SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

ABOUBAKARY SEYNOU

Sur la compatibilité temporelle d'une tribu et d'une filtration discrète

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 14 (1980), p. 205-208
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1980__14__205_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1978/79

SUR LA COMPATIBILITE TEMPORELLE D'UNE TRIBU ET D'UNE FILTRATION DISCRETE

par Aboubakary Seynou

Dans notre note [1], nous avons étudié la compatibilité temporelle de deux tribus, i.e. l'existence d'une filtration dont deux temps d'arrêt admettent les tribus données comme tribus des événements antérieurs. Nous donnons ici deux petits résultats sur la compatibilité temporelle d'une tribu et d'une filtration discrète(1).

Nous partons de la définition suivante, que nous serons amené à modifier légèrement plus loin

DEFINITION. *Soient* $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ *un espace mesurable,* $\underline{\underline{G}}$ *une sous-tribu de* $\underline{\underline{F}}$ *et* $(\underline{\underline{F}}_n)$ *une filtration discrète sur* $(\Omega,\underline{\underline{F}})$. *On dit que* $\underline{\underline{G}}$ *et* $(\underline{\underline{F}}_n)$ *sont* temporellement compatibles *s'il existe une filtration discrète* $(\underline{\underline{H}}_n)$ *sur* $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ *satisfaisant aux conditions suivantes :*

a) *il existe un t.d'a.* S *de* $(\underline{\underline{H}}_n)$ *tel que* $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{H}}_S$;

b) *pour tout t.d'a.* T *de* $(\underline{\underline{F}}_n)$, *il existe un t.d'a.* T' *de* $(\underline{\underline{H}}_n)$ *tel que* $\underline{\underline{F}}_T = \underline{\underline{H}}_{T'}$.

On dit alors que $(\underline{\underline{H}}_n)$ réalise *la compatibilité temporelle de* $\underline{\underline{G}}$ *et de* $(\underline{\underline{F}}_n)$.

Pour soulager le travail dactylographique, nous écrirons $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$ l'intersection de deux tribus $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$, et $\underline{\underline{A}} \vee \underline{\underline{B}}$ la tribu engendrée par ces tribus ; nous noterons aussi $A \cdot B$ l'intersection de deux ensembles A et B tandis que $A + B$ désignera la réunion de A et B quand ceux-ci sont disjoints.

THEOREME 1. *Supposons que* $\underline{\underline{G}}$ *soit une sous-tribu de* $\underline{\underline{F}}_\infty = \bigvee_n \underline{\underline{F}}_n$. *Si, pour tout* n , *les tribus* $\underline{\underline{G}}$ *et* $\underline{\underline{F}}_n$ *sont temporellement compatibles, alors la tribu* $\underline{\underline{G}}$ *et la filtration* $(\underline{\underline{F}}_n)$ *sont temporellement compatibles, et la compatibilité temporelle est réalisée par la filtration* $(\underline{\underline{H}}_n)$ *définie par* $\underline{\underline{H}}_n = \underline{\underline{F}}_n \cdot (\underline{\underline{G}} \vee \underline{\underline{F}}_{n-1})$, *en convenant que* $\underline{\underline{F}}_{-1} = \{\emptyset,\Omega\}$.

---

(1) Une aide de l'ENS de Fontenay-aux Roses a permis la rédaction de cet article.

DEMONSTRATION. Le théorème 1 de [1] permet de trouver, pour tout n, un élément A_n de $\underline{\underline{G}}.\underline{\underline{F}}_n$ de sorte que l'on ait

(1) $\forall K \in \underline{\underline{G}} \vee \underline{\underline{F}}_n \quad K.A_n \in \underline{\underline{G}} \quad \text{et} \quad K.A_n^c \in \underline{\underline{F}}_n$

et, quitte à remplacer pour chaque n l'ensemble A_n par $B_n = \bigcap_{m \leq n} A_m$, <u>on peut supposer la suite</u> (A_n) <u>décroissante</u> car, pour $K \in \underline{\underline{G}} \vee \underline{\underline{F}}_n$, on a $K.B_n = (K.B_{n-1}).A_n \in \underline{\underline{G}}$ et $K.B_n^c = \bigcup_{m \leq n}(K.A_m^c) \in \underline{\underline{F}}_n$. Enfin, l'intersection A_∞ des A_n appartient à $\underline{\underline{G}} \vee \underline{\underline{F}}_\infty = \underline{\underline{F}}_\infty$, et l'<u>on a aussi</u> (1) <u>pour</u> $n = \infty$: pour $K \in \underline{\underline{F}}_\infty$, on a évidemment $K.A_\infty^c \in \underline{\underline{F}}_\infty$, et on montre aisément que l'on a $K.A_\infty \in \underline{\underline{G}}$ en supposant d'abord $K \in \underline{\underline{F}}_m$ pour un entier m et en raisonnant ensuite par classes monotones. Ceci fait, il est clair que l'on définit une filtration $(\underline{\underline{H}}_n)$ en posant $\underline{\underline{H}}_n = \underline{\underline{F}}_n.(\underline{\underline{G}} \vee \underline{\underline{F}}_{n-1})$ pour tout entier n et on a évidemment $\underline{\underline{H}}_\infty = \underline{\underline{F}}_\infty$. Définissons une v.a. S par

$$S = n \text{ sur } A_{n-1}.A_n^c \quad (A_{-1} = \Omega) \quad , \quad S = \infty \text{ sur } A_\infty$$

Comme on a $A_{n-1}.A_n^c \in \underline{\underline{G}}.\underline{\underline{F}}_n \subset \underline{\underline{H}}_n$, la v.a. S est un t.d'a. de $(\underline{\underline{H}}_n)$. Montrons que l'on a $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{H}}_S$. D'abord, il résulte immédiatement de (1) que $\underline{\underline{G}}$ est incluse dans $\underline{\underline{H}}_S$. Soit maintenant $K \in \underline{\underline{H}}_S$; on a, pour n fini,

$$K.\{S = n\} = K.A_{n-1}.A_n^c \in \underline{\underline{H}}_n \subset \underline{\underline{G}} \vee \underline{\underline{F}}_{n-1}$$

et $K.\{S = \infty\} = K.A_\infty \in \underline{\underline{H}}_\infty$. Comme on a $K.A_{n-1}.A_n^c = (K.A_{n-1}.A_n^c).A_{n-1}$, il résulte de (1) que $K.\{S = n\}$ appartient à $\underline{\underline{G}}$ pour $n > 0$, et c'est aussi vrai pour $n = 0$; par ailleurs, on a aussi $K.A_\infty = (K.A_\infty).A_\infty$ et donc $K.\{S = \infty\} \in \underline{\underline{G}}$ d'après (1) étendu à $n = \infty$. D'où, finalement, on a bien $K \in \underline{\underline{G}}$ et l'égalité $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{H}}_S$ est démontrée. Soit enfin T un t.d'a. de $(\underline{\underline{F}}_n)$ et définissons une v.a. T' par

$$T' = n \quad \text{sur} \quad (\{T = n-1\}.A_{n-1}^c) + (\{T = n\}.A_n)$$

$$T' = \infty \quad \text{sur ce qui reste}$$

D'abord, nous montrons que, pour tout $K \in \underline{\underline{F}}_T$, on a $K.\{T' = n\} \in \underline{\underline{H}}_n$, ce qui impliquera que T' est un t.d'a. de $(\underline{\underline{H}}_n)$ (prendre $K = \Omega$) et que $\underline{\underline{F}}_T$ est incluse dans $\underline{\underline{H}}_{T'}$. Soit donc $K \in \underline{\underline{F}}_T$ et écrivons

$$K.\{T' = n\} = (K.\{T = n-1\}.A_{n-1}^c) + (K.\{T = n\}.A_n)$$

On déduit de (1) que le premier ensemble du second membre appartient à $\underline{\underline{F}}_{n-1}$ et que le second appartient à $\underline{\underline{G}}.\underline{\underline{F}}_n$, si bien que $K.\{T' = n\}$ appartient à $\underline{\underline{H}}_n$. Nous terminons la démonstration du théorème en montrant que $\underline{\underline{H}}_{T'}$ est incluse dans $\underline{\underline{F}}_T$. Soit $K \in \underline{\underline{H}}_{T'}$ et écrivons

$$K.\{T = n\} = (K.\{T' = n\}.A_n) + (K.\{T' = n+1\}.A_n^c)$$

Comme $K.\{T' = n\}$ appartient à $\underline{\underline{H}}_n$, le premier ensemble du second membre appartient à $\underline{\underline{F}}_n$, et comme $K.\{T' = n+1\}$ appartient à $\underline{\underline{H}}_{n+1}$, donc à $\underline{\underline{G}} \vee \underline{\underline{F}}_n$, il résulte de (1) que le second ensemble appartient aussi à $\underline{\underline{F}}_n$. D'où finalement $K.\{T = n\}$ appartient à $\underline{\underline{F}}_n$, et c'est fini.

Nous montrons maintenant que le théorème 1 peut être mis en défaut si on ne suppose pas $\underline{\underline{G}}$ incluse dans $\underline{\underline{F}}_\infty$; nous verrons ensuite que l'on a cependant un résultat un peu plus faible dans ce cas.

UN CONTRE-EXEMPLE. Nous prenons $\Omega = \{0,1,\ldots,a,b\}$ où a,b sont deux points ajoutés à $\mathbb{N}$, et $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{F}}$ = la tribu des parties de Ω. Pour $\underline{\underline{F}}_n$, nous prenons la tribu engendrée par $\{0\},\{1\},\ldots,\{n-1\}$ et par l'atome $\{n,n+1,\ldots,a,b\}$. Comme $\underline{\underline{F}}_n$ est incluse dans $\underline{\underline{G}}$ pour tout n, $\underline{\underline{G}}$ est évidemment temporellement compatible avec chacune des $\underline{\underline{F}}_n$. Nous supposons que $\underline{\underline{G}}$ est temporellement compatible avec la filtration $(\underline{\underline{F}}_n)$ et, désignant par $(\underline{\underline{H}}_n)$ une filtration réalisant cette compatibilité temporelle, nous montrons que l'on aboutit alors à une contradiction. D'abord, on a évidemment $\underline{\underline{H}}_\infty = \underline{\underline{G}} = \underline{\underline{F}}$. Soit, pour chaque n, S_n un t.d'a. de $(\underline{\underline{H}}_n)$ tel que $\underline{\underline{F}}_n = \underline{\underline{H}}_{S_n}$. Quitte à remplacer S_n par $\sup_{m\leq n} S_m$, on peut supposer que la suite (S_n) est croissante ; puis, comme $\{0\},\ldots,\{n-1\}$ appartiennent à $\underline{\underline{F}}_n$, on peut supposer $S_n = \infty$ sur $\{0,\ldots,n-1\}$, quitte à remplacer S_n par le t.d'a. de $(\underline{\underline{H}}_n)$ valant ∞ sur $\{0,\ldots,n-1\}$ et S_n sur $\{n,n+1,\ldots,a,b\}$. Posons alors $S = \lim S_n$; on a $S = \infty$ sur $\mathbb{N}$ mais on ne peut avoir $S = \infty$ partout car, alors, $\underline{\underline{F}}_\infty = \bigvee_n \underline{\underline{H}}_{S_n}$ serait égale à $\underline{\underline{H}}_\infty$, ce qui est impossible, les points a,b appartenant à un même atome de $\underline{\underline{F}}_\infty$. Par ailleurs comme, pour n fixé, $\{n,n+1,\ldots,a,b\}$ est un atome de $\underline{\underline{F}}_n$ et que S_n est $\underline{\underline{F}}_n$-mesurable, S_n est égal à une constante s_n, finie, sur cet atome. Et, comme l'ensemble $\{S_n = S_{n+1} < \infty\}$ appartient à $\underline{\underline{F}}_n$, on voit que la suite (s_n) ne peut être que strictement croissante, ce qui contredit le fait que S ne peut être partout égal à ∞.

Nous modifions en conséquence notre définition en supposant que, si $\underline{\underline{G}}$ n'est pas incluse dans $\underline{\underline{F}}_\infty$, la filtration qui doit réaliser la compatibilité temporelle puisse être indexée par $I = \{0,1,\ldots,\infty,\infty+1\}$, ∞ et $\infty+1$ étant deux points ajoutés à $\mathbb{N}$ en convenant que l'on a $n < \infty < \infty+1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ (si l'on veut que l'ensemble d'indices soit inclus dans $\mathbb{R}_+$, on peut prendre $I = \{0,\frac{1}{2},\ldots,1-\frac{1}{n},\ldots,1,2\}$).

THEOREME 2. <u>Sans supposer $\underline{\underline{G}}$ incluse dans $\underline{\underline{F}}_\infty$, si, pour tout n, les tribus $\underline{\underline{G}}$ et $\underline{\underline{F}}_n$ sont temporellement compatibles, alors la tribu $\underline{\underline{G}}$ et la filtration $(\underline{\underline{F}}_n)$ sont temporellement compatibles, et la compatibilité temporelle est réalisée par la filtration $(\underline{\underline{H}}_i)_{i\in I}$ définie par $\underline{\underline{H}}_n = \underline{\underline{F}}_n.(\underline{\underline{G}} \vee \underline{\underline{F}}_{n-1})$ pour $n\in\mathbb{N}$, $\underline{\underline{H}}_\infty = \bigvee_n \underline{\underline{H}}_n$ et $\underline{\underline{H}}_{\infty+1} = \underline{\underline{G}} \vee \underline{\underline{H}}_\infty$.</u>

DEMONSTRATION. Nous nous bornons à indiquer brièvement les modifications à apporter à la démonstration du théorème 1, les A_n ayant la même signification que précédemment. Pour plonger $\underline{\underline{G}}$ dans la filtration $(\underline{\underline{H}}_i)$, on remplace simplement le t.d'a. S précédemment défini par le t.d'a. S' égal à S sur A_∞^c et égal à $\infty+1$ sur A_∞. Pour plonger la filtration $(\underline{\underline{F}}_n)$ dans la filtration $(\underline{\underline{H}}_i)_{i\in I}$, il n'y a rien à changer.

Nous espérons pouvoir aborder le problème de la compatibilité temporelle d'une tribu $\underline{\underline{G}}$ avec une filtration $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ dans un prochain article.

BIBLIOGRAPHIE

[1] SEYNOU (A.) : Sur les couples de tribus temporellement compatibles (C.R. Acad. Sc. Paris, t. 287, pp 659-661)

A. SEYNOU
Assistant à l'IMP
B.P. 7021
OUAGADOUGOU (Haute-Volta)