est de Cauchy uniformément par trajectoires sur $[0, w[$ (lemme de Borel-Cantelli) et uniformément bornée par d , cette suite converge donc, sur $[0, w[$, vers un processus cadlag Z tel que $Z = f(Z)$ sur $[0, w[$ puisque $\lim_{k \rightarrow \infty} E\{\sup_{t < w} \|X_t^k - Z_t\|^2\} = 0$.

Le lemme d'extension est alors démontré en prenant $Y = X$ sur $[0, u[$ et $Y = Z$ sur $[0, w[$ (par construction, $Y = Z$ sur $[0, u \wedge w[$).

8. SOLUTION MAXIMALE

On se propose maintenant de prouver le théorème 2 en utilisant les deux lemmes précédents.

On considère la famille A des temps d'arrêt u tels qu'il existe X avec $X = f(X)$ sur $[0, u[$. On désigne par v le sup. essentiel (pour P) des éléments de A. Si u et u' appartiennent à A, X et X' étant les processus associés, on peut poser

$$X'' := X.1_{[0, u[} + X'.1_{[u, u \vee u' [}$$

et on a $X'' = f(X'')$ sur $[0, u \vee u' [$ (condition (i) du théorème 1). On peut donc extraire de A une suite croissante $(u(n))_{n > 0}$ de temps d'arrêt telle que $v = \lim_{n \rightarrow \infty} u(n)$. Pour tout n , soit X^n tel que $X^n = f(X^n)$ sur $[0, u(n) [$; on peut alors définir le processus X sur $[0, v[$ en posant $X.1_{[0, u(n) [} = X^n.1_{[0, u(n) [}$ (compte-tenu du lemme d'unicité).

On considère alors la suite de temps d'arrêt :

$$w(n, k) := u(n) \wedge \inf \{t : \|X_t\| > k\}$$

$$w(k) := \sup_n w(n, k)$$

On a $w(k) \leq v$ et on veut prouver que

$$P([w(k) = v < t_m]) = 0$$

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un entier k tel que

$$P([w(k) = v < t_m]) = 2\varepsilon > 0$$

Par construction, $X = f(X)$ sur $[0, w(k) [$. De plus, comme le processus X est borné par k sur $[0, w(k) [$, $f(X) = f \circ f(X)$ sur $[0, w(k) [$. Le lemme d'extension nous permet alors de dire qu'il existe un temps d'arrêt w' qui appartient à A et tel que :

$$P([w' > w(k)]) > P([w(k) < t_m]) - \varepsilon$$

ceci implique $P([w' > v]) > \varepsilon$, ce qui contredit la définition de v .

On a donc prouvé que, pour tout entier k ,

$$P([w(k) = v < t_m]) = 0$$

La suite $(w(k))_{k > 0}$ est donc une suite qui "annonce" v et v est un temps d'arrêt prévisible ce qui achève la preuve du théorème 2.

9. GENERALISATIONS

Pour alléger l'exposition, on s'est volontairement placé dans un cadre simple à formaliser. Quoique le cadre considéré ici soit déjà très général, il est évidemment possible d'affaiblir les diverses hypothèses :

1°) Dans la condition (ii) du théorème 2, on peut remplacer (dans les deux membres) $||.||^2$ par tout autre fonction croissante de $||.||$.

2°) Il n'est pas nécessaire que $f(X)$ soit un processus partout défini quand X est uniformément borné : il suffit que X soit défini jusqu'à un temps d'arrêt u tel que $\lim_{t \uparrow u} ||X_t|| = +\infty$ si $u < t_m$

3°) Dans la condition (ii), il suffit d'avoir une majoration de la forme

$$\leq E \left\{ \hat{Q}_u^d \int_{]0, u[} \sup_{s < t} ||X_s - Y_s||^2 \cdot d Q_t^d \right\}$$

où \hat{Q}^d appartient à C et Q^d est une mesure aléatoire positive "continue à droite".

4°) Si le processus "dominant" Q est prévisible, il suffit d'avoir la majoration (ii) le saut en u compris : on utilise le fait que, si $v := \inf.\{t : Q_t > d\}$, v est prévisible est donc peut-être annoncé par une suite de temps d'arrêt strictement plus petits que v ; plus généralement, il suffit, par exemple, que l'on ait :

$$\begin{aligned} & E \left\{ \sup_{t < u} ||f(X)_t - f(Y)_t||^2 \right\} \\ & \leq E \left\{ Q_u^d \int_{]0, u[} \sup_{s < t} ||X_s - X_s||^2 \cdot d Q_t^d \right\} \\ & + E \left\{ \hat{Q}_u^d \int_{]0, u[} \sup_{s < t} ||X_s - Y_s||^2 \cdot d \hat{Q}_t^d \right\} \end{aligned}$$

avec Q^d élément de C comme avant et \hat{Q}^d élément de C et prévisible.

La technique évoquée plus haut a été utilisée par Jacod.

5°) On peut évidemment mélanger les diverses généralisations ci-dessus.

10. STABILITE

Dans le cadre considéré ici, l'étude de la stabilité de la solution X de $X = f(X)$ quand on "perturbe légèrement" f peut s'étudier exactement comme dans [MeP-2]. Plus précisément, on considère deux fonctionnelles f et f' comme dans le théorème 2. Pour simplifier, on suppose qu'il existe un élément Q de C tel que, pour tout temps d'arrêt u et pour tout couple (X, Y) d'éléments de S_b , on a :

$$E\left\{\sup_{t < u} \left| (f(X))_t - (f(Y))_t \right|^2\right\} \leq E\left\{Q_u \cdot \int_{0, u} \sup_{s < t} \left| X_s - Y_s \right|^2 \cdot dQ_t\right\}$$

et de même en remplaçant f par f' (avec le même processus Q).

Soit $d > 0$ et $v := \inf.\{t : Q_t > d\}$. Soit Z une solution de $f(Z) = Z$ sur $[0, v[$; Z est la solution dans le cas "non perturbé". On pose

$$\gamma(f') = E\left\{\sup_{t < v} \left| f(Z)_t - f'(Z)_t \right|^2\right\}$$

$$\delta(f') = E\left\{\sup_{t < v} \left| Z_t - Z'_t \right|^2\right\}$$

où Z' est la solution de $Z' = f'(Z')$ sur $[0, v[$ (Z' est la solution dans le cas perturbé).

On a alors $\lim_{\gamma(f') \downarrow 0} \delta(f') = 0$

Ceci peut se vérifier exactement comme dans [MeP-2].

BIBLIOGRAPHIE

- [Del] C. DELLACHERIE, *Capacités et processus stochastiques*, *Ergebn. der Math.*, vol. 67, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1972.
- [Dol] C. DOLEANS-DADE, *On the existence and unicity of solutions of stochastic integral equations*, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Werw. Gebiete*, 36 (1976), 93-101.
- [Eme] M. EMERY, *Stabilité des solutions des équations différentielles stochastiques, Application aux intégrales multiplicatives stochastiques*, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Werw. Geb.*, 41, (1978), 241-262.
- [GrP] B. GRAVEREAUX, J. PELLAUMAIL, *Formule de Ito pour des processus à valeurs dans des espaces de Banach*, *Ann. Inst. H. Poincaré*, 10, n°4 (1974), 339-422.
- [MeP-1] M. METIVIER, J. PELLAUMAIL, *Notions de base sur l'intégrale stochastique*, Séminaire de Rennes, 1975.
- [MeP-2] M. METIVIER, J. PELLAUMAIL, *Stochastic integration*, à paraître.
- [MeP-3] M. METIVIER, J. PELLAUMAIL, *Mesures stochastiques à valeurs dans des espaces L_0* , *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Werw. Geb.*, 40 (1977), 101-114.
- [Mey] P.A. MEYER, *Un cours sur les intégrales stochastiques*, Séminaire de probabilités X, *Lecture Notes in Mathematics*, n° 511, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976.
- [Nik] E.M. NIKISHIN, *Resonance theorems and superlinear operators*, *Transl. of Uspekhi Mat. Nauk. Vol XXV n° 6*, Nov-Déc. 1970
- [Pro] Ph. E. PROTTER, *On the existence, uniqueness, convergence and explosions of solutions of systems of stochastic integral equations*, *Ann. of Probability*, 5, n° 2 (1977), 243-261.
-